Revista de la
Unión Matemática Argentina
Volumen 26, 1972.

SISTEMA AXIOMATICO PARA OPERADORES DE CAPSULA CONVEXA

por Juan Carlos Bressan

1. INTRODUCCION. Consideraremos un sistema axiomático independiente y no categórico para operadores de cápsula convexa basado en un trabajo de Ellis [1]. Muchas de sus definiciones y teoremas se obtienen por analogía con la teoría de la convexidad en espacios vectoriales; de esta forma, pueden deducirse en este sistema algunos de los resultados dados por Hammer [2]. Finalmente obtenemos un sistema axiomático para operadores de bandas equivalente al antes estudiado; sus axiomas son teoremas de la teoría axiomática para segmentos de Voiculescu [5].

Deseo expresar mi agradecimiento al Dr. Fausto A. Toranzos por haberme dirigido y asesorado en la realización de este trabajo.

2. NOTACION Y AXIOMAS.

Sean X un conjunto tal que card $X \geqslant 2$, P(X) la familia de todos los subconjuntos de X, $K:P(X) \longrightarrow P(X)$ una función que llamaremos *operador de cápsula convexa*. Si $\{a_1,\dots,a_n\} \subset X$, $K(\{a_1,\dots,a_n\})$ se escribirá $K(a_1,\dots,a_n)$. Dado $\{a,b\} \subset X$, diremos que K(a,b) es la *banda* determinada por a,b.

La función K debe cumplir los siguientes axiomas:

(Ax 1) $A \subset X \Rightarrow K(K(A)) \subset K(A)$.

(Ax 2) $A \subset X \Rightarrow K(A) = \cup\{K(F)/F$ finito y $F \subset A\}$.

(Ax 3) $a \in X \Rightarrow K(a) = \{a\}$.

(Ax 4) $\phi \neq F \subset X$, F finito y $p \in X \Rightarrow K(F \cup \{p\}) \subset \cup\{K(a,p)/a \in K(F)\}$.

(Ax 5) $a \in K(b,p)$ y $c \in K(d,p) \Rightarrow K(a,d) \cap K(b,c) \neq \phi$.

Dado $A \subset X$, K(A) se llamará la *cápsula convexa* de A. Diremos que

A es *convexo* si $A = K(A)$

Los axiomas precedentes son propiedades de la cápsula convexa usual en espacios vectoriales sobre cuerpos ordenados; en consecuencia, el sistema axiomático que definimos es consistente y no categórico. Otros modelos de este sistema son:

i. X subconjunto convexo de un espacio vectorial V sobre un cuerpo ordenado; para $A \subset X$, $K(A) = \operatorname{conv} A$ donde $\operatorname{conv} A$ es la cápsula convexa usual de A en V.

ii. X un conjunto tal que card $X \geqslant 2$, para $A \subset X$, $K(A) = A$.

iii. Sean X el plano euclidiano, $|xy|$ la longitud del segmento xy, s un punto de X. Dados $a,b \in X$, $d_s(a,b) = |ab|$ si a,b,s están alineados y $d_s(a,b) = |as| + |sb|$ si a,b,s no están alineados; (X,d_s) es un espacio métrico; para $A \subset X$, definimos $K(A)$ igual a la cápsula convexa de A en la métrica d_s (la definición de cápsula convexa en una métrica se encuentra en Toranzos [3]). Se ve fácilmente que las bandas definidas por K cumplen (P 1) a (P 4) del parágrafo 6, en consecuencia K cumple (Ax 1) a (Ax 5).

El sistema axiomático considerado es una particularización del dado por Ellis en [1], tomando en lugar de dos operadores un solo operador K y pidiendo que para todo $a \in X$ $K(a) = \{a\}$ lo cual no se deduce en el sistema axiomático dado en [1], pero permite obtener $K(\phi) = \phi$ y algunos resultados sobre semiespacios. Si se considera un único operador K, los axiomas 1 y 2 de [1] resultan de (4.1) i y ii respectivamente, mientras que los axiomas 3, 4 y 5 de [1] son respectivamente (Ax 2), (Ax 4) y (Ax 5).

3. INDEPENDENCIA DE LOS AXIOMAS.

Veremos que cualquiera de los axiomas precedentes es independiente de los otros hallando, para cada axioma, un conjunto X tal que car $X \geqslant 2$ y una función $K:P(X) \longrightarrow P(X)$ que no verifique dicho axioma pero cumpla todos los restantes; en cada caso tendremos que definir $K(A)$ para todo $A \subset X$. Los ejemplos i a v dados a continuación prueban la independencia de (Ax 1) a (Ax 5) respectivamente.

i. X espacio vectorial real tal que $\dim X \geqslant 2$, $K(A) = \cup\{[a,b] / a \in A \text{ y } b \in A\}$ donde $[a,b]$ es el segmento cerrado de extremos a,b.

ii. X el conjunto R de todos los números reales, $K(A) = \overline{A}$ donde $\overline{A}$ es la clausura de A en la topología usual de R.

iii. X conjunto tal que card $X \geqslant 2$, $K(A) = X$.

iv. X conjunto tal que card $X \geqslant 4$, $K(A) = A$ si card $A \leqslant 2$ y $K(A) = X$ si card $A > 2$.

v. $X = [b,p] \cup [d,p]$ donde b,p,d son tres puntos no alineados de R^2, $K(A) = X \cap \text{conv } A$ donde conv A es la cápsula convexa usual de A en R^2.

4. CONSECUENCIAS DE LOS CUATRO PRIMEROS AXIOMAS.

Muchas de las propiedades de K se deducen de los cuatro primeros axiomas.

(4.1) *Sean* A,B *subconjuntos de* X. *Entonces:* i. $A \subset K(A)$; ii. $K(K(A)) = K(A)$; iii. $A \subset B \Rightarrow K(A) \subset K(B)$; iv. $K(X) = X$; v. $K(\phi) = \phi$.

Demostración. i. Es consecuencia de (Ax 2) y (Ax 3). ii. Se deduce de i y de (Ax 1). iii. Se aplica (Ax 2). iv. Es trivial. v. Sea $\{a,b\} \subset X$ y $a \neq b$; por iii y (Ax 3) resulta $K(\phi) \subset K(a) \cap K(b) = \phi$.

El resultado dado en (4.1) iii se encuentra en [1], 4.1, (b).

(4.2) *Si* $A \subset X$, *los siguientes enunciados son equivalentes:* i. $K(A) = A$; ii. $\{a,b\} \subset A \Rightarrow K(a,b) \subset A$.

Demostración. i $\Rightarrow$ ii. Resulta inmediatamente de (4.1) iii. ii $\Rightarrow$ i. Supongamos que se verifica ii. Por (4.1) i y (Ax 2), alcanza con ver que F finito y $F \subset A \Rightarrow K(F) \subset A$. Dicha prueba se hace por inducción sobre j = card F, utilizando (Ax 4).

De la analogía entre la proposición (4.2) y la definición usual de convexo en espacios vectoriales sobre cuerpos ordenados, resulta la siguiente proposición:

(4.3) i. *La intersección de cualquier familia de subconjuntos convexos de* X *es un subconjunto convexo de* X. ii. *La unión de cualquier cadena de subconjuntos convexos de* X *es un subconjunto convexo de* X.

(4.4) *Si* $A \subset X$, $K(A)$ *es la intersección de la familia de los subconjuntos convexos de* X *que incluyen a* A.

Demostración. Es consecuencia de los tres primeros enunciados de (4.1).

Por esta proposición, $K(A)$ es elemento minimal de la familia de los subconjuntos convexos de X que incluyen a A.

Observemos que, por (4.2) y (4.4), el operador de cápsula convexa K queda determinado por la familia de todas las bandas $K(a,b)$ con $a,b \in X$. Sea $A \subset X$, veamos cómo se expresa $K(A)$ utilizando las bandas $K(a,b)$. Definimos $C(A) = \cup\{K(a,b)/a,b \in A\}$. Muchas de las propiedades de C coinciden con las de K.

(4.5) i. $A \subset C(A)$; ii. $C(A) \subset C(C(A))$; iii. $A \subset B \subset X \Rightarrow C(A) \subset$ $\subset C(B)$; iv. $C(X) = X$; v. $C(\phi) = \phi$.

Sin embargo es fácil ver que $C(A)$ puede no ser convexo. Como consecuencia de (4.2) se obtiene:

(4.6) A *es convexo si y sólo si* $A = C(A)$.

Definamos inductivamente $C^n(A)$ por: i. $C^o(A) = A$.
ii. $C^{j+1}(A) = C(C^j(A))$. Por (4.5) i y ii, la sucesión de los $C^n(A)$ es creciente.

(4.7) $K(A) = \cup\{C^n(A)/n \geqslant 0\}$.

Demostración. Es análoga a la dada en [3], (1.2) para la convexidad en una métrica.

Las proposiciones (4.1) y (4.3) permiten obtener en forma inmediata:

(4.8) i. *Si* $\{A_j/j \in J\}$ *es una familia de subconjuntos de* X, *entonces* $K(\cap\{A_j/j \in J\}) \subset \cap\{K(A_j)/j \in J\}$.
ii. *Si* $\{A_j/j \in J\}$ *es una cadena de subconjuntos de* X, *entonces* $K(\cup\{A_j/j \in J\}) = \cup\{K(A_j)/j \in J\}$.

Una demostración de (4.8) ii aplicando (4.1) iii y (Ax 2), se encuentra en [1], 4.2.

Sean $A,B \subset X$; definimos $S(A,B) = \cup\{K(a,b)/a \in A \text{ y } b \in B\}$. Trivialmente se deducen las siguientes propiedades de S:

(4.9) i. $S(A,A) = C(A)$; ii. $S(A,B) = S(B,A) \subset K(A \cup B)$.
iii. $A_1 \subset A$ y $B_1 \subset B \Rightarrow S(A_1,B_1) \subset S(A,B)$.
iv. $A \neq \phi \neq B \Rightarrow A \cup B \subset S(A,B)$; v. $S(A,\phi) = \phi$.
vi. $A \neq \phi \Rightarrow S(A,X) = X$.

(4.10) $\{a,b,c,d\} \subset X \Rightarrow K(a,b,c,d) = S(K(a,b),K(c,d))$.

Demostración. Sean a,b,c,d elementos de X, no necesariamente distintos dos a dos. Inmediatamente obtenemos que $S(K(a,b),K(c,d)) \subset$ $\subset K(a,b,c,d)$.
Consideremos ahora $x \in K(a,b,c,d)$. Por (Ax 4), existe $p \in K(a,b,c)$ tal que $x \in K(p,d)$. Análogamente, existe $q \in K(a,b)$ tal que $p \in K(q,c)$. Como $K(p,d) \subset K(q,c,d)$, resulta $x \in K(q,c,d)$ y aplicando nuevamente (Ax 4), existe $r \in K(c,d)$ tal que $x \in K(q,r)$. Así, $x \in S(K(a,b),K(c,d))$.

(4.11) *Si* A,B *son subconjuntos no vacíos de* X, $K(A \cup B) =$ $= S(K(A),K(B))$.

Demostración. Sea $M = S(K(A),K(B))$; por (4.10), M resulta convexo; como $A \cup B \subset M \subset K(A \cup B)$, es $K(A \cup B) = M$.

Como corolario de (4.11), obtenemos la siguiente generalización de (Ax 4) (enunciada análogamente en [1], 4.3):

(4.12) $\phi \neq A \subset X$ *y* $p \in X \Rightarrow K(A \cup \{p\}) = \cup \{K(a,p)/a \in K(A)\}$.

La proposición (4.11) permite demostrar:

(4.13) *Si* $A_1,\ldots,A_n$ *son subconjuntos no vacíos de* X,
$K(A_1\cup\ldots\cup A_n) = \cup \{K(a_1,\ldots,a_n)/a_i \in K(A_i)$ *para* $1 \leqslant i \leqslant n\}$.

Demostración. Se aplica inducción sobre n.

(4.14) *Sea* $\mathcal{A}$ *una familia de subconjuntos de* X *y* $A = \cup \mathcal{A}$. *Definimos una familia* $\mathcal{F}$ *por* $F \in \mathcal{F}$ *sii existe* $\{A_1,\ldots,A_n\}$ *subfamilia fi-*

nita de $\mathcal{A}$ *tal que* $F \subset K(A_1) \cup \ldots \cup K(A_n)$ *y* card $(K(A_j) \cap F) \leqslant 1$ *para* $1 \leqslant j \leqslant n$. *Entonces* $K(A) = \cup\{K(F)/F \in \mathcal{F}\}$.

Demostración. Obviamente $\cup\{K(F)/F \in \mathcal{F}\} \subset K(A)$. Sea $x \in K(A)$, por (Ax 2) y (4.1) iii, existe $\{A_1,\ldots,A_n\}$ subfamilia finita de $\mathcal{A}$ tal que $x \in K(A_1 \cup \ldots \cup A_n)$. Dicha subfamilia puede tomarse minimal, o sea, de tal forma que si $j \in \{1,\ldots,n\}$, $x \notin K(\cup\{A_i/1 \leqslant i \leqslant n,\ i \neq j\})$. Por (4.13) existen $a_1 \in K(A_1),\ldots,a_n \in K(A_n)$ tales que $x \in K(a_1,\ldots,a_n)$.
Sea $F_0 = \{a_1,\ldots,a_n\}$; por la minimalidad de $\{A_1,\ldots,A_n\}$, $F_0 \in \mathcal{F}$ y en consecuencia $x \in \cup\{K(F)/F \in \mathcal{F}\}$.

Como corolarios inmediatos de (4.14), obtenemos las dos proposiciones siguientes:

(4.15) *Sea* $\{A_i/i \in I\}$ *una familia de subconjuntos de* X, $A = \cup\{A_i/i \in I\}$ *y* $\tilde{A} = \cup\{K(A_i/i \in I\}$. *Si* $\{K(A_i)/i \in I\}$ *es una familia de subconjuntos disjuntos dos a dos, entonces* $K(A) = \cup\{K(F)/F \text{ finito}, F \subset \tilde{A} \text{ y card } (K(A_i) \cap F) \leqslant 1 \text{ para } i \in I\}$.

(4.16) *Sea* $\{A_i/i \in I\}$ *una familia de subconjuntos no vacíos de* X, *entonces* $K(\cup\{A_i/i \in I\}) = \cup\{K(\{a_i/i \in I\})/a_i \in K(A_i) \text{ para } i \in I\}$.

Por (4.7) sabemos que si $A \subset X$, $K(A) = \cup\{C^n(A)/n \geqslant 0\}$. Ahora veremos que bajo ciertas condiciones, existe $i \geqslant 0$ tal que $K(A) = C^i(A)$ y en consecuencia, para todo $j \geqslant i$, $K(A) = C^j(A)$.

(4.17) *Sea* A *un subconjunto finito de* X, i *un entero no negativo tal que* card $A \leqslant 2^i$. *Entonces* $K(A) = C^i(A)$.

Demostración. Se aplica inducción sobre i. Para $i = 0$ es trivial Supongamos que vale (4.17) para $i = j \geqslant 0$. Sea $A \subset X$ y card $A = m \leqslant 2^{j+1}$. Si $m > 2^j$, existe una partición $\{A_1,A_2\}$ de A tal que máx $\{\text{card } A_1, \text{card } A_2\} \leqslant 2^j$. Luego por (4.11) y la hipótesis inductiva, $K(A) = S(C^j(A_1),C^j(A_2)) \subset C^{j+1}(A)$, o sea, $K(A) = C^{j+1}(A)$.

Sea $A \subset X$; diremos que A verifica la *condición de Caratheodory n-dimensional* $(n \geq 0)$, o que A cumple (C_n) si

$$K(A) = \cup\{K(F)/\text{card } F \leq n+1 \text{ y } F \subset A\}.$$

(4.18) *Si* A *cumple* (C_n), *sea* i *un entero tal que* $n+1 \leq 2^i$; *entonces* $K(A) = C^i(A)$.

Demostración. Por hipótesis y (4.17), obtenemos que $K(A) = \cup\{C^i(F)/\text{card } F \leq n+1 \text{ y } F \subset A\} \subset C^i(A)$, de donde $K(A) = C^i(A)$.

Una demostración de (4.18) para X espacio vectorial real, se encuentra en [4], teorema 1.24.

5. SEMIESPACIOS Y PUNTOS EXTREMALES.

En este parágrafo, por analogía con la convexidad usual en espacios vectoriales sobre cuerpos ordenados, introduciremos los semiespacios y caracterizaremos los puntos extremales de un convexo.

(5.1) *Si* A,B *son subconjuntos convexos de* X *disjuntos, entonces existen* C,D *convexos complementarios tales que* $A \subset C$ *y* $B \subset D$.

Esta proposición es el teorema 3.1 de [1], tomando en lugar de dos operadores un solo operador K.

Diremos que S es *semiespacio* si S y X-S son subconjuntos convexos no vacíos de X. Evidentemente S es semiespacio sii X-S es semiespacio. Si $A \subset X$ y S es semiespacio entonces $A \subset S$ sii $K(A) \subset S$. Dados $A,B \subset X$, diremos que los semiespacios complementarios S_1, S_2 *separan* A,B si $A \subset S_1$ y $B \subset S_2$ o si $A \subset S_2$ y $B \subset S_1$. De (5.1) obtenemos:

(5.2) *Si* A,B *son subconjuntos convexos no vacíos de* X *disjuntos, entonces existen* S_1,S_2 *semiespacios complementarios que separan* A,B.

Como card $X \geq 2$ y los subconjuntos unitarios son convexos, (5.2) nos asegura la existencia de semiespacios y la siguiente proposición:

(5.3) *Si* $A \subset X$ *y* $x \in X\text{-}K(A)$, *entonces existe* S *semiespacio tal que* $K(A) \subset S$ *y* $x \notin S$.

(5.4) $A \subset X \Rightarrow K(A) = \cap\{S/S$ semiespacio y $A \subset S\}$.

Demostración. Se aplica (5.3).

Entre los semiespacios que incluyen a un subconjunto A de X, donde $\phi \neq K(A) \neq X$, resulta interesante considerar aquéllos que son minimales, o sea, los semiespacios S tales que $A \subset S$ y si S_1 es semiespacio y $A \subset S_1 \subset S$ entonces $S_1 = S$. En nuestro sistema axiomático, estos semiespacios desempeñan un papel análogo al de los semiespacios que incluyen a A determinados por hiperplanos de apoyo de dicho subconjunto, en la teoría de la convexidad usual en un espacio vectorial X sobre un cuerpo ordenado.

(5.5) *Si* A *es un subconjunto no vacío de* X *y* S_1 *es semiespacio que incluye a* A, *entonces* $S \subset S_1$ *tal que* S *es semiespacio minimal que incluye a* A.

Demostración. Resulta inmediata por el principio minimal para familias de conjuntos.

Como consecuencia de (5.4) y (5.5) obtenemos:

(5.6) $\phi \neq A \subset X \Rightarrow K(A) = \cap\{S/S$ semiespacio minimal que incluye a $A\}$.

Sea $p \in X$, diremos que S_p es *semiespacio de vértice* p si es un subconjunto convexo maximal de $X\text{-}\{p\}$; esta noción fue introducida por Hammer [2] para espacios vectoriales reales. Veremos que los semiespacios con vértice son semiespacios. La relación entre puntos extremales y semiespacios con vértice, ya mencionada en [2], aparece en (5.11). Finalmente, (5.12) es el teorema 5 de [2]; la demostración dada por Hammer también vale en nuestro sistema axiomático.

(5.7) *Si* $p \in X$ *y* S_p *es semiespacio de vértice* p, *entonces* S_p *es semiespacio.*

Demostración. Por (5.3) existe S semiespacio tal que $S_p \subset S$ y $p \notin S$; por la maximalidad de S_p es $S_p = S$; así S_p es semiespacio.

(5.8) *Si* $p \in X$ *y* $S_p \subset X$, *los siguientes enunciados son equivalentes:* i. S_p *es semiespacio de vértice* p. ii. $X-S_p$ *es semiespacio minimal que incluye a* $\{p\}$. iii. S_p *es un subconjunto convexo de* $X-\{p\}$ *tal que para todo* $x \in X-S_p$ *existe* $y \in S_p$ *de forma que* $p \in K(x,y)$.

Demostración. i $\Rightarrow$ ii. Por (5.7), S_p es semiespacio, luego $X-S_p$ es semiespacio que incluye a $\{p\}$; la minimalidad se obtiene en forma rutinaria.
ii $\Rightarrow$ iii. Trivialmente, S_p es subconjunto convexo de $X-\{p\}$. Sea $x \in X-S_p$; de suponer que $p \notin K(S_p \cup \{x\})$, por (5.2) resulta que no vale ii. Así $p \in K(S_p \cup \{x\})$ y por (4.12) existe $y \in S_p$ tal que $p \in K(x,y)$.
iii $\Rightarrow$ i. Si $x \in X-S_p$, existe $y \in S_p$ tal que $p \in K(x,y)$; en consecuencia $p \in K(S_p \cup \{x\})$. Luego S_p es subconjunto convexo maximal de $X-\{p\}$.

(5.9) *Si* $A \subset X$ *y* $p \in X-K(A)$, *entonces existe* S_p *semiespacio de v vértice* p *tal que* $K(A) \subset S_p$.

Demostración. Se aplica el lema de Zorn.

Como corolario de (5.9) resulta que para todo $p \in X$, existe S_p semiespacio de vértice p.

(5.10) $A \subset X \Rightarrow K(A) = \cap\{S/A \subset S$ y para algún $p \in X$, S es semiespacio de vértice $p\}$.

Demostración. Se aplica (5.9).

Diremos que una familia $\mathcal{B}$ de subconjuntos convexos de X es *base de convexos* si para todo A subconjunto convexo de X, existe $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}$ tal que $A = \cap \mathcal{B}_1$. Las proposiciones (5.4) y (5.10) aseguran que tanto la familia $\mathcal{S}$ de todos los semiespacios, como la $\mathcal{S}_v$ de los semiespacios con vértice son bases de convexos. Esta última base es mínima, o sea, si $\mathcal{B}$ es base de convexos entonces $\mathcal{S}_v \subset \mathcal{B}$.

Sea $x \in A$, donde A es subconjunto convexo de X; diremos que x es *punto extremal* de A si $y,z \in A$ implica $x \notin K(y,z)-\{y,z\}$. Denotaremos con ex A al conjunto de los puntos extremales de A.

(5.11) *Sea* A *subconjunto convexo de* X *y* $x \in A$. *Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:* i. $x \in$ ex A ; ii. $A-\{x\}$ *es convexo*; iii. $x \notin K(A-\{x\})$; iv. *existe* S_x *semiespacio de vértice* x *tal que* $A-\{x\} \subset S_x$.

Demostración. En forma inmediata se prueba que i $\Rightarrow$ ii, ii $\Rightarrow$ iii, iii $\Rightarrow$ i, iii $\Longleftrightarrow$ iv.

(5.12) *Si* A *es subconjunto convexo de* X, *los siguientes enunciados son equivalentes:* i. $A = K(\text{ex } A)$; ii. $x \in A$ *y* S_x *semiespacio de vértice* $x \Rightarrow (X-S_x) \cap \text{ex } A \neq \phi$.

6. SISTEMA AXIOMATICO PARA OPERADORES DE BANDAS.

Consideraremos un nuevo sistema axiomático. Sean X un conjunto tal que card $X \geqslant 2$, $B:X\times X \longrightarrow P(X)$ una función que llamaremos *operador de banda* y que satisface los siguientes axiomas:

(P 1) $\{a,b\} \subset B(a,b)$.

(P 2) $B(a,a) \subset \{a\}$.

(P 3) Si $a_1 \in B(a,p)$, $b_1 \in B(b,p)$ y $x_1 \in B(a_1,b_1)$, entonces existe $x \in B(a,b)$ tal que $x_1 \in B(x,p)$.

(P 4) $a \in B(b,p)$, $c \in B(d,p) \Rightarrow B(a,d) \cap B(b,c) \neq \phi$.

Los axiomas que cumple B son propiedades de las bandas $K(a,b)$ del sistema axiomático definido en el parágrafo 2. En efecto, (P 1), (P 2) y (P 4) son consecuencias de (4.1) i, (Ax 3) y (Ax 5) respectivamente. Finalmente, si $a_1 \in K(a,p)$, $b_1 \in K(b,p)$ y $x_1 \in K(a_1,b_1)$, por (4.1) ii y iii $x_1 \in K(a,b,p)$; así, por (Ax 4) existe $x \in K(a,b)$ tal que $x_1 \in K(x,p)$.

Ahora, a partir de B, obtendremos una función $K:P(X) \longrightarrow P(X)$ que cumplirá (Ax 1) a (Ax 5). Sea $A \subset X$, definimos $C(A) = \cup\{B(a,b)/ a,b \in A\}$; $C^n(A)$ inductivamente por $C^0(A) = A$, $C^{j+1}(A) = C(C^j(A))$;

$K(A) = \cup\{C^n(A)/n \geqslant 0\}$. Siguiendo la misma notación del parágrafo 2, $K(\{a_1,\ldots,a_n\})$ se escribirá $K(a_1,\ldots,a_n)$. Las cuatro proposiciones siguientes pueden demostrarse en forma inmediata:

(6.1) *Si* A, A_1 *son subconjuntos de* X *y* $n \geqslant 0$, *entonces:*
i. $A \subset C^n(A) \subset C^{n+1}(A) \subset K(A)$; ii. $C^n(A) = C^{n+1}(A) \Longleftrightarrow C^n(A) = K(A)$;
iii. $A_1 \subset A \Rightarrow C^n(A_1) \subset C^n(A)$ *y* $K(A_1) \subset K(A)$.

(6.2) $c,d \in B(a,b) \Rightarrow B(c,d) \subset B(a,b)$.

(6.3) $K(a,b) = B(a,b)$.

(6.4) *Sea* $A \subset X$, *entonces son equivalentes:*
i. $A = K(A)$; ii. $A = C(A)$; iii. $\{a,b\} \subset A \Rightarrow K(a,b) \subset A$.

(6.5) *Si* $x \in C^n(A)$, *entonces existe* F *finito y* $F \subset A$ *tal que* $x \in C^n(F)$.

Demostración. Trivialmente, (6.5) es válida si $n = 0$. Supongamos que también vale para $n = j \geqslant 0$; sea $x \in C^{j+1}(A)$, luego $x \in K(a,b)$ donde $a,b \in C^j(A)$. Sean F_1,F_2 subconjuntos finitos de A tales que $a \in C^j(F_1)$;y $b \in C^j(F_2)$; así $x \in C^{j+1}(F_1 \cup F_2)$.

(6.6) K *cumple* (Ax 1) *a* (Ax 5).

Demostración. Sea $A \subset X$; dados $a,b \in K(A)$ puede probarse que $K(a,b) \subset K(A)$; así por (6.4) $K(A) = K(K(A))$; en consecuencia, K cumple (Ax 1). Consideremos $A \subset X$; si $F \subset A$ resulta $K(F) \subset K(A)$; sea $x \in K(A)$, por (6.5) $x \in K(F)$ para algún F finito y $F \subset A$; así K verifica (Ax 2). Trivialmente se ve que K cumple (Ax 3) y (Ax 5). Nos resta ver que K cumple (Ax 4); sean $\phi \neq F \subset X$, F finito y $p \in X$; tomemos $A = \cup\{K(a,p)/a \in K(F)\}$; evidentemente $F \cup \{p\} \subset A$; si $a_1,b_1 \in A$, por (P 3) y (6.3) $K(a_1,b_1) \subset A$. Luego, por (6.4) $A = K(A)$; así $K(F \cup \{p\}) \subset K(A) = A$.

Ahora podemos afirmar que el sistema axiomático dado en este parágrafo es equivalente al considerado en el 2; en consecuencia es consistente y no categórico. Fácilmente se ve que cualquiera de sus axiomas es independiente de los restantes. Los ejemplos i a iv prueban la independencia de (P 1) a (P 4) respectivamente; en cada caso se define B(x,y) para todo $x,y \in X$.

i. X conjunto tal que card $X \geqslant 2$; $B(x,y) = \phi$.

ii. X conjunto tal que card $X \geqslant 2$; $B(x,y) = X$.

iii. $X = (\text{conv } \{a,b,p\}) - (a,b)$, donde a,b,p son tres puntos no alineados del plano, conv la cápsula convexa usual y (a,b) el segmento abierto a,b; $B(x,y) = X \cap \text{conv } \{x,y\}$.

iv. El mismo ejemplo utilizado para probar la independencia de (Ax 5), con $B(x,y) = X \cap \text{conv } \{x,y\}$.

Los axiomas (P 1) a (P 4) son teoremas de la teoría axiomática de Voiculescu [5]. En efecto, (P 1) se deduce de A.1 y A.3; (P 2) trivialmente de A.2; (P 3) se obtiene aplicando A.8; (P 4) es consecuencia de P.5 (II). Sin embargo, hay axiomas de [5], como A.7, que no se deducen en nuestro sistema axiomático para operadores de bandas.

BIBLIOGRAFIA

[1] J. W. ELLIS, *A general set-separation theorem*, Duke Math. J. 19 (1952), 417-421.

[2] P. C. HAMMER, *Maximal convex sets*, Duke Math. J. 22 (1955), 103-106.

[3] F. A. TORANZOS, *Inmersión de espacios métricos convexos en* E^n, Math. Notae 21 (1966-67), 29-53.

[4] F. A. VALENTINE, *Convex sets*, McGraw-Hill, New York, 1964.

[5] D. VOICULESCU, *Spatii cu convexitate*, (I), (II), St. Cerc. Mat. 19 (1967), 295-311.

Universidad de Buenos Aires.

Recibido en diciembre de 1971.
Versión final agosto de 1972.