Revista de la
Unión Matemática Argentina
Volumen 26, 1972.

# SOBRE EL ANILLO DE COBORDISMO DEL ESPACIO PROYECTIVO REAL DE DIMENSION INFINITA

por Oscar Valdivia Gutierrez

INTRODUCCION. En este trabajo calculamos el anillo del espacio proyectivo real de dimensión infinita utilizando la sucesión de Gysin.

Agradezco al Profesor A. Liulevicius de la Universidad de Chicago, por las discusiones y sugerencias que me brindó durante la elaboración de este trabajo.

## 1. GRUPOS DE COBORDISMO Y BORDISMO COMPLEJOS.

Consideremos una *teoría de cohomología generalizada* en una categoría cuyos objetos son complejos regulares finitos y sus morfismos son funciones contínuas (ver [1]). Un *espectrum* E es una sucesión $\{E_n \;/\; n \in Z\}$ de espacios y una sucesión de funciones contínuas $\quad \iota_n : SE_n \longrightarrow E_{n+1}$

donde $SE_n$ es la suspensión del espacio $E_n$ (ver [6],[8]).

Por ejemplo, tenemos el espectrum MU unitario de Thom, que se construye como sigue: Para cada n fijamos un U(n)-espacio fibrado vectorial universal $E_n$ sobre el espacio clasificante BU(n) del grupo unitario U(n), tal que:

i) $E_1$ sobre $BU(1) = CP(\infty)$, espacio proyectivo complejo de dimensión infinita, es el espacio fibrado canónico de dimensión 1, $\eta$ sobre $CP(\infty)$.

ii) Si $\iota_n : BU(n) \longrightarrow BU(n+1)$ es la aplicación inducida por la inclusión natural $U(n) \hookrightarrow U(n+1)$ entonces el fibrado inducido $\iota_n^*(E_{n+1})$ es equivalente a la suma de Whitney $E_n \oplus 1$, donde 1 es el fibrado trivial de dimensión 1.

iii) Si $\rho_{kl}$: $BU(k) \times BU(1) \longrightarrow BU(k+1)$ es la aplicación inducida por la inclusión natural $U(k) \times U(1) \hookrightarrow U(k+1)$ entonces el fibrado inducido $\rho^*_{kl}(E_{k+l})$ es equivalente al espacio fibrado producto $E_k \times E_l$.

Sea $E \longrightarrow X$ un espacio fibrado, D(E) y S(E) los espacios totales de los fibrados de discos y de esferas asociados respectivamente. El espacio de Thom $ME = D(E)/S(E)$ ([4],[7]) es un CW-complejo sin celdas en dimensión menor que 2n, excepto el punto base, y M es un functor de la categoría de espacios fibrados a la categoría de los CW-complejos con puntos bases.

Sean $E \longrightarrow X$ y $F \longrightarrow Y$, respectivamente, U(n) y U(m)-fibrados. Entonces $E \times F \longrightarrow X \times Y$ es un U(n+m)-espacio fibrado y son homeomorfos $M(E \times F)$ y el wedge $ME \wedge MF$. Si Y es un punto entonces $MF = S^{2m}$, esfera de dimensión 2m, y la suspensión $S^{2m}\, ME = ME \wedge S^{2m}$ es isomorfa a $M(E \oplus \underline{m})$, donde $\underline{m}$ es el espacio fibrado trivial de dimensión m.

Sea MU(n) el espacio de Thom del espacio fibrado $E_n \longrightarrow BU(n)$. Entonces por (ii) se tiene una aplicación contínua

$$i_n : S^2\, MU(n) \longrightarrow MU(n+1)$$

Luego MU consiste de la sucesión $\{MU(n)/n \in Z\}$ de espacios y de la sucesión $\{i_n/n \in Z\}$ de funciones contínuas (ver [4],[6]).

Según G. W. Whitehead (ver [9]), un espectrum determina una teoría de cohomología y de homología generalizadas. Las teorías de cohomología asociadas al espectrum unitario de Thom MU se llaman Cobordismo y Bordismo complejo respectivamente (ver [3]). Si X es un CW-complejo finito, estos grupos son

$$MU^n(X) = [S^{2k-n}X, MU(k)] \ , \quad MU_n(X) = [S^{2k+n}, MU(k)\, X]$$

para $\underline{k}$ suficientemente grande, donde [A,B] designa las clases de equivalencia de homotopías de A en B.

## 2. SUCESION DE GYSIN.

Sea $\eta$ el fibrado complejo canónico de dimensión 1 sobre $BU(1) = CP(\infty)$ con fibra la esfera de dimensión 1, $S^1 = U(1)$, $p: E = EB(\eta) \longrightarrow BU(1)$ y $p_0: E_0 = ES(\eta) \longrightarrow BU(1)$ los fibrados asociados de disco y esfera respectivamente y la inclusión $i\colon E \subset (E, E_0)$. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo:

$$
\begin{array}{lccccccccc}
 & \cdots \longrightarrow MU^q(E,E_0) & \xrightarrow{i^*} & MU^q(E) & \longrightarrow & MU^q(E_0) & \longrightarrow & MU^{q+1}(E,E_0) & \xrightarrow{\delta} & \cdots \\
(2.1) & \approx \uparrow \phi & & \approx \uparrow \rho^* & & \| & & & & \\
 & \cdots \longrightarrow MU^{q-2}(CP^\infty) & \longrightarrow & MU^q(CP^\infty) & \xrightarrow{\rho^*_0} & MU^q(E_0) & \longrightarrow & MU^{q-1}(CP^\infty) & \longrightarrow & \cdots
\end{array}
$$

donde la primera fila es la sucesión exacta del par $(E,E_0)$, $\phi$ es el isomorfismo de Thom (ver [3],[5]), y sea $g \in MU^2(E,E_0)$ la clase de Thom de $\eta$.

Para cada $a \in MU^{q-2}(CP^\infty)$ se tiene que:

$p^{*-1}\, i^*\, \phi(a) = p^{*-1}\, i^*(p^*a \cup g) = p^{*-1}(p^*a \cup i^*g) = a \cup p^{*-1}i^*g$

PROPOSICION 2.2. *Se tiene que* $p^{*-1}i^*g$ *es la clase característica de Conner-Floyd de* $\eta$.

*Demostración.* En efecto, la clase característica de Conner-Floyd de $\eta$, que designamos con $cf_1(\eta) = W$ es la representante (ver [4], [6],[8]) de la composición de las aplicaciones contínuas

$$CP^\infty \xrightarrow[\text{o-sección}]{\approx} E \xrightarrow{\ i\ } MU(1)$$

lo que implica

$$S^{2n} \wedge (CP^\infty)^+ \xrightarrow{1\wedge f} S^{2n} \wedge MU(1) \longrightarrow MU(n+1)$$

es decir, $f \in \{(CP^\infty)^+ , MU\}_{-2} = \{(CP^\infty)^+ , MU\}^2$

Por otra parte, la clase de Thom $g' \in MU^{2n}(E,E_0)$ de un fibrado complejo sobre el espacio X se construye como sigue:

Sea $f_\alpha\colon X \longrightarrow BU(n)$ la aplicación clasificante del fibrado $\alpha$ esto es

$$
\begin{array}{ccc}
E = EB(\alpha) & & \\
\alpha \downarrow & & \downarrow \gamma_n \\
X & \xrightarrow{\quad f_\alpha \quad} & BU(n)
\end{array}
$$

donde $\gamma_n$ es el fibrado canónico, $E_0 = ES(\alpha)$ espacio total del fibrado asociado de esferas.

Como $\qquad B^{2n} \overset{i}{\subset} E = EB(\alpha) \xrightarrow{\hat{f}_\alpha} EB(\gamma_n)$

y $\qquad S^{2n-1} \subset E_0 = ES(\alpha) \longrightarrow ES(\gamma_n)$

la aplicación contínua $\hat{f}_\alpha$ induce

$S^{2n} \xrightarrow{\hat{i}} M(\alpha) = E/E_0 \xrightarrow{\hat{\hat{f}}_\alpha} MU(n) = S^{2n} \cup$ celdas de dimensión mayor.

Esta composición representa una clase $\underline{g}$ en $\widetilde{MU}^{2n}(M(\alpha)) = MU^{2n}(E,E_0)$ y la imagen de $\underline{g}$ bajo $\hat{i}^*: \widetilde{MU}^{2n}(M(\alpha)) \longrightarrow \widetilde{MU}^{2n}(S^{2n})$ es $1 \in \widetilde{MU}^{2n}(S^{2n})$.

En el caso del fibrado complejo $\eta$ se tiene

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[dl, shift left, "p"] \arrow[dr, "i"] & & \\ CP^\infty \arrow[ur, shift left, "0\text{-sección}"] \arrow[rr, "f"] & & E/E_0 \arrow[r, "\hat{\hat{f}}_\eta", "1"'] & MU(1) \end{tikzcd} \qquad , \qquad g \in MU^2(MU(1))$$

Luego f es un representante de la clase $cf_1(\eta) = W \in MU^2(CP^\infty)$, o sea, $f^*(g)$ es la clase representada por $f = w$. Por tanto,

$$p^*w = i^*g$$

Utilizando la naturalidad resulta la

PROPOSICION 2.3. *Para cada fibrado complejo* $\alpha$ *de dimensión* 1 *sobre* X *se tiene*

$$\begin{aligned} MU^{q-2}(X) &\longrightarrow MU^q(X) \\ a &\longrightarrow a \cup cf_1(\alpha). \end{aligned}$$

PROPOSICION 2.4. *Para cada fibrado complejo* $\alpha$ *de dimensión* 1 *sobre* X, *la sucesión*

$$\ldots \longrightarrow MU^{q-2}(X) \longrightarrow MU^q(X) \longrightarrow MU^q(E_0) \longrightarrow MU^{q-1}(X) \longrightarrow \ldots$$

*es exacta.*

OBSERVACION. A esta sucesión por analogía a la cohomología ordinaria la llamamos sucesión de Gysin y podemos obtener el caso general usando un argumento usual.

## 3. CALCULO DEL ANILLO DE COBORDISMO $MU^*(RP^\infty)$.

Sea $\eta$ el fibrado canónico complejo de dimensión 1 sobre BU(1) y consideremos el diagrama conmutativo de transformaciones de fibrados

$$\begin{array}{ccc} BO(1) = RP^\infty & \longrightarrow & EU(1) \\ \pi \big\downarrow \alpha & & \big\downarrow \eta \\ BU(1) & \xrightarrow{f_\alpha} & BU(1) = CP^\infty \end{array}$$

donde $f_\alpha$ es la aplicación clasificante del fibrado complejo $\alpha$ de dimensión 1.

La esfera $S^1$ es fibra tanto de $\alpha$ como de $\eta$ y la aplicación de $S^1$ en $S^1$ determinada por la transformación $BO(1) \longrightarrow EU(1)$ induce un homomorfismo de $MU^2(CP^\infty)$ en sí mismo que lleva el elemento $y = cf_1(\eta)$ en el elemento $2y$; por consiguiente,

(3.1) $$\alpha = \eta \otimes \eta$$

Aplicando la sucesión de Gysin al fibrado $\eta \otimes \eta$, teniendo en cuenta que el espacio total de su fibrado asociado de esferas es $E_0(\eta \otimes \eta) = RP^\infty$, obtenemos

(3.2) $$\cdots \longrightarrow MU^{q-2}(CP^\infty) \xrightarrow{\smile cf_1(\eta \otimes \eta)} MU^q(CP^\infty) \xrightarrow{\pi^*} MU^q(RP^\infty) \longrightarrow MU^{q-1}(CP^\infty) \longrightarrow \cdots$$

Pero $cf_1(\eta \otimes \eta) = L(\eta,\eta)$ satisface la ley de un grupo formal (ver [2]) y es de la forma

(3.3) $$L(\eta,\eta) = 2W + \sum a_{ij} W^{i+j+2}$$

PROPOSICION 3.4. *Para* $CP^\infty$, *en la sucesión de Gysin* (3.2), $\smile L(\eta,\eta)$ *es un monomorfismo.*

*Demostración.* En efecto, $L(\eta,\eta) = 2W$ + términos en W de dimensión mayor.

Sea $\chi \in MU^*(CP^\infty)$, entonces $\chi = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i W^i$, $\alpha_i \in MU^*(S^0)$. Supongamos que $\alpha_k$ es el primer coeficiente no nulo, entonces

$$\chi = \alpha_k W^k + \alpha_{k+1} W^{k+1} + \dots$$

y $\quad L(\eta,\eta)\chi = 2\alpha_k W^{k+1}$ + términos en W de dimensión mayor.

Sin embargo, para $CP^n$ es $W^{n+1} = 0$, por consiguiente,

$$L(\eta_n,\eta_n) \smile W^n = 2W^{n+1} = 0$$

De la sucesión (3.2) y la Proposición 3.4 se deduce la

PROPOSICION 3.5. *La sucesión*

$$0 \longrightarrow MU^*(CP^\infty) \xrightarrow{\smile L(\eta,\eta)} MU^*(CP^\infty) \xrightarrow{\pi^*} MU^*(RP^\infty) \longrightarrow 0$$

*es exacta.*

OBSERVACION. Como $\pi^*$ es un epimorfismo, entonces Ker $\pi^*$ es el ideal en $MU^*(CP^\infty)$ generado por $L(\eta,\eta)$.

De las anteriores proposiciones se deduce el

TEOREMA 3.6. *El anillo de Cobordismo* $MU^*(RP^\infty)$ *es isomorfo al anillo de series formales* $\pi_*(MU)[[W]]$ *módulo el ideal generado por* $L(\eta,\eta) = 2W + \sum \alpha_{ij} W^{i+j}$.

## REFERENCIAS


[1] ADAMS, J.F., *Lectures on generalized cohomology*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 99 (1969), Springer-Verlag.

[2] ----------- *Quillen's work on formal Groups and Complex Cobordism*, Lecture Notes, University of Chicago 1970.

[3] ATIYAH, M.F., *Bordism and Cobordism*, Proc. Cambridge Phil. Soc. 57 (1961) 200-208.

[4] CONNER, P.E. y FLOYD, E.E., *The Relation of Cobordism to K-Theory*, Lecture Notes in Mathematics, Vol.28 (1966) Springer-Verlag.

[5] DOLD, A., *Relations between ordinary and extraordinary Cohomology*, Colloquium on Algebraic Topology, Aartus 1962.

[6] HANSEN, IDAR, *Stable Operations on Complex Cobordism*, Tesis, Oslo 1970.

[7] NOVIKOV, S.P., *Homotopy properties of Thom Complexes*, Math. Sb.57 (1962), 407-442.

[8] ------------- *The methods of Algebraic Topology from the point of view of Cobordism Theory*, Math. USSR-Izvestija, Vol. 31 (1967) 827-913.

[9] WHITEHEAD,,G.W., *Homology theories and duality*, Trans. Amer. Math., Soc.102 (1962) 277-283.



Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Lima, Perú.


Recibido en agosto de 1972.