

DOS DESIGUALDADES EN NORMAS CON PESOS PARA SERIES DE WALSH

Por E. O. Harboure y N. E. Aguilera

INTRODUCCION. El propósito de este trabajo es demostrar desigualdades en norma L^p con peso entre una función y su serie de bloques lacunares de Walsh asociada. Desigualdades de este tipo fueron obtenidas por Paley [1], en el caso del peso 1 y Hirschman [2], en el caso del peso x^α , con condiciones sobre α . En el presente trabajo se demuestran las desigualdades para funciones de peso crecientes o decrecientes que cumplen la condición dada por Muckenhoupt en [3].

Más precisamente, denotemos por ϕ_n el sistema de funciones de Rademacher:

$$\phi_n(t) = \text{sg} \sin(2n\pi t) \quad n \geq 0, \quad 0 \leq t \leq 1$$

y por $\psi_n(t)$ el sistema de funciones de Walsh:

$$\psi_n(t) = \phi_{n_1}(t) \dots \phi_{n_j}(t) \quad n = 2^{n_1} + \dots + 2^{n_j}$$

y

$$\psi_0(t) = 1$$

Es conocido que el sistema de Walsh es ortogonal y completo en $L^2([0,1], \mu)$, donde μ es la medida de Lebesgue del intervalo $[0,1]$. Sean entonces c_k los coeficientes de Fourier-Walsh de $f \in L^1([0,1])$:

$$c_k = \int_0^1 f(t) \psi_k(t) dt$$

Si ahora

$$f_n(t) = \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} c_k \psi_k(t)$$

$$f_1(t) = c_0 \psi_0(t)$$

Resulta:

$$f(t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} c_k \psi_k(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)$$

donde el último miembro es lo que llamaremos la serie de bloques lacunares de Walsh asociada a f .

Se trata de ver qué condiciones debe cumplir una función de peso φ para que valgan las desigualdades:

$$\begin{aligned} A \int_0^1 |f(t)|^p \varphi(t) dt &\leq \int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n^2(t) \right)^{p/2} \varphi(t) dt \leq \\ &\leq A' \int_0^1 |f(t)|^p \varphi(t) dt \quad 1 < p < \infty \end{aligned}$$

donde A y A' son constantes que dependen sólo de φ y p .

El teorema 1 muestra que dichas desigualdades valen en el caso de ser φ creciente o decreciente y verificando la condición A_p :

$$\left(\int_I \varphi(t) dt \right) \left(\int_I \varphi(t)^{-\frac{1}{p-1}} \right)^{p-1} \leq A |I|^p$$

donde I es un subintervalo de $[0,1]$; $|I|$ indica su medida de Lebesgue y A es una constante dependiente sólo de φ y p .

El teorema 2 se obtiene como corolario más importante de aquel teorema, y establece que las sumas parciales tienen norma (con peso) dominada por la norma de la función, en otras palabras si

$$s_n(t) = \sum_{k=0}^n c_k \psi_k(t)$$

entonces

$$\int_0^1 |s_n(t)|^p \varphi(t) dt \leq C \int_0^1 |f(t)|^p \varphi(t) dt.$$

si φ cumple las condiciones anteriormente citadas.

El lema 2 es particularmente interesante, ya que muestra la analogía existente entre las integrales $\int_{I_k} \varphi(t) dt$ y expresiones del

tipo ρ^k donde $0 < \rho < 1$, y entre $\frac{1}{\int_{I_k} \varphi(t) dt}$ y R^k con $R > 1$.

Finalmente, en la parte II se analizan algunos ejemplos.

PARTE I

Para establecer el resultado necesitaremos los siguientes lemas:

LEMA 1. Si φ cumple A_p para algún $p > 1$; I, I' son intervalos en $[0, 1]$, tales que $I \subset I'$ y $|I| = \frac{1}{2} |I'|$, entonces

$$\int_{I'} \varphi(x) dx \leq C \int_I \varphi(x) dx$$

donde C no depende de I ni de I' .

Demostración. Por la desigualdad de Hölder tenemos:

$$|I|^p \leq \left(\int_I \varphi(x) dx \right) \left(\int_I \varphi(x)^{-\frac{1}{p-1}} dx \right)^{p-1}$$

luego

$$\begin{aligned} \frac{\int_{I'} \varphi(x) dx}{\int_I \varphi(x) dx} &\leq \frac{\left(\int_{I'} \varphi(x) dx \right) \left(\int_{I'} \varphi(x)^{-\frac{1}{p-1}} dx \right)^{p-1}}{|I|^p} \leq \\ &\leq \frac{\left(\int_{I'} \varphi(x) dx \right) \left(\int_{I'} \varphi(x)^{-\frac{1}{p-1}} dx \right)^{p-1}}{|I|^p} \leq C \cdot 2^p \end{aligned}$$

Observación: Si φ verifica A_p , entonces $\varphi^{-\frac{1}{p-1}}$ verifica A_q , donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$; luego vale el lema para $\varphi^{-\frac{1}{p-1}}$.

En los lemas 2, 3 y 4 usaremos la siguiente notación: $\{I'_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ indicará una sucesión de intervalos encajados, contenidos estrictamente uno en el otro, y de la forma $I'_k = [\frac{j}{2^k}, \frac{j+1}{2^k}]$, verificando $|I'_k| = 2 |I'_{k+1}|$; por otra parte, $\{I_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ será una familia deducida de una de la forma $\{I'_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, donde $I_k = I'_k - I'_{k+1}$, es decir, son intervalos diádicos rampantes que forman un cubrimiento del $[0, 1]$ y con medida $1/2^k$.

LEMA 2. Si φ cumple A_p y $r > 0$, entonces se tiene:

$$i) \sum_{j=0}^k \frac{1}{\left(\int_{I_j} \varphi(x) dx \right)^r} \leq \frac{A}{\left(\int_{I_k} \varphi(x) dx \right)^r}$$

$$\text{ii)} \quad \sum_{k=j}^{\infty} \left(\int_{I_k} \varphi(x) dx \right)^r \leq A \left(\int_{I_j} \varphi(x) dx \right)^r$$

Demostración. Sea $\alpha > 1$ tal que φ^α cumple A_p . (La existencia de un tal α fue probada por Muckenhoupt en [3]). Probaremos que:

$$|I|^{1/\alpha'} \left(\int_I \varphi^\alpha(x) dx \right)^{1/\alpha} \leq C \int_I \varphi(x) dx \quad (*)$$

donde $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha'} = 1$, $I \subset [0, 1]$.

En efecto:

$$\begin{aligned} |I|^{1/\alpha'} \left(\int_I \varphi^\alpha(x) dx \right)^{1/\alpha} &\leq C \frac{|I|^{1/\alpha'} |I|^{p/\alpha}}{\left(\int_I \varphi(x)^{-\frac{\alpha}{p-1}} dx \right)^{\frac{p-1}{\alpha}}} \leq \\ &\leq \frac{C |I|^{1/\alpha'} |I|^{p/\alpha} |I|^{\frac{p-1}{\alpha'}}}{\left(\int_I \varphi(x)^{-\frac{1}{p-1}} dx \right)^{p-1}} \leq C \int_I \varphi(x) dx \end{aligned}$$

usando A_p y Hölder. Notar que la desigualdad de Hölder da

$$\int_I \varphi(x) dx \leq \left(\int_I \varphi^\alpha(x) dx \right)^{1/\alpha} |I|^{1/\alpha'}$$

y (*) da la desigualdad inversa.

Veamos i):

$$\sum_{j=0}^k \frac{1}{\left(\int_{I_j} \varphi(x) dx \right)^r} \leq C \sum_{j=0}^k \frac{2^{jr/\alpha'}}{\left(\int_{I_j} \varphi^\alpha(x) dx \right)^{r/\alpha}}$$

usando (*).

Si ahora usamos el lema 1 y que $I'_k \subset I'_j$ para $j \leq k$

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^k \frac{1}{\left(\int_{I_j} \varphi(x) dx \right)^r} &\leq C \sum_{j=0}^k \frac{2^{jr/\alpha'}}{\left(\int_{I'_j} \varphi^\alpha(x) dx \right)^{r/\alpha}} \leq \\ &\leq \frac{C}{\left(\int_{I'_k} \varphi^\alpha(x) dx \right)^{r/\alpha}} \sum_{j=0}^k 2^{jr/\alpha'} \end{aligned}$$

Usando nuevamente el lema 1 y la desigualdad de Hölder tenemos

$$\frac{C}{\left(\int_{I'_k} \varphi^\alpha(x) dx\right)^{r/\alpha}} \sum_{j=0}^k 2^{jr/\alpha'} \leq \frac{C 2^{kr/\alpha'}}{\left(\int_{I_k} \varphi^\alpha(x) dx\right)^{r/\alpha}} \leq$$

$$\leq \frac{C}{\left(\int_{I_k} \varphi(x) dx\right)^r}$$

Veamos ahora ii). De la desigualdad de Hölder y el lema 1 se tiene

$$\sum_{k=j}^{\infty} \left(\int_{I_k} \varphi(x) dx\right)^r \leq \sum_{k=j}^{\infty} \frac{\left(\int_{I_k} \varphi^\alpha(x) dx\right)^{r/\alpha}}{2^{kr/\alpha'}} \leq$$

$$\leq C \sum_{k=j}^{\infty} \frac{\left(\int_{I'_k} \varphi^\alpha(x) dx\right)^{r/\alpha}}{2^{kr/\alpha'}}$$

En forma análoga a la demostración de i) obtenemos

$$\sum_{k=j}^{\infty} \left(\int_{I_k} \varphi(x) dx\right)^r \leq C \frac{\left(\int_{I_j} \varphi^\alpha(x) dx\right)^{r/\alpha}}{2^{jr/\alpha'}}$$

y usando ahora (*):

$$\sum_{k=j}^{\infty} \left(\int_{I_k} \varphi(x) dx\right)^r \leq C \left(\int_{I_j} \varphi(x) dx\right)^r$$

con lo que el lema queda demostrado.

LEMA 3. Sea φ verificando A_p . Sean $r, s \in \mathbb{R}$, $0 < r, s < \infty$, $a_k \geq 0$,

$$k \in \mathbb{N}, \text{ y } A_k^s = a_0^s + \dots + a_k^s$$

entonces

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k^r \int_{I_k} \varphi(x) dx \leq C \sum_{k=0}^{\infty} a_k^r \int_{I_k} \varphi(x) dx$$

donde C depende solamente de r, s y φ .

Demostración. Sea

$$b_k = a_k^s \left(\int_{I_k} \varphi(x) dx \right)^{s/r}, \quad B_k = A_k^s \left(\int_{I_k} \varphi(x) dx \right)^{s/r}$$

Debemos probar entonces que

$$\sum_{k=0}^{\infty} B_k^{r/s} \leq C \sum_{k=0}^{\infty} b_k^{r/s}$$

Consideraremos dos casos:

$$a) \quad 1 < \frac{r}{s} < \infty$$

$$b) \quad 0 < \frac{r}{s} \leq 1$$

Caso a): Tenemos que

$$B_k = \sum_{j=0}^k b_j \frac{\left(\int_{I_k} \varphi(x) dx \right)^{s/r}}{\left(\int_{I_j} \varphi(x) dx \right)^{s/r}} \leq \left[\sum_{j=0}^k \frac{b_j^{r/s} \left(\int_{I_k} \varphi(x) dx \right)^{s/r}}{\left(\int_{I_j} \varphi(x) dx \right)^{s/r}} \right]^{s/r}.$$

$$\cdot \left[\sum_{j=0}^k \left(\frac{\int_{I_k} \varphi(x) dx}{\int_{I_j} \varphi(x) dx} \right)^{s/r} \right]^{1-\frac{s}{r}}$$

aplicando Hölder. Usando ahora la parte i) del lema 2 tenemos:

$$B_k \leq C \left[\sum_{j=0}^k b_j^{r/s} \left(\frac{\int_{I_k} \varphi(x) dx}{\int_{I_j} \varphi(x) dx} \right)^{s/r} \right]^{s/r}$$

$$\text{luego } \sum_{k=0}^{\infty} B_k^{r/s} \leq C \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k b_j^{r/s} \left(\frac{\int_{I_k} \varphi(x) dx}{\int_{I_j} \varphi(x) dx} \right)^{s/r} =$$

$$= C \sum_{j=0}^{\infty} b_j^{r/s} \sum_{k=j}^{\infty} \left(\frac{\int_{I_k} \varphi(x) dx}{\int_{I_j} \varphi(x) dx} \right)^{s/r} \leq C \sum_{j=0}^{\infty} b_j^{r/s}$$

en virtud del lema 2 parte ii).

Caso b):

$$B_k^{r/s} \leq \sum_{j=0}^k b_j^{r/s} \frac{\int_{I_k} \varphi(x) dx}{\int_{I_j} \varphi(x) dx}$$

luego

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} B_k^{r/s} &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} b_j^{r/s} \frac{\int_{I_k} \varphi(x) dx}{\int_{I_j} \varphi(x) dx} = \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} b_j^{r/s} \sum_{k=j}^{\infty} \frac{\int_{I_k} \varphi(x) dx}{\int_{I_j} \varphi(x) dx} \leq C \sum_{j=0}^{\infty} b_j^{r/s} \end{aligned}$$

como queríamos demostrar.

LEMA 4. Si φ verifica A_p , $0 < r, s < \infty$, $a_k \geq 0$, $k \in \mathbb{N}$ y

$A_k^s = \sum_{j=k}^{\infty} a_j^s$, entonces existe una constante C que depende de r , s , φ y p tal que

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k^r 2^{kp} \int_{I_k} \varphi(x) dx \leq A \sum_{k=0}^{\infty} a_k^r 2^{kp} \int_{I_k} \varphi(x) dx$$

Demostración. Es análoga a la del lema anterior, usando en este caso que

$$\sum_{k=0}^j (2^{pk} \int_{I_k} \varphi(x) dx)^{s/r} \leq A (2^{pj} \int_{I_j} \varphi(x) dx)^{s/r}$$

$$y \quad \sum_{j=k}^{\infty} \frac{1}{(2^{pj} \int_{I_j} \varphi(x) dx)^{s/r}} \leq \frac{A}{(2^{pk} \int_{I_k} \varphi(x) dx)^{s/r}}$$

desigualdades que resultan del lema 2 (i), ii) respectivamente),

notando que $2^{pk} \int_{I_k} \varphi(x) dx \simeq \frac{1}{(\int_{I_k} \varphi^{-\frac{1}{p-1}}(x) dx)^{p-1}}$ y que $\varphi^{-1/p-1}$

verifica A_q .

TEOREMA 1. Si φ es una función creciente (decreciente) en $[0, 1]$ que verifica A_p y si $f \in L^1([0, 1])$, entonces existen constantes C y C' dependientes sólo de φ y p tales que

$$\begin{aligned} C \int_0^1 |f(x)|^p \varphi(x) dx &\leq \int_0^1 \left(\sum_{n=-1}^{\infty} f_n^2(x) \right)^{p/2} \varphi(x) dx \leq \\ &\leq C' \int_0^1 |f(x)| \varphi(x) dx. \end{aligned}$$

siempre que alguno de los miembros exista.

Demostración. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que

$$c_0 = \int_0^1 \psi_0(t) f(t) dt = 0$$

Definimos:

$$\begin{aligned} \mu_n &= 2^n \phi_n(0) \int_0^{2^{-n}} f(x) \phi_n(x) dx = 2^n \int_0^{2^{-n}} f(x) \phi_n(x) dx \\ \gamma_n &= 2^n \phi_n(1) \int_{1-2^{-n}}^1 f(x) \phi_n(x) dx = -2^n \int_{1-2^{-n}}^1 f(x) \phi_n(x) dx \end{aligned}$$

y sean

$$\begin{aligned} g_n(t) &= 2^{-n} \mu_n \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} \psi_k(t) \quad ; \quad g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(t) \\ h_n(t) &= 2^{-n} \gamma_n \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} \psi_k(t) \psi_k(1) \quad ; \quad h(t) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n(t) \end{aligned}$$

Se puede ver fácilmente que $g_n(t) = \mu_n$ para $0 < t < 2^{-n-1}$,

$g_n(t) = -\mu_n$ para $2^{-n-1} < t < 2^{-n}$, $g_n(t) = 0$ si $t > 2^{-n}$ y que

$h_n(t) = 0$ si $t < 1 - 2^{-n}$, $h_n(t) = -\gamma_n$ si $1 - 2^{-n} < t < 1 - 2^{-n-1}$

y $h_n(t) = \gamma_n$ si $1 - 2^{-n-1} < t < 1$.

Demostraremos primero el teorema para g y h . Lo haremos sólo para g ya que para h se procede en forma análoga.

$$g(t) = \mu_0 + \mu_1 + \dots + \mu_{n-1} - \mu_n \quad \text{si } 2^{-n-1} < t < 2^{-n}$$

$$\begin{aligned}
\mu_0 + \dots + \mu_{n-1} - \mu_n &= \sum_{j=0}^{n-1} \mu_j - \mu_n = \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{2^j-1} \psi_k(t) \right) f(t) \phi_n(t) dt - \mu_n = \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} \int_0^1 \sum_{j=2^j}^{2^{j+1}-1} \psi_k(t) f(t) dt - \mu_n = \\
&= \int_0^1 f(t) \sum_{k=0}^{2^n-1} \psi_k(t) dt - \mu_n = 2^n \int_0^{2^{-n}} f(t) dt - \\
&- 2^n \int_0^{2^{-n}} f(t) \phi_n(t) dt = 2 \cdot 2^n \int_{2^{-n-1}}^{2^{-n}} f(t) dt .
\end{aligned}$$

Tenemos entonces

$$\int_0^1 |g(t)|^p \varphi(t) dt = 2^p \sum_{n=0}^{\infty} 2^{np} \left| \int_{2^{-n-1}}^{2^{-n}} f(t) dt \right|^p \int_{2^{-n-1}}^{2^{-n}} \varphi(t) dt$$

y

$$\int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{\infty} g_n^2(t) \right)^{p/2} \varphi(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n \mu_k^2 \right)^{p/2} \int_{2^{-n-1}}^{2^{-n}} \varphi(t) dt$$

Luego, por el lema 3 obtenemos

$$\int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{\infty} g_n^2(t) \right)^{p/2} \varphi(t) dt \leq C \sum_{n=0}^{\infty} |\mu_n|^p \int_{2^{-n-1}}^{2^{-n}} \varphi(t) dt$$

como además

$$|\mu_n|^p \leq C 2^{np} \left[\left| \int_0^{2^{-n-1}} f(t) dt \right|^p + \left| \int_{2^{-n-1}}^{2^{-n}} f(t) dt \right|^p \right]$$

y

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty} 2^{np} \left| \int_0^{2^{-n-1}} f(t) dt \right|^p \int_{2^{-n-1}}^{2^{-n}} \varphi(t) dt \leq \\
&\leq A \sum_{n=0}^{\infty} 2^{np} \left| \int_{2^{-n-1}}^{2^{-n}} f(t) dt \right|^p \int_{2^{-n-1}}^{2^{-n}} \varphi(t) dt
\end{aligned}$$

por el lema 4 tenemos que

$$\int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{\infty} g_n^2(t) \right)^{p/2} \varphi(t) dt \leq C \int_0^1 |g(t)|^p \varphi(t) dt$$

Veamos ahora la otra desigualdad:

Como $|g(t)| \leq |\mu_0| + \dots + |\mu_n|$ si $2^{-n-1} < t < 2^{-n}$

resulta

$$\begin{aligned} \int_0^1 |g(t)|^p \varphi(t) dt &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^n |\mu_j| \right)^p \int_{2^{-n-1}}^{2^{-n}} \varphi(t) dt \leq \\ &\leq A \sum_{n=0}^{\infty} |\mu_n|^p \int_{2^{-n-1}}^{2^{-n}} \varphi(t) dt \leq A \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^n \mu_n^2 \right)^{p/2} \cdot \\ &\cdot \int_{2^{-n-1}}^{2^{-n}} \varphi(t) dt = A \int_0^1 \left(\sum q_n^2(t) \right)^{p/2} \varphi(t) dt \end{aligned}$$

donde hemos usado nuevamente el lema 3.

Hemos demostrado entonces el teorema para las funciones g y h .
(Cabe observar que con esta misma técnica se podría demostrar el teorema para funciones características de intervalos diádicos sin usar la hipótesis de que φ es creciente o decreciente).

Probaremos ahora que

$$\int_0^1 |g(t)|^p \varphi(t) dt \leq C \int_0^1 |f(t)|^p \varphi(t) dt$$

y

$$\int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{\infty} g_n^2(t) \right)^{p/2} \varphi(t) dt \leq C \int_0^1 \left(\sum f_n^2(t) \right)^{p/2} \varphi(t) dt$$

y desigualdades análogas para h .

$$\begin{aligned} \int_0^1 |g(t)|^p \varphi(t) dt &= 2^p \sum_{n=0}^{\infty} 2^{np} \left| \int_{2^{-n-1}}^{2^{-n}} f(t) dt \right|^p \int_{2^{-n-1}}^{2^{-n}} \varphi(t) dt \leq \\ &\leq 2^p \sum_{n=0}^{\infty} 2^{np} \left(\int_{2^{-n-1}}^{2^{-n}} |f(t)|^p \varphi(t) dt \right) \left(\int_{2^{-n-1}}^{2^{-n}} \varphi^{-\frac{1}{p-1}}(t) dt \right)^{p-1} \cdot \\ &\cdot \int_{2^{-n-1}}^{2^{-n}} \varphi(t) dt \leq C \sum_{n=0}^{\infty} \int_{2^{-n-1}}^{2^{-n}} |f(t)|^p \varphi(t) dt = \end{aligned}$$

$$= C \int_0^1 |f(t)|^p \varphi(t) dt \quad \text{usando la condición } A_p.$$

Por otra parte $|g_n(t)| \leq |f_n(t)|$

de donde se deduce la segunda desigualdad.

Veremos ahora que bajo la hipótesis de que φ es creciente (decreciente), existe una función ψ escalonada, constante en intervalos de la forma $(2^{-n-1}, 2^{-n})$ con $n > 0$ y $(1-2^{-n}, 1-2^{-n-1})$ y equivalente a ella, es decir, existen constantes C_1 y C_2 tales que

$$C_1 \psi(t) \leq \varphi(t) \leq C_2 \psi(t) \quad t \in [0, 1]$$

En efecto, sea ψ definida por:

$$\psi(t) = \varphi(2^{-n-1}) \quad \text{si } 2^{-n-1} < t < 2^{-n} \quad n > 0$$

$$\psi(t) = \varphi(1-2^{-n}) \quad \text{si } 1-2^{-n} < t < 1-2^{-n-1} \quad n > 0$$

Es claro que $\psi(t) \leq \varphi(t)$ ya que φ es creciente.

Además, si $2^{-n-1} < t < 2^{-n}$ tenemos

$$\begin{aligned} \varphi(t) &\leq \varphi(2^{-n}) \leq 2^n \int_{2^{-n-1}}^{2^{-n+1}} \varphi(t') dt' \leq \\ &\leq C 2^{n+1} \int_0^{2^{-n-1}} \varphi(t') dt' \leq C \varphi(2^{-n-1}) = C \psi(t) \end{aligned}$$

donde hemos usado el lema 1 y el hecho de que φ es creciente; en forma completamente análoga vemos que $\varphi(t) \leq C \psi(t)$ si

$$1-2^{-n} < t < 1-2^{-n-1} \quad n > 0.$$

Observemos que para que $u(t)$ sea de la forma

$$u(t) = \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} a_k \psi_k(t)$$

es necesario y suficiente que $u(t)$ sea constante en los intervalos de la forma $(\frac{k}{2^{n+1}}, \frac{k+1}{2^{n+1}})$ si $k \geq 0$ y que su integral sobre

intervalos de la forma $(\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n})$ sea nula.

Veamos que la función $(f_n - g_n - h_n) \psi^{1/p}$ verifica estas condiciones. En efecto:

$$f_n - g_n - h_n = 0 \text{ en los intervalos } (0, 2^{-n}) \text{ y } (1 - 2^{-n}, 1)$$

por otra parte, ψ es constante en los intervalos $(\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n})$ si

$1 \leq k < 2^n - 1$. Obviamente la integral es nula en $(\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n})$; luego resulta que

$$[\psi^{1/p}(f - g - h)]_n = \psi^{1/p}(f_n - g_n - h_n)$$

Podemos usar, pues, las desigualdades de Paley para obtener

$$\int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{\infty} (f_n - g_n - h_n)^2(t) \right)^{p/2} \psi(t) dt \simeq \int_0^1 |(f-g-h)(t)|^p \psi(t) dt$$

y entonces

$$\int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{\infty} (f_n - g_n - h_n)^2(t) \right)^{p/2} \varphi(t) dt \simeq \int_0^1 |(f-g-h)(t)|^p \varphi(t) dt$$

en virtud de la equivalencia entre φ y ψ .

Finalmente tenemos

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n^2(t) \right)^{p/2} dt &\leq C \left[\int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{\infty} (f_n - g_n - h_n)^2(t) \right)^{p/2} \varphi(t) dt + \right. \\ &+ \left. \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{\infty} g_n^2(t) \right)^{p/2} \varphi(t) dt + \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{\infty} h_n^2(t) \right)^{p/2} \varphi(t) dt \right] \leq \\ &\leq C \left[\int_0^1 |f-g-h|^p(t) \varphi(t) dt + \int_0^1 |g(t)|^p \varphi(t) dt + \int_0^1 |h(t)|^p \varphi(t) dt \right] \leq \\ &\leq C \left[\int_0^1 |f(t)|^p \varphi(t) dt + \int_0^1 |g(t)|^p \varphi(t) dt + \int_0^1 |h(t)|^p \varphi(t) dt \right] \leq \\ &\leq C \int_0^1 |f(t)|^p \varphi(t) dt. \end{aligned}$$

donde hemos usado las desigualdades demostradas y otras triviales, quedando así demostrada una parte del teorema.

Para la otra, observemos que

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 |f(t)|^p \varphi(t) dt \leq C \left(\int_0^1 |f-g-h|^p(t) \varphi(t) dt + \int_0^1 |g(t)|^p \varphi(t) dt + \right. \\
& \left. + \int_0^1 |h(t)|^p \varphi(t) dt \right) \leq C \left(\int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{\infty} (f_n - g_n - h_n)^2(t) \right)^{p/2} \varphi(t) dt + \right. \\
& \left. + \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{\infty} g_n^2(t) \right)^{p/2} \varphi(t) dt + \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{\infty} h_n^2(t) \right)^{p/2} \varphi(t) dt \right) \leq \\
& \leq C \left(\int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n^2(t) \right)^{p/2} \varphi(t) dt + \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{\infty} g_n^2(t) \right)^{p/2} \varphi(t) dt + \right. \\
& \left. + \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{\infty} h_n^2(t) \right)^{p/2} \varphi(t) dt \right) \leq C \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n^2(t) \right)^{p/2} \varphi(t) dt
\end{aligned}$$

y el teorema queda completamente probado.

TEOREMA 2. Sea φ creciente o decreciente en $[0,1]$ y tal que verifica A_p , $1 < p < \infty$. Sea $n \in \mathbb{N}$ y $s_n(t)$ la suma parcial de orden n de $f \in L^1[0,1]$ tal que $\sum_{k=0}^{\infty} |c_k| < \infty$. Entonces

$$\int_0^1 |s_n(t)|^p \varphi(t) dt \leq C \int_0^1 |f(t)|^p \varphi(t) dt$$

Demostración. Supongamos $n = 2^{n_1} + 2^{n_2} + \dots + 2^{n_\lambda}$, y sea $g(t) = f(t) \psi_n(t)$.

Entonces se tiene la siguiente igualdad (ver [1]):

$$s_n(t) \psi_n(t) = g_{n_1}(t) + \dots + g_{n_\lambda}(t)$$

Si usamos el teorema 1, resulta que

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 |s_n(t)|^p \varphi(t) dt = \int_0^1 |g_{n_1}(t) + \dots + g_{n_\lambda}(t)|^p \varphi(t) dt \leq \\
& \leq C \int_0^1 (g_{n_1}^2(t) + \dots + g_{n_\lambda}^2(t))^{p/2} \varphi(t) dt \leq C \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{\infty} g_n^2(t) \right)^{p/2} \varphi(t) dt \\
& \leq C \int_0^1 |g(t)|^p \varphi(t) dt = C \int_0^1 |f(t)|^p \varphi(t) dt
\end{aligned}$$

que es lo que queríamos demostrar.

PARTE II

En esta sección veremos algunos ejemplos de funciones de peso para las cuales vale el teorema 1 dado en la parte I. Es fácil verificar que los pesos utilizados por Hirschman en [2] son casos particulares de los mencionados en este trabajo; en efecto, los pesos en ese caso son de la forma x^α , donde α es tal que $-\frac{1}{p} < \alpha < 1 - \frac{1}{p}$.

Como ejemplo de generalización, veremos que la función de peso $\varphi(t)$ definida por

$$\varphi(t) = n^\alpha \quad \text{si } 2^{-n} < t \leq 2^{-n+1}$$

donde $\alpha \in \mathbb{R}$, es una de las mencionadas en los teoremas 1 y 2.

Es obvio que la función $\varphi(t)$ así definida es creciente o decreciente, según α sea positivo o negativo. Veamos entonces que cumple la condición A_p .

Para ello consideremos primero el caso en que $\alpha > 0$.

La condición A_p es:

$$\left(\int_I \varphi(x) dx \right) \left(\int_I \varphi^{-\frac{1}{p-1}}(x) dx \right)^{p-1} \leq C |I|^p$$

veremos que se cumple en el caso de ser I un intervalo de la forma $[0, 2^{-n}]$. En este caso tenemos:

$$\begin{aligned} \int_0^{2^{-n}} \varphi(x) dx &= \sum_{k=n+1}^{\infty} \int_{2^{-k-1}}^{2^{-k}} \varphi(x) dx = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{k^\alpha}{2^k} = \\ &= \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{k^\alpha}{2^k} + \sum_{k=2n+1}^{\infty} \frac{k^\alpha}{2^k} \end{aligned}$$

Ahora bien

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{k^\alpha}{2^k} \leq \frac{2^\alpha n^\alpha}{2^n}$$

por ser $\alpha > 0$, y dado que $\frac{k^\alpha}{2^{k/2}} \leq C$ si $k \in \mathbb{N}$, se deduce que

$$\sum_{k=2n+1}^{\infty} \frac{k^\alpha}{2^k} \leq C \sum_{k=2n+1}^{\infty} \frac{1}{2^{k/2}} \leq C \frac{1}{2^{2n/2}} = C \frac{1}{2^n}$$

Por lo tanto:

$$\int_0^{2^{-n}} \varphi(x) dx \leq C \frac{n^\alpha}{2^n} + C \frac{1}{2^n} \leq \epsilon \frac{n^\alpha}{2^n}$$

Por otra parte

$$\begin{aligned} \int_0^{2^{-n}} \varphi^{-\frac{1}{p-1}}(x) dx &= \sum_{k=n+1}^{\infty} \int_{2^{-k-1}}^{2^{-k}} \varphi^{-\frac{1}{p-1}}(x) dx = \\ &= \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{k^{-\frac{\alpha}{p-1}}}{2^k} \leq n^{-\frac{\alpha}{p-1}} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = n^{-\frac{\alpha}{p-1}} \frac{1}{2^n} \end{aligned}$$

donde hemos usado que $\alpha > 0$. Usando las acotaciones obtenidas, queda

$$\left(\int_0^{2^{-n}} \varphi(x) dx \right) \left(\int_0^{2^{-n}} \varphi^{-\frac{1}{p-1}}(x) dx \right)^{p-1} \leq C \frac{n^\alpha}{2^n} \left(\frac{n^{-\frac{\alpha}{p-1}}}{2^n} \right)^{p-1} = C \left(\frac{1}{2^n} \right)^p$$

que es lo que queríamos deducir.

Si ahora $I = [a, b]$ es un intervalo general, tenemos tres casos posibles:

- i) Existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^n} \leq a \leq b \leq \frac{1}{2^{n-1}}$
- ii) Existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^{n+1}} \leq a < \frac{1}{2^n} \leq b \leq \frac{1}{2^{n-1}}$
- iii) Existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a < \frac{1}{2^{n+1}} < \frac{1}{2^n} < b \leq \frac{1}{2^{n-1}}$

Veamos cada caso separadamente.

Caso i)

En este caso la función φ es constante en el intervalo I y se tiene

$$\left(\int_I \varphi(x) dx \right) \left(\int_I \varphi^{-\frac{1}{p-1}}(x) dx \right)^{p-1} = 1$$

Caso ii)

$$\int_I \varphi(x) dx = \int_a^{1/2^n} \varphi(x) dx + \int_{1/2^n}^b \varphi(x) dx = (n+1)^\alpha \left(\frac{1}{2^n} - a\right) + n^\alpha \left(b - \frac{1}{2^n}\right)$$

Pero como $\alpha > 0$, tenemos que $n^\alpha < (n+1)^\alpha$ y por lo tanto

$$\int_I \varphi(x) dx \leq n^\alpha \left[\left(\frac{1}{2^n} - a\right) + \left(b - \frac{1}{2^n}\right) \right] = (n+1)^\alpha (b-a)$$

Análogamente:

$$\int_I \varphi^{-\frac{1}{p-1}}(x) dx \leq n^{-\frac{\alpha}{p-1}} (b-a)$$

y entonces

$$\begin{aligned} \left(\int_I \varphi(x) dx \right) \left(\int_I \varphi^{-\frac{1}{p-1}}(x) dx \right)^{p-1} &\leq (n+1)^\alpha (b-a) \left[n^{-\frac{\alpha}{p-1}} (b-a) \right]^{p-1} = \\ &= \left(\frac{n+1}{n} \right)^\alpha (b-a)^p. \end{aligned}$$

Dado que $\left(\frac{n+1}{n}\right)^\alpha < 2^\alpha$, obtenemos el resultado.

Caso iii)

Aquí es $\frac{1}{2^{n+1}} < b-a < \frac{1}{2^{n-1}}$ y entonces

$$\begin{aligned} \left(\int_I \varphi(x) dx \right) \left(\int_I \varphi^{-\frac{1}{p-1}}(x) dx \right)^{p-1} &\leq \left(\int_0^{2^{-n+1}} \varphi(x) dx \right) \left(\int_0^{2^{-n+1}} \varphi^{-\frac{1}{p-1}}(x) dx \right)^{p-1} \leq \\ &\leq C (2^{-n+1})^p \leq C [4(b-a)]^p \leq C (b-a)^p \end{aligned}$$

y los tres casos quedan completamente terminados; es decir, φ cumple A_p si $\alpha > 0$.

Si ahora $\alpha < 0$, recordemos que si ψ verifica A_p , entonces

$\psi^{-\frac{1}{p-1}}$ verifica A_q , donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$; el resultado se obtiene entonces tomando $\psi = \varphi^{-(p-1)}$.

REFERENCIAS

- [1] R.E.A.C. PALEY, *A remarkable series of orthogonal functions, I.* Proc. London Math. Soc., vol. 34, 1932, pgs 241-264.
- [2] I.I. HIRSCHMAN, *The decomposition of Walsh and Fourier series.* Memoirs of the Am. Math. Soc. n°15, 1955.
- [3] B. MUCKENHOUPT, *Weighted norm inequalities for the Hardy Maximal function.* Math. research paper n°219, 1971. State University of New York at Albany.

Universidad Nacional de Buenos Aires
Argentina

Recibido en junio de 1972.