Revista de la
Unión Matemática Argentina
Volumen 26, 1973.

SOBRE LAS LEYES DE CONSERVACION DE UNA TEORIA GENERAL DEL CAMPO UNIFICADO

por Fernando G. Basombrío

ABSTRACT. Conservation Laws of the "zero divergence" type are deduced, corresponding to the A. Einstein's Unified Field theory and some of its generalizations.

Starting from the Lagrangian (1), (2) we get the conservation law (20), where A_ℓ^t is given by (19).

In the last part we analyse the changes on the form of A_ℓ^t originated by "divergence transformations" of the Lagrangian, and we obtain as a particular case the well known expression of the energy-momentum pseudo-tensor of the General Relativity in the absence of matter.

1. INTRODUCCION. Se trata de deducir las "ecuaciones de conservación" correspondientes a la teoría del Campo Unificado de A. Einstein ampliada por L. A. Santaló [5] que tiene en cuenta, para la constitución del Lagrangiano, al tensor de segundo rango más general que depende solo de la conexión Γ^m_{ih} (no necesariamente simétrico) y de sus derivadas de primer orden, siendo como función de las Γ^m_{ih} a lo sumo de segundo grado,

$$L(G^{ih};\ \Delta^r_{qs};\ \Delta^r_{qs,\ell};\ S^r_{qs,\ell}) = F_{ih}\ G^{ih} \quad \text{con } G^{ih} = \sqrt{|g|}\, g^{ih} \tag{1}$$

$$F_{ih} = \alpha R_{ih} + \beta(\Delta^m_{im,h} - \Delta^m_{hm,i}) + \gamma S_{ih;m}{}^{m} + \delta S^q_{ir}\ S^r_{hq} +$$
$$+ \varepsilon S_{i;h} + \psi S_{h;i} + \mu S_m\ S^m_{ih} + \nu S_i\ S_h \tag{2}$$

donde

$$\Delta^m_{ih} = \frac{1}{2}(\Gamma^m_{ih} + \Gamma^m_{hi}) \quad , \quad S_{ih} = \frac{1}{2}(\Gamma^m_{ih} - \Gamma^m_{hi}) \quad , \quad S_i = S^m_{im}$$

Los coeficientes α, β,..., ν son constantes. El punto y coma indica derivación covariante respecto de la conexión Γ^m_{ih}. La coma indica derivación ordinaria.

2. RESULTADOS CONOCIDOS EN RELATIVIDAD GENERAL.

Se resumirá previamente la aplicación del método a la obtención de las ecuaciones de conservación bien conocidas de la Relatividad, al solo efecto de facilitar la interpretación posterior de identidades análogas de la teoría general.
La densidad de Lagrangiano es suma de las densidades correspondientes a la materia y al campo gravitatorio ([3], [9])

$$L = L_m(\Phi^i;\ \Phi^i_{,\ell};\ g^{ik}) + L_G(g^{ik};\ g^{ik}_{,\ell}) =$$

$$= \sqrt{|g|}\,[\Lambda(\Phi^i;\ \Phi^i_{,k}) + \frac{c^4}{16\pi k}\, G(g^{ik};\ g^{ik}_{,\ell})] \qquad (3)$$

$$\Phi^i,\ g^{ik}\text{: potenciales, } G = g^{ik}(\{^{m}_{i\ell}\}\{^{\ell}_{km}\} - \{^{\ell}_{ik}\}\{^{m}_{\ell m}\}) \qquad (4)$$

Λ: Lagrangiano correspondiente a la materia.

La "acción" es entonces

$$S = S_m + S_G = \frac{1}{c}\int_{\mathcal{D}} L\, dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \qquad (5)$$

donde c representa la velocidad de la luz, y $\mathcal{D}$ es un dominio cuadridimensional del espacio-tiempo.

2.1. Ecuaciones de conservación.

Llamaremos "ley de conservación" solo a aquellas relaciones que sean del tipo "cuadridivergencia nula", que son las que efectivamente llevan a la conservación de una cierta magnitud integral por aplicación del teorema de Gauss.
Se usará el método general descripto en [2], (Teorema de Noether), que permite obtener para cada transformación de simetría del Lagrangiano, una identidad de conservación.

Si designamos en general con $\psi^\alpha(x)$ (α=1,...,m) a las expresiones en coordenadas de los potenciales de campo, y con ψ^α_k (k=1,...,n) a sus derivadas parciales, (es decir $L(x^k, \psi^\alpha, \psi^k_\ell)$), una transformación del tipo

$$x'^k = f^k(x) \quad , \quad \psi'^\alpha(x') = F^\alpha(\psi(x).x) \tag{6}$$

se llamarán "de simetría", cuando deja invariantes a las ecuaciones del campo y a la expresión de la acción. Si los potenciales satisfacen tales ecuaciones, si se consideran en lugar de las (6), transformaciones infinitesimales del tipo

$$x'^k = x^k + \xi^k \quad , \quad \psi'^\alpha(x') = \psi^\alpha(x) + \delta\, \psi^\alpha(x) \tag{7}$$

y si la dependencia funcional del Lagrangiano respecto de sus parámetros es invariante, se demuestra ([2]) que debe cumplirse la relación del tipo conservación,

$$(A^k_\ell\, \xi^\ell + B^k_\alpha\, \delta\, \psi^\alpha)_{,k} = 0 \tag{8}$$

donde

$$A^k_\ell = L\, \delta^k_\ell - \frac{\partial L}{\partial \psi^\alpha_k}\, \psi^\alpha_\ell \qquad B^k_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \psi^\alpha_k} \tag{8'}$$

Consideremos ahora en Relatividad General al subgrupo del grupo total de transformaciones infinitesimales de coordenadas,

$$x^k \to x'^k = x^k + \xi^k \quad , \quad \delta\, \psi^\alpha = 0 \tag{9}$$

ξ^k: constantes pequeñas, arbitrarias.

Es sabido que G no es invariante para el grupo total, pero sí para este subgrupo. Se verifica entonces fácilmente, que (9) es una transformación de simetría para el Lagrangiano dado en (3). Aplicando (8) queda

$$\xi^\ell A^k_{\ell,k} = 0 \quad \text{para todo } \xi^\ell \Rightarrow A^k_{\ell,k} = 0 \tag{10}$$

que para (3) da las bien conocidas leyes de conservación (ver [3] pág. 388 y [9] pág. 270)

$$[\sqrt{|g|}\,(T^k_\ell + t^k_\ell)]_{,k} = 0 \tag{11}$$

$$T^k_\ell = \Lambda\, \delta^k_\ell - \frac{\partial \Lambda}{\partial \Phi^\alpha_{,k}}\, \Phi^\alpha_{,\ell} :$$ Tensor energía-impulso de la materia. (12)

$$\sqrt{|g|}\, t^k_\ell = L_G\, \delta^k_\ell - \frac{\partial L_G}{\partial g^{rs}_{,k}}\, g^{rs}_{,\ell} :$$ (no) pseudo-tensor energía-impulso del campo gravitatorio. (13)

2.2. Identidades adicionales.

Si se considera la invariancia de la acción

$$S_m = \frac{1}{c} \int_D L_m\, dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \qquad (14)$$

para cambios infinitesimales generales de coordenadas tipo (7) (además ξ y sus derivadas hasta el orden dos inclusive, nulos en la frontera de D), teniéndose en cuenta que los Φ_i satisfacen las ecuaciones eulerianas de la materia se obtienen las identidades (ver [3] pág. 347 y 348)

$$T^k_{i;k} \equiv \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x^k} (\sqrt{|g|}\, T^k_i) - \frac{1}{2}\, g_{k\ell,i}\, T^{k\ell} = 0 \qquad (15)$$

con

$$\frac{1}{2} \sqrt{|g|}\, T_{ik} = \frac{\partial}{\partial x^\ell} \frac{\partial L_m}{\partial g^{ik}_{,\ell}} - \frac{\partial L_m}{\partial g^{ik}} \qquad (16)$$

que es equivalente a (12) (ver [3]), pero simétrico.
(15) es solamente una generalización a espacios curvos de la ley de conservación en Relatividad Especial (*).

3. ECUACIONES DE CONSERVACION DE LA TEORIA GENERAL DEL CAMPO UNIFICADO.

Pasemos ahora a efectuar un desarrollo análogo para las ecuaciones propuestas por L. Santaló en [5].
Considerando variaciones de las magnitudes, nulas en la frontera

(*) Si se procede analogamente con S_G, se verifica que las ecuaciones respectivas (15) se satisfacen identicamente ([3] pág. 379). Esto está ligado al hecho de que, el tensor de Ricci ha sido elegido de forma tal que las ecuaciones de la gravitación sean compatibles con las identidades (15) de la materia.

de $\mathcal{D}$, arbitrario, la variación de la acción que en general es:

$$\delta S = \int_{\mathcal{D}} G^{ih}\, \delta F_{ih}\, dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 +$$

$$+ \int_{\mathcal{D}} F_{ih}\, \delta G^{ih}\, dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = 0 \qquad (17)$$

suministra respectivamente para cada integral las ecuaciones de campo dadas en [5].

$$K_r^{qs} = 0 \quad , \quad F_{qs} = 0 \qquad (18)$$

donde K_r^{qs} está por una compleja expresión de los argumentos del Lagrangiano (1).

3.1. Ecuaciones de conservación.

Aquí también se comprueba en forma inmediata que las (9) son transformaciones de simetría para (1), y por lo tanto vale (10). Si se aplica la expresión (8) a la densidad de Lagrangiano (1), se obtiene por derivación directa,

$$A_\ell^t = F_{ih}\, G^{ih}\, \delta_\ell^t - \alpha(\Delta^t_{ih,\ell} + S^t_{ih,\ell})G^{ih} +$$

$$+ \alpha(\Delta^m_{im,\ell} + S^m_{im,\ell})G^{it} - \beta(\Delta^m_{im,\ell}G^{it} - \Delta^m_{hm,\ell}G^{th}) -$$

$$- \gamma\, S^t_{ih,\ell}G^{ih} - \varepsilon\, S_{i,\ell}\, G^{it} - \psi\, S_{h,\ell}\, G^{th}$$

y reagrupando,

$$A_\ell^t = F_{ih}\, G^{ih}\, \delta_\ell^t - (\alpha\, \Delta^t_{ih,\ell} + (\alpha+\gamma)S^t_{ih,\ell})\, G^{ih} +$$

$$+ [\,(\alpha-\beta)\, \Delta^m_{im,\ell} + (\alpha-\varepsilon)\, S_{i,\ell}]\, G^{it} +$$

$$+ (\beta\, \Delta^m_{hm,\ell} - \psi\, S_{h,\ell})\, G^{th} \quad (*) \qquad (19)$$

que en general, no es un tensor. Puede llevarse a la forma

(*) Nótese que con las ecuaciones de campo, el primer término del segundo miembro es nulo.

$$A_{\ell}^{t} = \sqrt{|g|}\,(T_{\ell}^{t} + t_{\ell}^{t})$$

T: tensor , t: no tensor
de diversas maneras, que dependerán esencialmente de la interpretación física a atribuir a T y t.
Las expresiones logradas

$$A_{\ell,t}^{t} = 0 \qquad (20)$$

son bien del tipo "conservación". Haciendo $\alpha=1$, $\beta=\gamma=\ldots=\nu=0$, se particularizan para la teoría de Einstein (1950) ([1] Apéndice II). Identidades distintas del tipo (20) fueron obtenidas para esta teoría por E. Schroendinger [8] y A. Papapetrou [7], pero las (19) presentan la ventaja de poderse reducir directamente a las expresiones conocidas en Relatividad General (ver punto 4).

3.2. Identidades adicionales.

Para completar el aspecto comparativo de los distintos tipos de identidades surgidas de las propiedades de invariancia, se agregan ahora algunos resultados conocidos.
Relaciones en cierta forma correspondientes a (15) han sido deducidos para la teoría de Einstein por A. Lichnerowicz [4], y para la teoría general por L.A. Santaló [6]. No se presentan, por cierto, con estructura de divergencia covariante.
El método de deducción no es exactamente el mismo que se sigue en 2.2. Está basado en la nulidad individual de cada una de las integrales de (17), debido a la independencia de los parámetros G^{ih} y Γ_{jk}^{i}.
Partiendo de cualquiera de ellas, se llega a

$$M_{i,s}^{s} + \frac{1}{2} F_{pq}\, G_{,i}^{pq} = 0 \qquad (21)$$

con $$M_{t}^{n} = \frac{1}{2}(F_{tj}\, G^{nj} + F_{it}\, G^{in}) - \frac{1}{2}\,\delta_{t}^{n}\, G^{ij}\, F_{ij}$$

En el caso $\alpha=1$, $\beta=\gamma=\ldots=\nu=0$, se reducen a las de [4] y si a su vez se toma g^{ij} simétrico y Γ_{jk}^{i} los símbolos respectivos de Christoffel, como lo señala A. Lichnerowicz en [4], se obtienen las conocidas identidades de la Relatividad General en ausencia de materia,

$$(R^{\lambda}_{\rho} - \frac{1}{2}\,\delta^{\lambda}_{\rho}\,R)_{;\lambda} = 0$$

donde R_{ij} es el tensor de Ricci.

Tanto (20) y (21) como (11) y (15) son expresiones implicadas por los respectivos principios variacionales (o las ecuaciones equivalentes de campo) y por las propiedades de invariancia. Por lo tanto cualquiera de ellas no constituye una relación "nueva" respecto de la restante.

4. TRANSFORMACIONES "DE DIVERGENCIA" DEL LAGRANGIANO.

Es sabido en teoría de campos que la expresión del tensor de energía-impulsión no es única. Dos tensores de energía-impulsión se dicen equivalentes si su diferencia es de divergencia identicamente nula.

Por otro lado, si se modifica el Lagrangiano de la siguiente forma

$$L \to L + \Omega^{s}{}_{,s} \qquad s = 1,\dots,n \tag{22}$$

n: número de variables independientes

donde las Ω^{s} son funciones que dependen sólo de las variables independientes y de los potenciales de campo (transformaciones "de divergencia", ver [2]), las ecuaciones del campo permanecen invariantes.

Puede uno preguntarse como variará la expresión de $A^{k}_{\ell,}$ (8'), por transformaciones de este tipo. La respuesta se sintetiza en el siguiente (*)

LEMA. *Si las funciones* Ω^{k} (k=1,...,n) *dependen sólo de los potenciales de campo* ψ^{α} (α=1,...,m), *entonces los tensores* A^{k}_{ℓ} *del Lagrangiano* L *y* $\tilde{A}^{k}_{\ell}$ *del Lagrangiano transformado* $\tilde{L} = L + \Omega^{s}{}_{,s}$ *(transformación que conserva las ecuaciones de campo) son equivalentes.*

En efecto,

$$A^{k}_{\ell} = L\,\delta^{k}_{\ell} - \frac{\partial L}{\partial \psi^{\alpha}_{k}}\,\psi^{\alpha}_{\ell}$$

(*) Sugerido en la parte final de [2].

$$\tilde{A}^k_\ell = A^k_\ell + \Omega^\sigma_{\ ,\sigma}\ \delta^k_\ell - \frac{\partial}{\partial\psi^\alpha_k}(\Omega^\sigma_{\ ,\sigma})\ \psi^\alpha_\ell = A^k_\ell + H^k_\ell \tag{23}$$

pero

$$\Omega^\sigma_{\ ,\sigma} = \frac{\partial\Omega^\sigma}{\partial\psi^\beta}\ \psi^\beta_\sigma$$

y

$$\frac{\partial}{\partial\psi^\alpha_k}(\Omega^\sigma_{\ ,\sigma}) = \frac{\partial}{\partial\psi^\alpha_k}\left(\frac{\partial\Omega^\sigma}{\partial\psi^\beta}\ \psi^\beta_\sigma\right) = \frac{\partial\Omega^k}{\partial\psi^\alpha} \qquad ; \qquad \Omega^k_{\ ,\ell} = \frac{\partial\Omega^k}{\partial\psi^\alpha}\ \psi^\alpha_\ell$$

de donde

$$H^k_{\ell,k} = \Omega^\sigma_{\ ,\sigma k}\ \delta^k_\ell - \left(\frac{\partial\Omega^k}{\partial\psi^\alpha}\ \psi^\alpha_\ell\right)_{,k} = \Omega^\sigma_{\ ,\sigma\ell} - \Omega^k_{\ ,\ell k} \equiv 0 \qquad \text{c.q.d.}$$

Por ejemplo, en el caso de la teoría de Einstein ($\alpha=1, \beta=\ldots=\psi=0$) la fórmula (19) se reduce a

$$A^k_\ell = R_{ih}\ G^{ih}\ \delta^k_\ell - \Gamma^k_{ih,\ell}\ G^{ih} + \Gamma^m_{im,\ell}\ G^{ik} \tag{24}$$

Si se calcula la expresión análoga correspondiente al Lagrangiano usado por Papapetrou [7] (transformado "por divergencia" a partir de (1)):

$$\tilde{L} = G^{ih}\ R_{ih} - (G^{ih}\ \Gamma^\alpha_{ih})_{,\alpha} + (G^{i\alpha}\ \Gamma^\sigma_{i\sigma})_{,\alpha} \quad (*) \tag{25}$$

se obtiene

$$\tilde{A}^k_\ell = G^{ih}\ R_{ih}\ \delta^k_\ell - (G^{ih}\ \Gamma^\alpha_{ih} - G^{i\alpha}\ \Gamma^\sigma_{i\sigma})_{,\alpha}\ \delta^k_\ell -$$

$$- G^{ih}\ \Gamma^k_{ih,\ell} + G^{ik}\ \Gamma^\alpha_{i\alpha,\ell} + (G^{ih}\ \Gamma^k_{ih} - G^{ik}\ \Gamma^\sigma_{i\sigma})_{,\ell} \tag{26}$$

Se comprueba sin dificultad que su diferencia H^k_ℓ es de divergencia identicamente nula.

Esto permite ahora obtener como caso particular de (24) un tensor de expresión equivalente a la del $\hat{t}^k_\ell$ de la Relatividad General dada por Landau y Lipschitz ([3] pág. 388):

(*) El signo de los dos últimos términos está cambiado porque aquí se usa el tensor de Ricci con signo opuesto al de Papapetrou [7].

$$\sqrt{|g|}\, t^k_\ell = \sqrt{|g|}\, G\, \delta^k_\ell + \Gamma^k_{im}\, G^{im}_{,\ell} - \Gamma^i_{im}\, G^{mk}_{,\ell} = \hat{t}^k_\ell \tag{27}$$

que es consecuencia directa de (13) salvo constantes.
En efecto. Tanto en [3] pág. 342 en adelante, como en nuestro punto 2. se trabaja no con el Lagrangiano $G^{ih}\, R_{ih}$ sino con una transformación "de divergencia" de éste,

$$\sqrt{|g|}\, G = G^{ik}(\Gamma^m_{i\ell}\, \Gamma^\ell_{km} - \Gamma^\ell_{ik}\, \Gamma^m_{\ell m}) = G^{ik}\, R_{ik} -$$

$$- (G^{ik}\, \Gamma^\ell_{ik})_{,\ell} + (G^{ik}\, \Gamma^\ell_{i\ell})_{,k} \tag{28}$$

que resulta ser del mismo tipo que (25).Si entonces se particularizan (25) y (26) al caso G^{ih} y Γ^i_{jk} simétricos (los Γ^i_{jk} resultan ser los símbolos de Cristoffel y las ecuaciones de campo, las de la Relatividad General en ausencia de materia, ver [5]) la (26) da,

$$\tilde{A}^k_\ell = G^{ih}(\Gamma^\alpha_{ih}\, \Gamma^\beta_{\alpha\beta} - \Gamma^\alpha_{i\beta}\, \Gamma^\beta_{\alpha h})\, \delta^k_\ell - G^{ih}_{,\alpha}\, \Gamma^\alpha_{ih}\, \delta^k_\ell +$$

$$+ G^{i\alpha}_{,\alpha}\, \Gamma^\sigma_{i\sigma}\, \delta^k_\ell + G^{ih}_{,\ell}\, \Gamma^k_{ih} - G^{ik}_{,\ell}\, \Gamma^\sigma_{i\sigma}$$

Si, (como se procede en [3] pág. 344) para el segundo y tercer término del miembro derecho se consideran las fórmulas

$$\Gamma^i_{ki} = \frac{\partial}{\partial x^k}(\ln \sqrt{|g|}) \quad \text{y} \quad g^{ik}_{,\ell} = - \Gamma^i_{m\ell}\, g^{mk} - \Gamma^k_{m\ell}\, g^{im} \;,$$

la simetría de G^{ik} y Γ^i_{jk} y la expresión (4), queda entonces,

$$\tilde{A}^k_\ell = \sqrt{|g|}\;\; G\, \delta^k_\ell + G^{ih}_{,\ell}\, \Gamma^k_{ih} - G^{ik}_{,\ell}\, \Gamma^\sigma_{i\sigma}$$

que es idéntica a la expresión de $\hat{t}^k_\ell$ dada por Landau y Lipschitz (27).
O sea, la particularización directa al caso relativista de (19) y (24) da un tensor A^k_ℓ equivalente al $\hat{t}^k_\ell$ de (27), por medio de la transformación de simetría (28).

El autor agradece al Profesor Luis A. Santaló (Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Exactas) sus comentarios y sugerencias con motivo de la elaboración y redacción final del presente trabajo.

BIBLIOGRAFIA

[1] EINSTEIN, A.; *The meaning of Relativity*, 4th. Edition-Princeton 1957.

[2] HILL, E.L.; *Hamilton's Principle and Conservation Theorems of Mathematical Physics*, Review of Modern Physics. Vol. 23, N°3, pag. 253. Julio 1951.

[3] LANDAU, L.; LIFCHITZ, E.; *Théorie du Champ*, Ediciones MIR, Moscú 1966.

[4] LICHNEROWICZ, A.; *Compatibilité des Equations de la Théorie Unitaire du Champ d'Einstein*, Journal of Rational Mechanics and Analysis-Vol.3 N°5 pag. 487-1954.

[5] SANTALO, L.A.; *On Einstein's Unified Field Theory*, Perspectives in Geometry and Relativity-Indiana University Press-1966.

[6] -------------; *Unified Field Theories of Einstein's type deduced from a Variational Principle: Conservation Laws*, A publicarse en la revista "Tensor" 1972.

[7] PAPAPETROU, A.; *The question of non-singular solutions in the Generalized Theory of Gravitation*, Phys. Rev. 73, N°9, p. 1105-1948.

[8] SCHROEDINGER, E.; *The final Affine Field Laws III*, Proc. Royal Irish Academy 51 (A) - p. 163-1947.

[9] WEYL, H.; *Space Time Matter*, Ediciones Dover.

Departamento de Matemática.
Instituto de Cálculo.
Facultad de Ciencias
Exactas y Naturales.
Univ. de Buenos Aires.

Recibido en octubre de 1972.