Revista de la
Unión Matemática Argentina
Volumen 26, 1972.

SOBRE UNA TEORIA DE PROBABILIDAD FUNCIONAL

Por Osvaldo Borghi

SUMARIO. Sobre la base de la idea introducida por Zadeh en [8] de los conjuntos difusos, es nuestro objetivo en este trabajo construir los fundamentos o bases de una teoría de probabilidad definida sobre estructuras convenientes, formadas por conjuntos difusos y que llamaremos σ-álgebras difusas (σ-reticulados pseudocomplementados). Esta teoría debe coincidir, en el caso de conjuntos habituales, con la teoría de probabilidad conocida.

Se comienza con la definición de la probabilidad funcional sobre los elementos de un álgebra difusa y se obtiene una serie de propiedades para ella.

Establecido luego el concepto del "espacio de probabilidad funcional", se procede a su completación y se demuestra la unicidad de la misma.

Se concluye con el "Teorema de Extensión" que afirma la posibilidad de prolongar de manera única cualquier probabilidad funcional definida sobre un álgebra difusa dada, a otra nueva probabilidad funcional que esté definida a lo largo de la σ-álgebra difusa generada por el álgebra difusa de partida.

1. Sea X un conjunto arbitrario de puntos x que nos sirve de "base" para "extraer" de él, o definir, sobre él, los conjuntos difusos según Zadeh [8].
Si consideramos un "conjunto difuso" A queremos decir con eso que existe una función

$$f_A : X \longrightarrow [0,1] \qquad (1)$$

con la propiedad de que para cada punto $x \in X$ define su "grado de pertenencia $f_A(x)$" al conjunto difuso A. Obsérvese bien que de esta manera *todos* los puntos x del conjunto básico X "pertenecen" en mayor o menor grado al conjunto difuso A, definido analíticamente por (1). Así que no es erróneo *identificar* directamente el "conjunto difuso A" *con* su función de pertenencia f_A, teniendo así a nuestra disposición dos lenguajes: el uno más geométrico y visual (pero menos adecuado por las características de los difusos), y el otro bien abstracto analítico, pero que refleja inequívocamente las propiedades que deducimos (y vinculamos) con nuestro concepto del "conjunto difuso" creado por primera vez por Zadeh [8]

Definimos luego las operaciones difusistas de *unión* ($\cup$), *intersección* ($\cap$) y *pseudo-complementación* (C) por las relaciones (definitorias) siguientes. Sean A y B dos difusos con sus respectivas funciones de pertenencia f_A y f_B. Entonces

Unión: $A \cup B$ por la exigencia $f_{A\cup B} = \text{máx}\,[f_A, f_B]$ (2)

Intersección: $A \cap B$ por $f_{A\cap B} = \text{mín}\,[f_A, f_B]$ (3)

Pseudo-complementación: CA por $f_{CA} = 1 - f_A$ (4)

Más generalmente, si $(A_i)_{i\in I}$ es una familia arbitraria de conjuntos difusos definimos la unión y la intersección de dicha familia por las expresiones:

$$f_{\underset{I}{\cup} A_i} = \sup_I f_{A_i} \quad (2a) \qquad ; \qquad f_{\underset{I}{\cap} A_i} = \inf_I f_{A_i} \quad (3a)$$

Una clase $\mathcal{B}$ de conjuntos difusos recibe el nombre de "*σ-álgebra difusa*" si es cerrada para la unión numerable y la pseudo-complementación. Si es cerrada para uniones finitas y pseudo-complementación se la denomina "*álgebra difusa*".
Decimos que el difuso A está contenido en otro difuso B si

$f_A(x) \leqslant f_B(x) \quad \forall\, x \in X$, y lo escribiremos $A \subset B$. (5)

Mencionamos además las relaciones

$$C(\underset{I}{\cup} A_i) = \underset{I}{\cap} CA_i \qquad \text{y} \qquad C(\underset{I}{\cap} A_i) = \underset{I}{\cup} CA_i \qquad (6)$$

que fácilmente pueden ser verificadas para un I arbitrario.

2. DEFINICION Y PROPIEDADES DE PROBABILIDAD FUNCIONAL.

a) DEFINICION. *Llamaremos probabilidad funcional a toda aplicación sobre el álgebra difusa* $\mathcal{B}$

$$P:\ \mathcal{B} \longrightarrow [0,1] \qquad \textit{tal que :}$$

D_1) $P(X) = 1$

D_2) P *es fuertemente aditiva, es decir, para todo par* $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ *se cumple* $P(B_1 \cup B_2) + P(B_1 \cap B_2) = P(B_1) + P(B_2)$

D_3) *Para todo* $B \in \mathcal{B}$: $P(B) + P(CB) = 1$

D_4) *Dadas dos sucesiones en* $\mathcal{B}$*, tales que*

$A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_n \subset \dots$ *y* $B_1 \supset B_2 \supset \dots \supset B_n \supset \dots$ *y*

$\bigcup_n A_n \supset \bigcap_k B_k$, *entonces* $\lim \uparrow P(A_n) \geqslant \lim \downarrow P(B_k)$

COROLARIOS DE D_4.

a) Si $B_n \downarrow B$ (en $\mathcal{B}$), entonces $P(B_n) \downarrow P(B)$ con $n \to \infty$, donde $B_n \downarrow B$ indica convergencia puntual decreciente.

b) Si $B_n \uparrow B$ (en $\mathcal{B}$), entonces $P(B_n) \uparrow P(B)$ con $n \to \infty$, donde $B_n \uparrow B$ indica convergencia puntual creciente.

c) Si $A \supset B$, entonces $P(A) \geqslant P(B)$.

PROPIEDADES DE P.

a) $P(\phi) = 0$

b) Si $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ luego $P(B_2 - B_1) \geqslant P(B_2) - P(B_1)$.

c) P es aditiva, es decir: Si $B_1 \cap B_2 = \emptyset$ entonces $P(B_1 \cup B_2) = P(B_1) + P(B_2)$.

d) Para todo $B \in \mathcal{B}$ se cumple que $P(B \cup CB) + P(B \cap CB) = 1$

e) Si $B_n \downarrow B$ (en $\mathcal{B}$), entonces $P(B_n - B) \downarrow P(B - B)$ con $n \to \infty$, *donde* $B_n - B \underset{d}{=} B_n \cap CB$. También

$B_n \downarrow \phi$ implica $P(B_n) \downarrow 0$; $B_n \uparrow X$ implica $P(B_n) \uparrow 1$;

$B_n \uparrow B$ (en $\mathcal{B}$) implica $P(B - B_n) \downarrow P(B - B)$.

f) *Para toda familia numerable* $(A_i, i \in I)$ en $\mathcal{B}$, *tal que* $\bigcup_I A_i \in \mathcal{B}$, *se tiene* $P(\bigcup_I A_i) \leqslant \sum_I P(A_i)$.

g) *Sean* $(A_m,\ m \geqslant 1)\uparrow$ *y* $(B_n,\ n \geqslant 1)\uparrow$ *en* $\mathcal{B}$ *tal que* $\bigcup_m A_m \subset \bigcup_n B_n$, *entonces* $\lim_m \uparrow P(A_m) \leqslant \lim_n \uparrow P(B_n)$.

Su demostración es sencilla.

h) P *es σ-aditiva.* Su demostración es la conocida en teoría de medida.

i) *Ejemplo de una probabilidad funcional.*

Sea $(X,\mathcal{A},p)$ un espacio de probabilidad en el sentido habitual, y sea $A = \{f:X \to [0,1]$ tal que f sea $\mathcal{A}$-medible$\}$.

Si ponemos $P(f) = \int_X f\,dp$, entonces P es un ejemplo de una probabilidad funcional sobre la σ-álgebra difusa A.

3. ESPACIOS DE PROBABILIDAD FUNCIONAL.

a. DEFINICION. *Es todo conjunto ordinario* X *en donde se ha distinguido una σ-álgebra difusa* A *en* $[0,1]^X = P_D(X)$ *y se ha definido una probabilidad funcional* P *sobre ella.*
Lo notaremos: (X,A,P).

b. PROPOSICION. *Para toda sucesion* $(A_n,\ n \geqslant 1)$ *en* A*, se cumple* $P(\lim_n\inf A_n) \leqslant \lim_n\inf P(A_n) \leqslant \lim_n\sup P(A_n) \leqslant P(\lim_n\sup A_n)$.

Demostración. Es formalmente igual a la habitual en teoría de medida.

4. COMPLETACION DE UN ESPACIO DE PROBABILIDAD FUNCIONAL.

Sea (X,A,P) un espacio de probabilidad funcional arbitrario.

a. DEFINICION. *Un conjunto difuso* $N \subset X$ *se dice* P-*despreciable si existe* $A \in A$ *tal que* $N \subset A$ *y* $P(A) = 0$.

b. COROLARIOS DE LA DEFINICION.

i) *Si* $N \subset M$ *y* M *es* P-*despreciable, entonces* N *es* P-*despreciable.*

ii) *Si* $P(A) = 0$*, entonces* A *es* P-*despreciable.*

iii) *Sea* $(N_i, i \in I)$ *una familia numerable de conjuntos difusos* P-*despreciables. Entonces* $\bigcup_I N_i$ *es* P-*despreciable.*

iv) *Toda intersección numerable de conjuntos difusos que tenga, al menos, un intersecando* P-*despreciable, es* P-*despreciable.*

c. DEFINICION. *Un espacio de probabilidad funcional se dice completo si todo conjunto difuso P-despreciable del espacio es elemento de su σ-álgebra difusa* $\mathcal{A}$.

Definamos, a continuación, la clase

(1) $\bar{\mathcal{A}} = \{A \subset X : \exists\, A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ tal que $A_1 \subset A \subset A_2$ y $P(A_1) = P(A_2)\}$.

d. LEMA. $\bar{\mathcal{A}}$ *es una σ-álgebra difusa que contiene* $\mathcal{A}$.

Demostracion. Sea $A \in \bar{\mathcal{A}}$. Entonces, por definición, existen $A_1 \in \mathcal{A}$, $A_2 \in \mathcal{A}$ tal que $A_1 \subset A \subset A_2$ y $P(A_1) = P(A_2)$. Esto implica que $CA_1 \supset CA \supset CA_2$ y $1 - P(A_1) = 1 - P(A_2)$, es decir existen CA_1, $CA_2 \in \mathcal{A}$ tal que $CA_2 \subset CA \subset CA_1$ y $P(CA_2) = P(CA_1)$, esto es $CA \in \bar{\mathcal{A}}$.

Sean $A, B \in \bar{\mathcal{A}}$. Luego existen $A_1, A_2, B_1, B_2 \in \mathcal{A}$ tal que

$A_1 \subset A \subset A_2$; $B_1 \subset B \subset B_2$ y $P(A_1) = P(A_2)$; $P(B_1) = P(B_2)$.

Por ello $A_1 \cup B_1 \subset A \cup B \subset A_2 \cup B_2$; $A_1 \cap B_1 \subset A \cap B \subset A_2 \cap B_2$

y $P(A_1 \cup B_1) = P(A_1) + P(B_1) - P(A_1 \cap B_1) \geqslant P(A_2) + P(B_2) - P(A_2 \cap B_2) = P(A_2 \cup B_2)$, esto es $P(A_1 \cup B_1) = P(A_2 \cup B_2)$, lo que implica que $A \cup B \in \bar{\mathcal{A}}$.

Análogamente, $A \cap B \in \bar{\mathcal{A}}$.

De lo anterior se deduce que $\bar{\mathcal{A}}$ es un álgebra difusa. Además, que $\mathcal{A} \subset \bar{\mathcal{A}}$ es trivial.

Nos falta ver que $\bar{\mathcal{A}}$ es una clase monótona difusa.

Sea $(A_n, n \geqslant 1)$ creciente en $\bar{\mathcal{A}}$. Entonces, para cada $\underline{n}$ existen A_n^1, $A_n^2 \in \mathcal{A}$ tal que $A_n^1 \subset A_n \subset A_n^2$ y $P(A_n^1) = P(A_n^2)$.

Pero, para todo $\underline{n}$: $\bigcup_{i \leq n} A_i^1 \subset \bigcup_{i \leq n} A_i \subset \bigcup_{i \leq n} A_i^2$ lo que implica

$P(\bigcup_{i \leq n} A_i^1) = P(\bigcup_{i \leq n} A_i^2)$, para cada $\underline{n}$.

Tomando límite: $\lim_n \uparrow P(\bigcup_{i \leq n} A_i^1) = \lim_n \uparrow P(\bigcup_{i \leq n} A_i^2)$

es decir $P(\bigcup_n A_n^1) = P(\bigcup_n A_n^2)$, lo que significa $\bigcup_n A_n \in \bar{\mathcal{A}}$.

La demostración es similar para $(A_n, n \geqslant 1)$ decreciente en $\bar{\mathcal{A}}$.

e. DEFINICION. *Sea la siguiente aplicación* $\bar{P}: \bar{\mathcal{A}} \longrightarrow [0,1]$ *tal que* $\bar{P}(A) = P(A_1)$.

Veamos previamente que $\overline{P}$ está bien definida.

Sea $A = B$ en $\overline{A}$, entonces existen $A_1, A_2, B_1, B_2 \in A$ tal que

$A_1 \subset A \subset A_2$; $B_1 \subset B \subset B_2$; $P(A_1) = P(A_2)$; $P(B_1) = P(B_2)$.

Dado que $A_1 \subset A = B \subset B_2$, por ello $P(A_1) \leqslant P(B_2) = P(B_1)$.

Como $B_1 \subset B = A \subset A_2$, se obtiene $P(B_1) \leqslant P(A_2) = P(A_1)$, es decir, $P(A_1) = P(B_1)$.

f. LEMA. $\overline{P}$ *es una probabilidad funcional sobre* $\overline{A}$, *la cual es extensión de* P.

Demostración. Es trivial que $P = \overline{P}$ (sobre A).

Veamos ahora los axiomas de la definición de probabilidad funcional.

D_1) $\overline{P}(X) = P(X) = 1$

D_2) Sean $A, B \in \overline{A}$. Por definición existen $A_1, A_2, B_1, B_2 \in A$ tal que

$$A_1 \subset A \subset A_2 \ ; \ B_1 \subset B \subset B_2 \ ; \ P(A_1) = P(A_2) \ ; \ P(B_1) = P(B_2).$$

Pero $\overline{P}(A \cup B) = P(A_1 \cup B_1)$; $\overline{P}(A \cap B) = P(A_1 \cap B_1)$;

$$\overline{P}(A) = P(A_1) \ ; \ \overline{P}(B) = P(B_1).$$

Por eso $\overline{P}(A \cup B) + \overline{P}(A \cap B) = \overline{P}(A) + \overline{P}(B)$.

D_3) Sea $A \in \overline{A}$, arbitrario.

Luego $\overline{P}(A) = P(A_1)$ y $\overline{P}(CA) = P(CA_1)$. Entonces $\overline{P}(A) + \overline{P}(CA) = 1$.

D_4) Sean $(A_n, n \geqslant 1) \uparrow$; $(B_k, k \geqslant 1) \downarrow$; $\bigcup_n A_n \supset \bigcap_k B_k$ (en $\overline{A}$).

Por definición, para todo $\underline{n}$, existen $A_n^1, A_n^2 \in A$, tal que

$$A_n^1 \subset A_n \subset A_n^2 \quad \text{y} \quad P(A_n^1) = P(A_n^2) = \overline{P}(A_n)$$

para todo k, existen $B_k^1, B_k^2 \in A$, tal que $B_k^1 \subset B_k \subset B_k^2$ y

$$P(B_k^1) = P(B_k^2) = \overline{P}(B_k).$$

Por otra parte $P(\bigcup_n A_n^1) = P(\bigcup_n A_n^2) = \overline{P}(\bigcup_n A_n)$;

$$P(\bigcap_k B_k^1) = P(\bigcap_k B_k^2) = \overline{P}(\bigcap_k B_k).$$

Pero $A_n^1 \subset \bigcup_{i \leq n} A_i^1 \subset A_n \subset A_n^2$ implica $P(A_n^1) = P(\bigcup_{i \leq n} A_i^1)$ y

$$B_k^2 \supset \bigcap_{i\leq k} B_i^2 \supset B_k \supset B_k^1 \quad \text{implica} \quad P(B_k^2) = P(\bigcap_{i\leq k} B_i^2) .$$

Entonces $\lim\limits_n \uparrow P(\bigcup\limits_{i\leq n} A_i^1) = P(\bigcup\limits_n A_n^1)$; $\lim\limits_n \downarrow P(\bigcap\limits_{i\leq k} B_i^2) = P(\bigcap\limits_k B_k^2)$

es decir $\lim\limits_n \uparrow P(A_n^1) = P(\bigcup\limits_n A_n^1) = \overline{P}(\bigcup\limits_n A_n) = \lim\limits_n \uparrow \overline{P}(A_n)$

y $\lim\limits_k \downarrow P(B_k^2) = P(\bigcap\limits_k B_k^2) = \overline{P}(\bigcap\limits_k B_k) = \lim\limits_k \downarrow \overline{P}(B_k)$.

Pero $\bigcap\limits_k B_k^1 \subset \bigcap\limits_k B_k \subset \bigcup\limits_n A_n \subset \bigcup\limits_n A_n^2$ y $\lim\limits_k \downarrow P(\bigcap\limits_{i\leq k} B_i^1) \leqslant \lim\limits_n \uparrow P(\bigcup\limits_{i\leq n} A_i^2)$;

esto es, $\lim\limits_k \downarrow P(B_k^2) \leqslant \lim\limits_n \uparrow P(A_n^1)$; es decir

$$\lim_k \downarrow \overline{P}(B_k) \leqslant \lim_n \uparrow \overline{P}(A_n).$$

g. DEFINICION. *El espacio* $(X,\overline{A},\overline{P})$ *es un espacio de probabilidad funcional completado de* (X,A,P), *pues todo conjunto difuso* P-*despreciable es elemento de* $\overline{A}$, *y un difuso es* P-*despreciable si y solo si es* $\overline{P}$-*despreciable.*

h. TEOREMA. $\overline{P}$ *es la única probabilidad funcional sobre* $\overline{A}$, *la cual es extensión de la probabilidad funcional* P.

Demostración. Sea $\overline{\overline{P}}$ otra probabilidad funcional sobre $\overline{A}$ tal que, para todo $A \in A$ tenga el valor $\overline{\overline{P}}(A) = P(A)$.
Sea, ahora, $B \in \overline{A}$ arbitrario. En consecuencia existen $B_1, B_2 \in A$ tal que $B_1 \subset B \subset B_2$ y $P(B_1) = P(B_2) = \overline{P}(B)$.
Entonces $\overline{\overline{P}}(B_1) \leqslant \overline{\overline{P}}(B) \leqslant \overline{\overline{P}}(B_2)$; esto es $P(B_1) \leqslant \overline{\overline{P}}(B) \leqslant P(B_2)$, lo que en definitiva da $\overline{P}(B) = \overline{\overline{P}}(B)$.

5. PROBABILIDAD FUNCIONAL EXTERIOR E INTERIOR.

Sea (X,A,P) un espacio de probabilidad funcional arbitrario.

a. DEFINICION. *Llamaremos probabilidad funcional exterior a la aplicación*

$$P^*: P_D(X) \longrightarrow [0,1]$$
$$A \longrightarrow \inf_{A\subset B\in A} P(B)$$

Análogamente, la *probabilidad funcional interior* es

$$P_*: \mathcal{P}_D(X) \longrightarrow [0,1]$$
$$A \longrightarrow \sup_{A \supset B \in \mathcal{A}} P(B)$$

NOTA. P_* y P^* no son, en general, probabilidades funcionales.

b. PROPIEDADES.

1) Para todo $B \in \mathcal{A}$ se cumple que $P_*(B) = P^*(B) = P(B)$.

2) Para todo $A \in \mathcal{P}_D(X)$ vale que $P_*(A) \leqslant P^*(A)$.

3) Para todo $A \in \mathcal{P}_D(X)$ se tiene $P_*(A) = 1 - P^*(CA)$.

4) Para todo $A \in \mathcal{P}_D(X)$ se cumple que $P^*(A) = 1 - P_*(CA)$.

c. LEMA. *En las definiciones de P_* y P^* los extremos son alcanzados.*

Demostración. Veamos el caso de P_*. Para P^* se procede en forma análoga.
Sea $D \in \mathcal{P}_D(X)$, arbitrario. Entonces, para todo $n \geqslant 1$, existe

$A_n \in \mathcal{A}$ tal que $A_n \subset D$ y $P_*(D) \geqslant P(A_n) > P_*(D) - 1/n$.

Sea $A = \bigcup_n A_n \in \mathcal{A}$; $A \subset D$. Dado que, para todo $n \geqslant 1$, vale que

$A \supset A_n$, entonces $P(A) \geqslant P(A_n) > P_*(D) - 1/n$ para cada $n \geqslant 1$.

Por ello $P(A) \geqslant P_*(D)$. Por la definición de P_* se tiene

$$P(A) \leqslant P_*(D)$$

En consecuencia existe $A \in \mathcal{A}$; $A \subset D$ y $P(A) = P_*(D)$.

d. NOTA. P^* es sub-σ-aditiva, es decir, si $(D_i,\ i \in I) \subset \mathcal{P}_D(X)$, con I numerable, entonces $P^*(\bigcup_I D_i) \leqslant \sum_I P^*(D_i)$

Demostración. Se aplica Lema c) y sub-aditividad de P.

e. LEMA. *Si* $\mathcal{D} = \{D \subset X: P_*(D) = P^*(D)\}$ *entonces* $\mathcal{D} = \overline{\mathcal{A}}$.

Demostración. Sea $D \in \overline{\mathcal{A}}$, entonces existen $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ tal que

$$A_1 \subset D \subset A_2 \quad \text{y} \quad P(A_1) = P(A_2).$$

Pero $A_1 \subset D$ implica que $P(A_1) \leqslant P_*(D)$ y $D \subset A_2$ implica que

$P(A_2) \geqslant P^*(D)$, es decir, $P^*(D) \leqslant P(A_2) = P(A_1) \leqslant P_*(D)$.

Por eso $P^*(D) = P_*(D)$.

Inversamente, sea $D \in \mathcal{D}$. Por lema c) existe $A_1 \subset D$, en $\mathcal{A}$, tal que $P(A_1) = P_*(D)$ y existe $A_2 \supset D$, en $\mathcal{A}$, tal que $P(A_2) = P^*(D)$, es decir, $D \in \overline{\mathcal{A}}$.

f. COROLARIO. $\overline{\mathcal{A}} = \{D \subset X\colon P^*(D) + P^*(CD) = 1\} =$

$= \{D \subset X\colon P^*(D) + P_*(CD) = 1\}$.

Demostración. Trivial.

g. COROLARIO. $P_* = P^* = \overline{P}$ (sobre $\overline{\mathcal{A}}$).

Demostración. Trivial.

h. PROPOSICION. *Las probabilidades funcionales exterior e interior definidas a partir del espacio* $(X,\mathcal{A},P)$ *coinciden, respectivamente, con las definidas a partir del espacio* $(X,\overline{\mathcal{A}},\overline{P})$.

Demostración. Tomemos el caso de la probabilidad funcional exterior. Tenemos que demostrar que para todo $D \subset X$, difuso, se cumple $P^*(D) = \overline{P}^*(D)$.

Como se tiene $\mathcal{A} \subset \overline{\mathcal{A}}$, entonces

$$\{P(A)\colon D \subset A \in \mathcal{A}\} \subset \{\overline{P}(A')\colon D \subset A' \in \overline{\mathcal{A}}\}.$$

Luego $P^*(D) \geqslant \overline{P}^*(D)$.

Inversamente, por lema c) existe $A' \supset D$; $A' \in \overline{\mathcal{A}}$, tal que $\overline{P}^*(D) = \overline{P}(A')$.

Pero $A' \in \overline{\mathcal{A}}$ implican que existen $A_1', A_2' \in \mathcal{A}$ tal que $A_1' \subset A' \subset A_2'$ y $P(A_1') = P(A_2') = \overline{P}(A')$.

Entonces $P^*(D) = P(A_2')$ con $A_2' \supset D$, $A_2' \in \mathcal{A}$.

Es decir $P^*(D) \leqslant P(A_2') = \overline{P}^*(D)$.

6. TEOREMA DE EXTENSION DE UNA PROBABILIDAD FUNCIONAL.

El objetivo de este parágrafo es demostrar un teorema de extensión de una probabilidad funcional P definida sobre un álgebra difusa $\mathcal{B}$, a la σ-álgebra difusa $\mathcal{A}$ generada por ella.

Sea, como antes, un conjunto ordinario cualquiera X. Sea dada un álgebra difusa $\mathcal{B}$ de $P_D(X)$ y sobre ésta tengamos definida una probabilidad funcional P.

a. LEMA. *La clase de todas las uniones de familias numerables en* $\mathcal{B}$ *es idéntica a la clase de todas las uniones de sucesiones crecientes en* $\mathcal{B}$.

Demostración. Trivial.

b. DEFINICION. *Sea la clase* $\mathcal{G} = \{ \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n : B_n \in \mathcal{B},\ n = 1,2,\ldots\} \supset \mathcal{B}$.

Si $G = \bigcup_n B_n$ *donde* $B_n \in \mathcal{B}$ *y* $B_n \subset B_{n+1}$ $(n = 1,2,\ldots)$

definimos $\pi(G) = \lim_{n\to\infty} P(B_n)$

Esta está bien definida, en virtud de 2-g. Además cumple que, para todo $B \in \mathcal{B}$, $\pi(B) = P(B)$.

c. PROPOSICION. *Las principales propiedades de la clase* $\mathcal{G}$ *y de la aplicación* π *son las siguientes:*

1) *Si* $G_1, G_2 \in \mathcal{G}$, *entonces* $G_1 \cup G_2 \in \mathcal{G}$; $G_1 \cap G_2 \in \mathcal{G}$ *y*

$\pi(G_1 \cup G_2) + \pi(G_1 \cap G_2) = \pi(G_1) + \pi(G_2)$.

2) *Si* $G_1 \subset G_2$, *en* $\mathcal{G}$, *entonces* $\pi(G_1) \leqslant \pi(G_2)$.

3) *Sea* $(G_n,\ n \geqslant 1)$ *una sucesión creciente en* $\mathcal{G}$ *tal que*

$\lim_n \uparrow G_n = G$. *Entonces* $G \in \mathcal{G}$ *y* $\pi(G) = \lim_n \uparrow \pi(G_n)$.

4) $\mathcal{G}$ *es la mínima clase de* $P_D(X)$ *que contiene a* $\mathcal{B}$ *y que es cerrada para la intersección finita y la unión numerable.*

Demostración. 1) Sean $G_1, G_2 \in \mathcal{G}$. Entonces existen sucesiones crecientes $(A_n,\ n \geqslant 1)$ y $(B_n,\ n \geqslant 1)$ en $\mathcal{B}$ tal que

$$G_1 = \bigcup_n A_n \quad \text{y} \quad G_2 = \bigcup_n B_n$$

Luego, $G_1 \cup G_2 = \bigcup_n (A_n \cup B_n) \in \mathcal{G}$ y $G_1 \cap G_2 = \bigcup_n (A_n \cap B_n) \in \mathcal{G}$.

Por otra parte, para cada n, se cumple:

$$P(A_n) + P(B_n) = P(A_n \cup B_n) + P(A_n \cap B_n).$$

Pasando al límite, con $n \to \infty$ se obtiene la relación buscada.

2) Si $G_1 \subset G_2$, entonces $\bigcup_n A_n \subset \bigcup_n B_n$. Pero, por 2-g :

$\lim_n \uparrow P(A_n) \leqslant \lim_n \uparrow P(B_n)$.

3) Sea $G_n \uparrow G$, con $G_n \in \mathcal{G}$ para todo n. Veamos que $G \in \mathcal{G}$.

Como $G_n \in \mathcal{G}$, entonces existe una sucesión creciente $(A_{m,n}, m \geqslant 1)$ en $\mathcal{B}$ tal que $\bigcup_m A_{m,n} = G_n$, para cada n.

Pero, para todo m y para todo $n \leqslant m$: $A_{m,n} \subset D_m = \bigcup_{n \leq m} A_{m,n} \subset G_m$ $(_*)$

Luego, $G_n \subset \bigcup_m D_m \subset G$, para todo n. Es decir, $G = \bigcup_m D_m$ y $D_m \in \mathcal{B}$, lo que nos dice que $G \in \mathcal{G}$.

Por otra parte, en $(_*)$: para todo m y para todo $n \leqslant m$ vale que

$$P(A_{m,n}) \leqslant P(D_m) \leqslant \pi(G_m).$$

Esto es, para todo n

$$\lim_m P(A_{m,n}) \leqslant \lim_m P(D_m) \leqslant \lim_m \pi(G_m),$$

es decir, para cada n: $\pi(G_n) \leqslant \lim_m P(D_m) \leqslant \lim_m \pi(G_m)$ y finalmente, $\lim_m \pi(G_m) = \pi(G)$.

4) Sea $\mathcal{G}'$ la mínima clase que contiene a $\mathcal{B}$, bajo las condiciones enunciadas.

Por eso $\mathcal{B} \subset \mathcal{G}' \subset \mathcal{G}$.

Pero $G = \bigcup_n A_n \in \mathcal{G}$ implica que, para todo n, $A_n \in \mathcal{B}$. De lo que se deduce que $\bigcup_n A_n = G \in \mathcal{G}'$.

d. LEMA. *Si* G *y* $CG \in \mathcal{G}$, *entonces* $\pi(G) + \pi(CG) = 1$.

Demostración. Sea $G = \bigcup_n A_n$. Luego $CG = \bigcap_n CA_n$.

Pero $CG \in \mathcal{G}$ implica que $CG = \bigcup_n B_n$ creciente. Esto es, $\bigcup_n B_n = \bigcap_n CA_n$.

Lo que significa, para todo n, que: $B_n \subset \bigcup_n B_n = \bigcap_n CA_n \subset CA_n$,

es decir, $P(B_n) \leqslant P(CA_n)$ para todo n. Pasando al límite,

$\lim_n P(B_n) \leqslant 1 - \lim_n P(A_n)$. Lo que da $\pi(CG) \leqslant 1 - \pi(G)$. Dado que $\bigcup_n B_n \supset \bigcap_n CA_n$, por D_4) $\pi(CG) = \lim_n P(B_n) \geqslant \lim_n P(CA_n) = 1 - \pi(G)$

y, en síntesis: $\pi(G) + \pi(CG) = 1$.

e. DEFINICION. *Introduzcamos, ahora, la siguiente aplicación:*

$$\pi^*: \mathcal{P}_D(X) \longrightarrow [0,1]$$
$$D \longrightarrow \inf_{D \subset G \in \mathcal{G}} \pi(G)$$

f. PROPOSICION. *La función* π^* *goza de las siguientes propiedades:*

1) $\pi^*(G) = \pi(G)$ *para todo* $G \in \mathcal{G}$, $0 \leqslant \pi^*(D) \leqslant 1$ *para todo* $D \subset X$.

2) *Para todo* $D_1, D_2 \in \mathcal{P}_D(X)$:

$$\pi^*(D_1 \cup D_2) + \pi^*(D_1 \cap D_2) \leqslant \pi^*(D_1) + \pi^*(D_2).$$

3) *Si* $D_1 \subset D_2$, *en* $\mathcal{P}_D(X)$, *entonces* $\pi^*(D_1) \leqslant \pi^*(D_2)$.

4) *Sea una sucesión creciente* $(D_n, n \geqslant 1)$ *en* $\mathcal{P}_D(X)$ *tal que*

$\lim_n \uparrow D_n = D$, *entonces* $\lim_n \uparrow \pi^*(D_n) = \pi^*(D)$.

Demostración. Es formalmente similar a la que figura en la referencia [6].

g. LEMA. *Para todo* $D \in \mathcal{P}_D(X)$ *se verifica que* $\pi^*(D) + \pi^*(CD) \geqslant 1$.

Demostración. Sea D arbitrario. Entonces, por definición:

$$\pi^*(D) = \inf_{D \subset G \in \mathcal{G}} \pi(G) \qquad y \qquad \pi^*(CD) = \inf_{CD \subset G' \in \mathcal{G}} \pi(G')$$

Dado $\varepsilon > 0$, existen $G \supset D$ y $G' \supset CD \supset CG$ tal que

$$\pi^*(D) + \pi^*(CD) \geqslant \pi(G) + \pi(G') - 2\varepsilon \qquad (*)$$

Pero $\pi(G) + \pi(G') \geqslant 1$. Puesto que si $G = \bigcup_n A_n$ y $G' = \bigcup_n B_n$,

entonces $CG = \bigcap_n CA_n \subset CD \subset G' = \bigcup_n B_n$.

Luego, por D_4): $1 - \pi(G) = \lim_n P(CA_n) \leqslant \lim_n P(B_n)$

esto es, $1 \leqslant \pi(G) + \pi(G')$.

Finalmente, en (*): $\pi^*(D) + \pi^*(CD) \geqslant 1$.

A continuación construyamos la clase

$$\mathcal{D} = \{D \in \mathcal{P}_D(X) : \pi^*(D) + \pi^*(CD) = 1\}$$

h. LEMA. *$\mathcal{D}$ es una σ-álgebra difusa.*

Demostración. Dado que $\pi^* = \pi = P$ (sobre $\mathcal{B}$) entonces ϕ y $X \in \mathcal{D}$.

Sea $D \in \mathcal{D}$. Entonces $\pi^*(CD) + \pi^*(CCD) = 1$, es decir $CD \in \mathcal{D}$.

Sea $(D_n, n \geq 1)$ una sucesión creciente en $\mathcal{D}$.

Por ello, para cada n: $\pi^*(D_n) + \pi^*(CD_n) = 1$.

Luego, $\lim_n \pi^*(D_n) + \lim_n \pi^*(CD_n) = \pi^*(\bigcup_n D_n) + \lim_n \pi^*(CD_n) = 1$.

De aquí: $\lim_n \pi^*(CD_n) = 1 - \pi^*(\bigcup_n D_n) \leq \pi^*(C \bigcup_n D_n) = \pi^*(\bigcap_n CD_n)$.

Dado que $CD_n \supset \bigcap_n CD_n$, por ello se cumple que

$\pi^*(CD_n) \geq \pi^*(\bigcap_n CD_n)$, para todo n.

De aquí, se deduce que: $\lim_n \pi^*(CD_n) \geq \pi^*(\bigcap_n CD_n)$, es decir

$\lim_n \pi^*(CD_n) = \pi^*(\bigcap_n CD_n)$ lo que implica que $\bigcup_n D_n \in \mathcal{D}$.

Para toda sucesión $(D_n, n \geq 1)$ decreciente en $\mathcal{D}$ la demostración es análoga.

Es nuestro propósito ahora demostrar que la clase $\mathcal{D}$ es cerrada para unión e intersección finitas.

Sean $D_1, D_2 \in \mathcal{D}$. Dado que

$\pi^*(D_1 \cup D_2) + \pi^* C(D_1 \cup D_2) \geq 1$ y $\pi^*(D_1 \cap D_2) + \pi^* C(D_1 \cap D_2) \geq 1$

entonces $\pi^*(D_1 \cup D_2) + \pi^* C(D_1 \cup D_2) + \pi^*(D_1 \cap D_2) + \pi^* C(D_1 \cap D_2) \geq 2$.

Por otra parte,

$$\pi^*(D_1 \cup D_2) + \pi^*(D_1 \cap D_2) \leq \pi^*(D_1) + \pi^*(D_2)$$

y
$$\pi^* C(D_1 \cup D_2) + \pi^* C(D_1 \cap D_2) \leq \pi^*(CD_1) + \pi^*(CD_2).$$

De aquí se obtiene que:

$\pi^*(D_1 \cup D_2) + \pi^*(D_1 \cap D_2) + \pi^* C(D_1 \cup D_2) + \pi^* C(D_1 \cap D_2) \leq$

$\leq \pi^*(D_1) + \pi^*(CD_1) + \pi^*(D_2) + \pi^*(CD_2) = 2$.

De todo lo cual resulta:

$\pi^*(D_1 \cup D_2) + \pi^* C(D_1 \cup D_2) + \pi^*(D_1 \cap D_2) + \pi^* C(D_1 \cap D_2) = 2$

es decir, $D_1 \cup D_2 \in \mathcal{D}$ y $D_1 \cap D_2 \in \mathcal{D}$.

Por todo ello, $\mathcal{D}$ es un álgebra difusa monótona, lo que significa que $\mathcal{D}$ es una σ-álgebra difusa.

i. COROLARIO. *$\mathcal{D} \supset \mathcal{B}$ y $\mathcal{D} \supset \mathcal{A}$, donde $\mathcal{A}$ es la σ-álgebra difusa generada por $\mathcal{B}$.*

Demostración. Es inmediata.

j. LEMA. *Si $N \subset D \in \mathcal{D}$ y $\pi^*(D) = 0$, entonces $N \in \mathcal{D}$.*

Demostración. Es trivial.

k. LEMA. *π^* es fuertemente aditiva sobre $\mathcal{D}$.*

Demostración. Sean $D_1, D_2 \in \mathcal{D}$, arbitrarios. Anteriormente obtuvimos que:

$$\pi^*(D_1 \cup D_2) + \pi^* C(D_1 \cup D_2) + \pi^*(D_1 \cap D_2) + \pi^* (D_1 \cap D_2) =$$

$$= \pi^*(D_1) + \pi^*(CD_1) + \pi^*(D_2) + \pi^*(CD_2).$$

Además, siempre se cumple que:

$$\pi^*(D_1 \cup D_2) + \pi^*(D_1 \cap D_2) \leqslant \pi^*(D_1) + \pi^*(D_2)$$

y $\pi^* C(D_1 \cup D_2) + \pi^* C(D_1 \cap D_2) \leqslant \pi^*(CD_1) + \pi^*(CD_2)$

Finalmente:

$$\pi^*(D_1 \cup D_2) + \pi^*(D_1 \cap D_2) = \pi^*(D_1) + \pi^*(D_2).$$

l. LEMA. *π^* es una probabilidad funcional sobre $\mathcal{D}$.*

Demostración.

D_1) $\pi^*(X) = P(X) = 1$.

D_2) Por lema k.

D_3) Por definición de la clase $\mathcal{D}$.

D_4) Sean $D_1 \subset D_2 \subset \ldots . \subset D_n \subset \ldots .$ y $D'_1 \supset D'_2 \supset \ldots . \supset D'_n \supset \ldots$, en $\mathcal{D}$ tal que $\bigcup_n D_n \supset \bigcap_n D'_n$.

Dado que $D_n \uparrow \bigcup_n D_n$, entonces $\lim_n \pi^*(D_n) = \pi^*(\bigcup_n D_n)$.

Además $\bigcup_n D_n \supset \bigcap_n D'_n$ implica que $\pi^*(\bigcup_n D_n) \geqslant \pi^*(\bigcap_n D'_n)$, es decir, $\lim_n \pi^*(D_n) \geq \pi^*(\bigcap_n D'_n)$. (*)

Por otra parte $\bigcap_n D'_n \in \mathcal{D}$. Luego $C \bigcap_n D'_n = \bigcup_n CD'_n \uparrow \in \mathcal{D}$.

De aquí que $\pi^*(\bigcup_n CD'_n) = \lim_n \pi^*(CD'_n) = 1 - \lim_n \pi^*(D'_n)$.

Esto es $\lim_n \pi^*(D'_n) = 1 - \pi^*(\bigcup_n CD'_n) = \pi^*(\bigcap_n D'_n)$.

Finalmente, en (*): $\lim_n \pi^*(D_n) \geq \lim_n \pi^*(D'_n)$.

Además, en virtud de los Lemas j) y l), podemos afirmar que π^* es una probabilidad funcional completa sobre $\mathcal{D}$.

11. TEOREMA. *Sea $\mathcal{B}$ un álgebra difusa de $\mathcal{P}_D(X)$ y sea dada una probabilidad funcional* P *sobre ella. Entonces existe una única extensión a una probabilidad funcional* P' *sobre la σ-álgebra difusa $\mathcal{A}$ generada por $\mathcal{B}$.*

Demostración. Hagamos notar previamente que $\pi^* = \pi = P$ (sobre $\mathcal{B}$) y que $\pi^* = \pi$ (sobre $\mathcal{G}$).

Además, $\mathcal{B} \subset \mathcal{G} \subset \mathcal{A} \subset \mathcal{D} \subset \mathcal{P}_D(X)$. Consideremos la aplicación:

$$P': \mathcal{A} \longrightarrow [0,1]$$
$$A \longrightarrow \pi^*(A)$$

Vimos que π^* es una probabilidad funcional sobre $\mathcal{D}$. Esto implica que P' es una probabilidad funcional sobre $\mathcal{A}$. Por otra parte, es evidente que es extensión de P.

Resta por demostrar la unicidad de tal extensión P'.

Supongamos que exista otra probabilidad funcional $\mathcal{Q}$ sobre $\mathcal{A}$ que sea extensión de P.

En virtud del tema central de la referencia[9], la clase monótona generada por un álgebra de conjuntos difusos es idéntica a la σ-álgebra difusa generada por dicha álgebra. Este resultado permite dar una demostración de la unicidad de la extensión. En efecto, la clase de todos los conjuntos difusos A de la σ-álgebra generada tales que Q(A) = P'(A) es una clase monótona que contiene a $\mathcal{B}$. Por ello, P' es la única extensión a una probabilidad funcional de la probabilidad funcional P definida sobre $\mathcal{B}$.

m. COROLARIO. $P'^* = \pi^*$.

Demostración. En efecto, sea $D \in \mathcal{P}_D(X)$, arbitrario. Dado $\varepsilon > 0$,

existe $A' \supset D$, $A' \in \mathcal{A}$ tal que $P'(A') = \pi^*(A') < P'^*(D) + \varepsilon$.
Asimismo, existe $G \supset A'$, $G \in \mathcal{G}$, tal que
$\pi(G) < P'(A') + \varepsilon < P'^*(D) + 2\varepsilon$.
Pero $G \supset A' \supset D$ implica $\pi^*(D) \leqslant \pi(G)$. Por ello, $\pi^* \leqslant P'^*$.
La otra desigualdad es trivial, puesto que $\mathcal{G} \subset \mathcal{A}$.

n. COROLARIO. *El espacio de probabilidad funcional completo* $(X,\mathcal{D},\pi^*/\mathcal{D})$ *es el completado del espacio* $(X,\mathcal{A},P')$.

Demostración. Por corolario anterior y el Lema 5-e se tiene
$\mathcal{D} = \overline{\mathcal{A}}^{P'}$.
Además, por Corolario 5-g y Teorema 4-h , unido con el Corolario anterior, se tiene $\overline{P'} = \pi^*/\mathcal{D}$.

BIBLIOGRAFIA

[1] BIRKHOFF, GARRET, *Lattice Theory*, New York, 1940.

[2] BREIMAN, LEO, *Probability*, Addison Wesley Publishing Co., 1968.

[3] HALMOS, PAUL R., *Measure Theory*, 2nd.ed., Van Nostrand Co., 1950.

[4] LOEVE, MICHEL, *Probability Theory*, 2nd. ed., Van Nostrand, 1960.

[5] MEYER, PAUL A., *Probability and Potentials*, Blaisdell Publishing Co., 1966.

[6] NEVEU, JACQUES, *Bases mathématiques du Calcul des Probabilités*, Paris, Masson et Cie., 1964.

[7] RANKIN, BAYARD, *Computable Probability Spaces*, Acta Mathematica, 103, 1960.

[8] ZADEH, LOFTI A., *Fuzzy Sets*, *Information and Control 8*, 1965.

[9] BORGHI, OSVALDO, *Estructuras de clases formadas por conjuntos difusos*, Matemática y Física Teórica, Serie A, Vol. XX, 1970, de U.N. de Tucumán.

[10] BORGHI, OSVALDO, *Semi-álgebra difusa de conjuntos difusos*, Matemática y Física Teórica, Serie A, Vol.XX, 1970, U.N.de Tucumán.

NOTA. Dejo expreso reconocimiento a los Doctores N. Fava y W. Damköhler por sus atinadas sugerencias para el desarrollo del presente trabajo.

Fac.de Ciencias Físico-Químico-Matemáticas
de la Universidad Nacional de Cuyo.
San Luis, Argentina.

Recibido en noviembre de 1971.
Versión final mayo de 1972.