Revista de la
Unión Matemática Argentina
Volumen 26, 1973.

SOBRE UNA FORMULA DE L. SCHWARTZ

Susana Elena Trione

SUMMARY. We obtain a causal (anticausal) generalization (1.7) of an important formula due to L. Schwartz (cf. [I], p. 258, formula (VII,7;14)).
As an application we show that our formula permits to give sense, in a natural way, to some of the so called "infinities" of quantum electrodynamics (cf. formulas (2.3) and (2.4)).

En esta nota consignamos una generalización causal (anticausal) de una importante fórmula de L. Schwartz (cf. [I], p. 258, fórmulas (VII, 7; 14)).
Nuestra fórmula (1.7) permite dar sentido, de manera natural, a ciertos "infinitos" de la electrodinámica cuántica (cf. fórmulas (2.3) y (2.4)).

1. Sea x un punto de R^n de coordenadas $x_1,x_2,\dots,x_n$. Pondremos

$$P = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - x_{p+2}^2 - \dots - x_{p+q}^2,\ \text{donde}$$

$p+q = n$ $(0 \leqslant p \leqslant n)$; p es el número de cuadrados positivos y q el número de cuadrados negativos de la forma cuadrática no degenerada P.

Pondremos también $\quad |x|^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$

Sea $\lambda \in C$. Escribiremos $(\varepsilon > 0)$

$$(P \pm io)^\lambda \overset{\text{def}}{=} \lim_{\varepsilon \to 0} (P \pm i\varepsilon|x|^2)^\lambda. \tag{1.1}$$

Se demuestra que las distribuciones $(P\pm io)^\lambda$ son funciones distribucionales holomorfas de λ salvo en los puntos $\lambda = -\frac{n}{2} - k$, con $k = 0,1,\dots,$ donde estas funciones distribucionales tienen polos simples (cf [3], capítulo III).

Desarrollemos $(P \pm io)^{-\frac{n}{2}-\lambda}$ en serie de Laurent, en un entorno del punto $\lambda = k$:

$$(P \pm io)^{-\frac{n}{2}-\lambda} = \frac{A_{-1}}{\lambda - k} + A_o + \sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu (\lambda - k)^\nu. \qquad (1.2)$$

La distribución A_o, es por definición, la parte finita de $(P \pm io)^{-\frac{n}{2}-\lambda}$ cuando $\lambda=k$. Nuestro propósito es obtener una expresión explícita de la distribución A_o.
Luego hacemos aplicaciones de la fórmula obtenida.
De acuerdo con (1.2) podemos escribir

$$A_o \overset{def}{=} Pf(P \pm io)^{-\frac{n}{2}-k} = \lim_{\lambda \to k} \frac{d}{d\lambda} \{(\lambda-k)(P \pm io)^{-\frac{n}{2}-\lambda}\} \qquad (1.3)$$

Teniendo en cuenta las fórmulas (3) y (3') de pág. 238 de [3] y antitransformada de Fourier(1), obtenemos

$$(P \pm io)^{-\frac{n}{2}-\lambda} = \frac{e^{\mp\frac{\pi}{2} qi}\, \pi^{\frac{n}{2}}\, 2^{2(-\frac{n}{2}-\lambda)}}{(2\pi)^n\, \Gamma(\lambda+\frac{n}{2})} \Gamma(-\lambda)\, F^{-1}(Q \mp io)^\lambda , \qquad (1.4)$$

donde con Q designamos la forma cuadrática

$$Q = y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - y_{p+2}^2 - \dots - y_{p+q}^2 .$$

De (1.3) y (1.4) resulta

$$Pf(P \pm io)^{-\frac{n}{2}-k} =$$

$$= \lim_{\lambda \to k} \frac{d}{d\lambda} \{(\lambda-k) \frac{e^{\mp\frac{\pi}{2} qi}\, \pi^{\frac{n}{2}}\, 2^n\, 2^{2(-\frac{n}{2}-\lambda)}}{(2\pi)^n\, \Gamma(\lambda+\frac{n}{2})} \Gamma(-\lambda)\, F^{-1}(Q \mp io)^\lambda \}. \qquad (1.5)$$

Recordemos ahora la fórmula bien conocida (cf [4], p.3, fórmula (4))

(1) La transformada de Fourier de la función f(x) es

$$F(f) = \hat{f}(y) \overset{def}{=} \int_{R^n} e^{-i\langle x,y\rangle} f(x)\, dx.$$

$$\Gamma(-\lambda) = \frac{(-1)^{k+1}\ \Gamma(-\lambda+k+1)\ \Gamma(\lambda-k)}{\Gamma(\lambda+1)}$$

De esta fórmula y de (1.5) obtenemos

$$Pf(P\pm io)^{-\frac{n}{2}-k} = e^{\mp\frac{\pi}{2}qi}\ \pi^{-\frac{n}{2}}\ 2^{-n}(-1)^{k+1}.\left\{\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{2^{-2\lambda}\Gamma(\lambda-k+1)\Gamma(-\lambda+k+1)}{\Gamma(\lambda+1)\ \Gamma(\lambda+\frac{n}{2})}\right).\right.$$

$$\left..F^{-1}(Q\mp io)^{\lambda} + \frac{d}{d\lambda}(F^{-1}(Q\mp io)^{\lambda}).\ \frac{2^{-2\lambda}\Gamma(\lambda-k+1)\Gamma(-\lambda+k+1)}{\Gamma(\lambda+1)\ (\lambda+\frac{n}{2})}\right\} \qquad (1.6)$$

Si evaluamos explícitamente las derivadas que figuran en (1.6) lo cual lleva aparejados cálculos largos pero elementales y que por eso omitimos, obtenemos tomando límites para $\lambda \to k$

$$Pf(P\pm io)^{-\frac{n}{2}-k} = \frac{\pi^{-\frac{n}{2}}\ 2^{-n-2k}\ e^{\mp\frac{\pi}{2}qi}\ (-1)^{k+1}}{\Gamma(\frac{n}{2}+k)\ k!}\ .$$

$$.\ F^{-1}\{(Q\mp io)^{k}\ lg(Q\mp io)\} + \frac{\pi^{-\frac{n}{2}}\ 2^{-n-2k}\ e^{\mp\frac{\pi}{2}qi}\ (-1)^{k}}{\Gamma(\frac{n}{2}+k)\ k!}\ .$$

$$.\ [F^{-1}(Q\mp io)^{k}\ .\ \{2\ lg2 + (1+\tfrac{1}{2}+\ldots+\tfrac{1}{k}-\gamma) + \frac{\Gamma'(\frac{n}{2}+k)}{\Gamma(\frac{n}{2}+k)}\}] \qquad (1.7)$$

que es la fórmula a que deseábamos llegar.

Interesa observar que como caso particular de la fórmula que precede, (cuando p=n, q=0), se obtiene una fórmula equivalente a una fórmula de Schwartz (cf.[I], p.258, fórmula (VII, 7;14)).

2. Consideraremos ahora la función distribucional

$$H_\alpha(P\pm io,n) = \frac{e^{\frac{\pi i\alpha}{2}}\ e^{\pm\frac{\pi}{2}iq}\ \Gamma(\frac{n-\alpha}{2})}{2^{\alpha}\ \Gamma(\frac{\alpha}{2})\ \pi^{\frac{n}{2}}}\ (P\pm io)^{\frac{1}{2}(\frac{\lambda-n}{2})} \qquad (2.1)$$

donde $\lambda \in C$ y $\frac{n-\lambda}{2} \neq$ entero positivo.

La función H_α constituye una generalización causal (anticausal) del núcleo elíptico de Marcel Riesz (ver [5], p.16).
Se demuestra (cf.[2], Teorema 17, p.39) que las funciones distribucionales pf $H_{2k}(P \pm io,n)$ son soluciones elementales, para todo k,del operador L^k definido por la fórmula

$$L^k = \{ \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_p^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_{p+1}^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_{p+2}^2} - \dots - \frac{\partial^2}{\partial x_{p+q}^2} \}^k$$

Señalemos que el caso particular del teorema recién citado, correspondiente a q=1, n=4, figura ya en [6], pp. 555-556.

Se puede probar que si

a) k entero $\geqslant 1$

b) ℓ entero $\geqslant 0$

c) $\ell[\frac{n}{2} - k] - \frac{n}{2}$ = entero $\geqslant 0$

entonces la expresión

$$\{H_{2k}(P \pm io,n)\}^\ell \qquad (2.2)$$

no tiene sentido como distribución. En cambio tiene sentido la parte finita de $\{H_{2k}(P \pm io,n)\}^\ell$ (en los puntos donde $\{(P \pm io)^{k-\frac{n}{2}}\}^\ell$ tiene polos simples).

Para calcularla basta con aplicar la fórmula (1.7) a

$$(P \pm io)^{\ell(k-\frac{n}{2})} = (P \pm io)^{-\frac{n}{2}-(\ell(\frac{n}{2}-k)-\frac{n}{2})} = (P \pm io)^{-\frac{n}{2}-r} ,$$

donde r es un entero $\geqslant 0$.

En el caso particular n=4, q=1, k=1, L^k no es sino el clásico operador de las ondas:

$$\square = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_4^2}$$

y las expresiones (2.2) adquieren la forma

$$\{H_2(P \pm io, n=4)\}^\ell = \{\mp \frac{i}{4\pi^2} (P \pm io)^{-1}\}^\ell \qquad (2.3)$$

Notemos que $H_2(P + io, n=4)$ coincide con la "delta fotónica" de Feynman, (llamada por los físicos $D^c(x)$) y que las expresiones (2.3) coinciden con ciertos famosos "infinitos" de la electrodinámica cuántica (cf.[6] y [7]).

Tenemos en el presente caso, de acuerdo con (1.7),

$$\{D^c(x)\}^{\ell} = \mathrm{Pf}\ \{\mp \frac{i}{4\pi^2} (P \pm io)^{-1}\} = \frac{(-1)^{\ell}\ e^{\pm\frac{\pi}{2}\ell i}}{4^{\ell}\ \pi^{n/2\ \ell}} \ .$$

$$. \frac{\pi^{-2}\ 2^{-4-2(\ell-2)}(-1)^{\ell(1)+1}}{\Gamma(\ell-2)\ (\ell-2)!} F^{-1}\{(Q\mp io)^{\ell-2}\ \lg(Q\mp io)\} +$$

$$+ \frac{\pi^{-2}\ 2^{-4-2(\ell-2)}\ (-1)^{\ell-2}}{\Gamma(\ell)\ (\ell-2)!} [F^{-1}(Q \mp io)\} \ .$$

$$. \{2\ \lg 2 + (1+\frac{1}{2}+ \ldots + \frac{1}{\ell-2} - \gamma) + \frac{\Gamma'(\ell)}{\Gamma(\ell)}\}] \qquad (2.4)$$

con lo cual hemos dado sentido distribucional (de manera natural, según nos parece), a los "infinitos" (2.3).

BIBLIOGRAFIA

[1] SCHWARTZ, Laurent, *Théorie des Distributions*, Paris, Hermann, 1966.

[2] TRIONE, Susana Elena, *Tesis doctoral "Sobre soluciones elementales causales de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales con coeficientes constantes"*, Universidad de Buenos Aires. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Buenos Aires, 1972.

[3] GELFAND, I.M., SHILOV, G.E., *Generalized Functions, Vol.I*, Academic Press, New York, 1964.

[4] BATEMAN, *Manuscript Proyect; Tables of Higher transcendental Functions*, Mc Graw-Hill, New York, 1953.

[5] RIESZ, Marcel, *L'intégrale de Riemann-Liouville et le problème de Cauchy*, Acta Math. Vol 81, 1949, pp. 1-223.

[6] BOLLINI, C.G., GIAMBIAGI, J.J. y GONZALEZ DOMINGUEZ,A., *Analytic, regularization and the quantum theory of fields*, Il Nuovo Cimento, XXXI, 1964, pp, 550-561.

[7] GUERRA, F., *On analytic regularization in quantum field theory*, Il Nuovo Cimento, vol 1 A, serie 11, 1971,pp. 523-535.

Universidad de Buenos Aires
Argentina.

Recibido en diciembre de 1972.