

SOBRE TEOREMAS DE COMPARACION DE JUEGOS DIFERENCIALES

Vera W. de Spinadel

RESUMEN. Recientemente, A.N.V. Rao ha obtenido notables resultados referentes a la comparación de juegos diferenciales. Para demostrar sus teoremas, Rao utiliza el concepto de estrategia dado por A. Friedman. La demostración no subsiste si se pretende utilizar estrategias clásicas de R. Isaacs, tipo "feedback". Sin embargo, agregando condiciones adicionales similares a las de L. Berkovitz, se mantiene la validez de las demostraciones.

1. INTRODUCCION. En una serie de trabajos, A.N.V. Rao [1] compara los valores de dos juegos diferenciales de duración prefijada. Dicha comparación es útil cuando se trata de aproximar un juego diferencial mediante otro más simple. En su tratamiento, Rao utiliza el concepto de juego diferencial tal como lo define Friedman [2], que se basa en el uso de transformaciones en espacios funcionales para aproximar y en el límite definir las estrategias.

Consideremos los siguientes dos juegos. El estado del primer juego está determinado por el sistema diferencial

$$\dot{x} = f_1(t, x, y_1, z_1) \quad x(t_0) = x_0 \quad (1.1)$$

donde $f_1 \in C[[t_0, T] \times R^n \times Y \times Z, R^n]$ (la notación $f \in C[A_1, A_2]$ indica que f es una transformación continua de A_1 en A_2), Y y Z son subconjuntos compactos de R^p y R^q , respectivamente. La función "pago" asociada con (1.1) es una funcional real

$$P_1 = \mu_{t_0}(x) + \int_{t_0}^T h(s, x(s), y_1(s), z_1(s)) ds \quad (1.2)$$

donde μ_{t_0} es una funcional real sobre las trayectorias $x(t)$ de (1.1).

El estado $u(t)$ del segundo juego está determinado por el sistema diferencial

$$\dot{u} = f_2(t, u, y_2, z_2) \quad u(t_0) = u_0 \quad (1.3)$$

donde $f_2 \in C[[t_0, T] \times R^n \times Y \times Z, R^n]$. La función "pago" asociada con (1.3) es

$$P_2 = \mu_{t_0}(u) + \int_{t_0}^T h(s, u(s), y_2(s), z_2(s)) ds \quad (1.4)$$

Ambos juegos comienzan para $t = t_0$ y terminan para $t = T$.

Las funciones medibles $y_1(t), z_1(t), y_2(t)$ y $z_2(t)$, definidas sobre Y y Z , son las funciones "control". Los jugadores, que llamaremos por simplicidad, y_1 y z_1 en el primer juego, actúan así: y_1 trata de maximizar el pago P_1 mientras que z_1 trata de minimizarlo. Lo mismo para los jugadores y_2 y z_2 del segundo juego.

Diremos que $x(t), (u(t))$ es una solución de (1.1) ((1.3)) si es absolutamente continua y satisface a (1.1) ((1.3)) en casi todo punto.

Sea $C[t_0, T]$ el espacio de Banach de funciones de variable compleja en $[t_0, T]$ con la norma del supremo. Sea $[C[t_0, T]]^n$ el producto de n espacios $C[t_0, T]$. Sea $X_{t_0, T}$ el subespacio de

$[C[t_0, T]]^n$ que consiste de todas las trayectorias de (1.1).

Análogamente se define $U_{t_0, T}$ con respecto a (1.3).

Supondremos además que valen las siguientes hipótesis para (1.1), (1.2):

(i) f_1 es continua en $(t, x, y_1, z_1) \in [t_0, T] \times R^n \times Y \times Z$;

(ii) para cada $t \in [t_0, T]$, $y_1 \in Y$, $z_1 \in Z$, $x, \bar{x} \in R^n$ con

$$|x|, |\bar{x}| < R,$$

$$|f_1(t, x, y_1, z_1) - f_1(t, \bar{x}, y_1, z_1)| \leq k_1(R) |x - \bar{x}|$$

donde R es un número real positivo y k_1 una constante que depende de R ;

(iii) para cada $t \in [t_0, T]$, $y_1 \in Y$, $z_1 \in Z$, $x \in R^n$

$$|f_1(t, x, y_1, z_1)| \leq k_2 |x| + k_3 \quad (k_2, k_3 \text{ constantes})$$

(iv) $\mu_{t_0}(x)$ es una funcional uniformemente continua en $X_{t_0, T}$

$$y h(t, x, y_1, z_1) \text{ es continua en } [t_0, T] \times R^n \times Y \times Z.$$

Hipótesis análogas valen para (1.3) y (1.4).

2. TEOREMAS DE RAO.

A. Friedman define el juego diferencial mediante una doble sucesión de aproximaciones discretas, denominadas "juego- δ superior" y "juego- δ inferior". En el límite $\delta \rightarrow 0$, estos juegos determinan un "Valor superior" V^+ y un "Valor inferior" V^- . Si éstos coinciden, el valor común se denomina "Valor" V del juego y corresponde intuitivamente a la solución óptima para ambos jugadores.

Usando las hipótesis enunciadas previamente y la estrategia de Friedman, Rao demuestra teoremas de comparación como el que sigue:

TEOREMA DE RAO. Sean los juegos (1.1), (1.2) y (1.3), (1.4) que satisfacen las condiciones (i)-(iv). Sea

$$|f(t, x, y, z) - f(t, u, y, z)| \leq g(t, |x - u|)$$

para todo $y \in Y$; $z \in Z$, donde g es continua en $[t_0, T] \times R^+$. Sea $r(t)$ la solución máxima de la ecuación diferencial

$$\dot{r} = g(t, r) \quad \text{con} \quad r(t_0) = x(t_0) - u(t_0).$$

Entonces es:

$$|V_1^+ - V_2^+| \leq \psi_1(r(T)) \quad , \quad |V_1^- - V_2^-| \leq \psi_2(r(T)),$$

donde $\psi_1(r)$ y $\psi_2(r) \rightarrow 0$ cuando $r \rightarrow 0$.

La demostración de este teorema, así como la de los teoremas que le siguen, no subsiste si se pretende utilizar estrategias clásicas de Isaacs [3], del tipo "feed-back". La razón es que en este caso, escribiendo los controles y y z como funciones del estado $x(t)$, las ecuaciones de ambos juegos diferenciales resultan:

$$\begin{cases} \dot{x} = f_1(t, x, y_1(t, x(t)), z_1(t, x(t))) & \text{con } x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (1.5)$$

$$\begin{cases} \dot{u} = f_2(t, u, y_2(t, u(t)), z_2(t, u(t))) & \text{con } u(t_0) = u_0 \end{cases} \quad (1.6)$$

y los controles y_1 , z_1 y los correspondientes y_2 , z_2 varían con las trayectorias. Esto parece indicar que este tipo de estrategias es excesivamente general.

Sin embargo, es posible mantener las demostraciones de Rao, especificando las estrategias clásicas tal como lo ha hecho Berkovitz [4]. Para ello, supondremos que las funciones $y_1 = \bar{y}_1(t, x(t))$, $z_1 = \bar{z}_1(t, x(t))$, $y_2 = \bar{y}_2(t, u(t))$, $z_2 = \bar{z}_2(t, u(t))$ son continuamente diferenciables a trozos y que la descomposición del espacio

(t, x) inducida por las superficies de discontinuidad de $\bar{y}_1$ y $\bar{z}_1$, $\bar{y}_2$ y $\bar{z}_2$, tiene ciertas propiedades de regularidad que se especifican en el párrafo siguiente.

3. DESCOMPOSICION REGULAR.

DEFINICION. Llamaremos "descomposición regular de una región R" a la que cumple con las siguientes condiciones:

La región R en la cual se produce el juego es la unión finita

$$R = \left(\bigcup_{i=1}^k R_i \right) \cup N_{i_1, \dots, i_k}$$

donde las R_i son subregiones cubiertas simplemente por trayectorias óptimas y cada $N_{i_1, \dots, i_k}$ es una superficie de dimensión

$\leq n$ tal que $N_{i_1, \dots, i_k} = (\bar{R}_{i_1} \cap \dots \cap \bar{R}_{i_k}) \cap \bar{R}$.

De cada punto de $N_{i_1, \dots, i_k}$ sólo puede emanar una trayectoria que sigue hacia el interior de una de las dos regiones R_{i_j} ($j=1, \dots, k$).

Además, cada R_i es la unión de subregiones R_{ij} ($j = 1, \dots, j_i$) en

las cuales las funciones $y_1 = \bar{y}_1(t, x(t))$, $z_1 = \bar{z}_1(t, x(t))$,

$y_2 = \bar{y}_2(t, u(t))$, $z_2 = \bar{z}_2(t, u(t))$ son continuamente diferenciables.

Si ponemos $M_{ij} = (R_{ij} \cap R_{i, j+1}) \cap R$ ($j = 1, \dots, j_i - 1$)

cada superficie M_{ij} de dimensión n divide a R_i , quedando las superficies M_{ij} a distancia positiva una de otra. Supondremos además que en cada R_i , las trayectorias óptimas no son tangentes a las superficies M_{ij} , las que llamaremos *superficies de discontinuidad*.

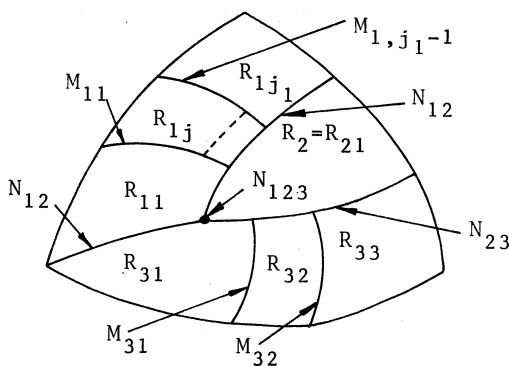


FIGURA 1: Descomposición regular de una región.

4. TEOREMA.

Sean los juegos diferenciales (1.5) y (1.6) con sus respectivas funcionales "pago":

$$\begin{cases} P_1 = u_{t_0}(x) + \int_{t_0}^T h(s, x(s), y_1(s, x(s)), z_1(s, x(s))) ds & (1.7) \\ P_2 = u_{t_0}(u) + \int_{t_0}^T h(s, u(s), y_2(s, u(s)), z_2(s, u(s))) ds & (1.8) \end{cases}$$

que satisfacen las condiciones (i) a (iv) y la condición adicional:

(v) f_2 es lipschitziana respecto a y y a z , vale decir:

$$|f_2(t, x, y, z) - f_2(t, u, y^*, z)| \leq k_1 |y - y^*|,$$

$$|f_2(t, x, y, z) - f_2(t, u, y, z^*)| \leq k_2 |z - z^*|,$$

en una región R que admite una descomposición regular.

Sea además:

$$|f_1(t, x, y, z) - f_2(t, u, y, z)| \leq g(t, |x - u|),$$

para todo $y \in Y$, $z \in Z$ donde g es una función continua en

$[t_0, T] \times \mathbb{R}^+$. Sea $g^*(t, |x - u|) = g(t, |x - u|) + k |x - u|$.

Sea $r(t)$ la solución máxima de la ecuación diferencial:

$$\dot{r} = g^*(t, r) \quad \text{con} \quad r(t_0) = |x(t_0) - u(t_0)|.$$

Entonces es:

$$|V_1^+ - V_2^+| \leq \psi_1(r(T))$$

$$|V_1^- - V_2^-| \leq \psi_2(r(T)),$$

donde las funciones $\psi_1(r)$ y $\psi_2(r) \rightarrow 0$ cuando $r \rightarrow 0$.

Demostración. Dentro de cada R_{ij} podemos escribir:

$$\begin{aligned} & |f_1(t, x, \bar{y}(t, x(t)), \bar{z}(t, x(t))) - f_2(t, u(t), \bar{y}(t, u(t)), \bar{z}(t, u(t)))| = \\ & = |f_1(t, x(t), \bar{y}(t, x(t)), \bar{z}(t, x(t))) - f_2(t, u(t), \bar{y}(t, x(t)), \bar{z}(t, x(t)))| + \\ & + |f_2(t, u(t), \bar{y}(t, x(t)), \bar{z}(t, x(t))) - f_2(t, u(t), \bar{y}(t, u(t)), \bar{z}(t, u(t)))| \leq \\ & \leq g(t, |x - u|) + |f_2(t, u(t), \bar{y}(t, x(t)), \bar{z}(t, x(t))) - \\ & - f_2(t, u(t), \bar{y}(t, u(t)), \bar{z}(t, u(t)))|. \end{aligned}$$

Con respecto al segundo sumando, por ser f_2 lipschitziana respecto a los controles y y z , por hipótesis, podemos poner:

$$\begin{aligned} & = g(t, |x - u|) + |f_2(t, u(t), \bar{y}(t, x(t)), \bar{z}(t, x(t))) + \\ & + f_2(t, u(t), \bar{y}(t, x(t)), \bar{z}(t, u(t))) - f_2(t, u, \bar{y}(t, x(t)), \bar{z}(t, u(t))) - \\ & - f_2(t, u, \bar{y}(t, u(t)), \bar{z}(t, u(t)))| \leq g(t, |x - u|) + k_1 |y - y^*| + \\ & + k_2 |z - z^*|, \text{ donde } y^* = \bar{y}(t, u(t)); z^* = \bar{z}(t, u(t)). \end{aligned}$$

Como los controles y y z son funciones continuamente diferenciables, cumplen la condición de Lipschitz:

$$|y - y^*| \leq k_3 |x - u| \quad ; \quad |z - z^*| \leq k_4 |x - u|,$$

de manera que finalmente resulta:

$$\begin{aligned} & |f_1(t, x, \bar{y}(t, x(t)), \bar{z}(t, x(t))) - f_2(t, u, \bar{y}(t, u(t)), \bar{z}(t, u(t)))| \leq \\ & \leq g(t, |x - u|) + k |x - u|. \end{aligned}$$

En consecuencia, dentro de cada subregión R_{ij} vale la demostración del teorema de Rao tomando como $r(t)$ la solución máxima de la ecuación diferencial:

$$\dot{r} = g^*(t, r) \quad \text{con} \quad r(t_0) = |x(t_0) - u(t_0)|.$$

En cada superficie de discontinuidad M_{ij} , demostraremos que $r(t)$ podrá tener una discontinuidad que a lo sumo será una multiplicación por un factor acotado. De esto resultará que si $r(t)$ tiende

a cero antes del cruce de la superficie M_{ij} , también tenderá a cero después del cruce (y será un infinitésimo del mismo orden).

En efecto, hemos supuesto que la trayectoria incidente sobre la superficie de discontinuidad forma con ésta un ángulo α no nulo (Figura 2). Como la velocidad con que es descripta la trayectoria es finita, resulta que cuando $r(t) \rightarrow 0$, lo mismo sucede con la distancia $\overline{P_0 P'_0}$ y también la diferencia de los valores de t correspondientes a P_0 y P'_0 tiende a cero. Por lo tanto, las condiciones iniciales para ambas trayectorias en la siguiente región sólo diferirán en un infinitésimo y las trayectorias seguirán siendo próximas entre sí.

Lo mismo sucede en cada paso por una superficie de discontinuidad y hemos supuesto que toda trayectoria óptima sólo posee un número finito de tales intersecciones. Hemos así demostrado que las trayectorias óptimas permanecen próximas entre sí. La distancia entre ellas puede acotarse por la función $r(t)$ que entonces podrá presentar discontinuidades como indica la Figura 3. Los correspondientes saltos pueden estimarse numéricamente en función de los ángulos α y las correspondientes velocidades.

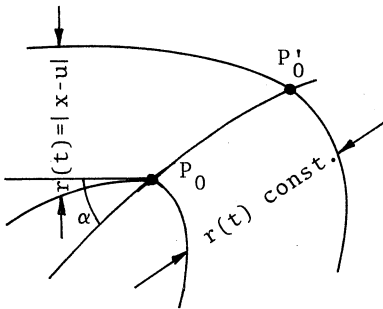


FIGURA 2

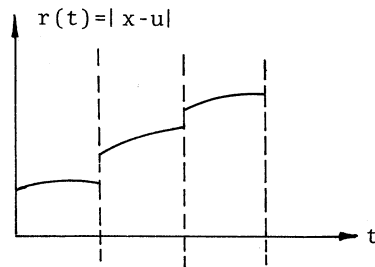


FIGURA 3

NOTA. Condiciones similares a las que hemos utilizado, también han sido impuestas por Friedman en la superficie terminal de juegos de duración no prefijada.

Es preciso mencionar que el grave inconveniente de las estrategias del tipo Berkovitz es que se hace depender la admisibilidad de una estrategia $y(t, x(t))$ de las trayectorias solución $x(t)$, vale decir, de la probable estrategia opuesta $z(t, x(t))$.

BIBLIOGRAFIA

- [1] A.N.V. RAO, Trabajo de tesis presentado al Departamento de Matemática de la Universidad de Rhode Island, Kingston, R.I., 02881.
- [2] A. FRIEDMAN, *On the definition of differential games and the existence of Value and saddle points*, J. Diff. Equations, 7 (1970), pp. 69-91.
- [3] RUFUS ISAACS, *Differential Games*, John Wiley & Sons, Nueva York, 1965.
- [4] L. D. BERKOVITZ, *Necessary conditions for optimal strategies in a class of differential games and control problems*, SIAM J. Control, 5 (1967), pp. 1-24.

Departamento de Matemática,
Fac. de Ciencias Exactas, Universidad de
Buenos Aires. Argentina.

Recibido en abril de 1972.

Versión final junio de 1972.