Revista de la
Unión Matemática Argentina
Volumen 27, 1974.

EL GRUPO DE WITT DE CIERTAS CLASES DE ANILLOS DE ENTEROS

Ignacio Kaplan y Horacio H. O'Brien

En este artículo calculamos el grupo de Witt del anillo de enteros de una extensión finita de Q, con la condición de que 2 no sea una unidad, y que tal anillo sea de Bezout.
En este trabajo tratamos de generalizar ciertos resultados de [2].
Sea entonces K una extensión finita de Q, A el anillo de enteros de K, tal que 2 no sea inversible en A, y A es un anillo de ideales principales.

1. Denotamos con Q(A) el grupo de extensiones cuadráticas de A; dado que 2 no es inversible en A, se tiene por [3] un epimorfismo

$$\mathrm{dis}:\mathrm{Witt}(A) \longrightarrow Q(A) \longrightarrow 0$$
$$\mathrm{dis}(P,q) = Z(C_0(P,q))$$

siendo $Z(C_0(P,q))$ el centro de la parte homogénea de grado 0 del álgebra de Clifford asociada.

Sea M(A) el núcleo de tal homomorfismo; sigue que el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M(A) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Witt}(A) \arrow[r] \arrow[d] & Q(A) \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & N(A) \arrow[r] \arrow[d] & H(A) \arrow[r] \arrow[d] & Q(A) \arrow[r] & 0 \\
& 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

es exacto y conmutativo, siendo las aplicaciones verticales las canónicas y H(A) el grupo de isomorfismos de álgebras de Clifford.

2.1. PROPOSICION. *Sea* (P,q) *un* A *módulo de rango* 4 *y discriminante* 1. *Entonces* q *admite un cero no trivial en toda completatación no arquimediana de* K.

Demostración. Sea L_v una tal extensión de K y A_v el anillo de valuación correspondiente.
Como L_v es una extensión finita de Q_p, para cierto primo p, se tiene que $Br(A_v) = 0$. [1]
En particular $N(A_v) = 0$. Entonces $(P \otimes A_v, q \otimes A_v)$ es un A_v módulo cuadrático de rango 4 y discriminante trivial, cuya álgebra de Clifford es nula.
Por lo tanto $(P \otimes A_v, q \otimes A_v) = H(A_v) \perp H(A_v)$, en virtud de [2] y obviamente tenemos la tesis.

2.2. COROLARIO. *Si* A *no está contenido en* R, *y* (P,q) *es un* A *módulo cuadrático de rango* 4 *y discriminante trivial entonces* (P,q) *es un espacio hiperbólico.*

Demostración. Dado que q admite un cero no trivial en toda completación, sigue que q admite un cero no trivial en A [4].
Por ser A un anillo de Bezout, (P,q) admite un espacio hiperbólico como sumando directo. [2]
Entonces $(P,q) = H(A) \perp (P',q')$, donde (P',q') es un A módulo cuadrático de rango 2 y discriminante trivial.
Dado que la aplicación canónica $\mathrm{Witt}(A) \longrightarrow \mathrm{Witt}(K)$ es un monomorfismo, se tiene que $(P',q') = H(A)$, de donde obtenemos la tesis.

2.3. COROLARIO. *Si* A *está contenido en* R, *y* (P,q) *es un* A *módulo cuadrático de rango* 4 *y discriminante* 1, *entonces* (P,q) *es un espacio hiperbólico si y sólo si* $(P \otimes R, q \otimes R)$ *es una forma real semidefinida.*

3.1. PROPOSICION. *Si* A *no está contenido en* R *entonces* $\mathrm{Witt}(A) = Q(A)$.

Demostración. Es claro que basta demostrar que $M(A) = 0$.
Dado que todo A módulo cuadrático de rango mayor o igual que 4 y discriminante 1 admite un cero no trivial en A, basta considerar el caso de rango 2 y discriminante trivial.
Pero en tal caso sigue trivialmente que $(P,q) = H(A)$, y consecuentemente tenemos la tesis.

4.1. PROPOSICION. *Si* A *está contenido en* R *entonces la aplica-*

ción canónica M(A) $\longrightarrow$ M(R) *es inyectiva.*

Demostración. Sea (P,q) un A módulo cuadrático de rango 2n y discriminante trivial, tal que $(P \otimes R, q \otimes R)$ es nulo en Witt(R).
Si la dimensión real de $P \otimes R$ es 2, el problema es trivial.
Si tal dimensión es 4, sigue que $q \otimes R$ es una forma cuadrática semidefinida y por (2.3) tenemos el resultado.
Finalmente si la dimensión es mayor o igual a 6, se tiene que q admite un cero no trivial en toda completación de K, y por lo tanto admite un espacio hiperbólico sobre A como sumando directo.
Iterando el procedimiento tenemos el resultado, pues resulta ser (P,q) un espacio trivial sobre A.

4.2. COROLARIO. *Si* A *está contenido en* R *entonces existe una sucesión exacta de la forma:*

$$0 \longrightarrow nZ \longrightarrow \mathrm{Witt}(A) \longrightarrow Q(A) \longrightarrow 0$$

donde n *es múltiplo de* 4.

Demostración. Es inmediata a partir del hecho que M(R) = 4Z.

4.3. COROLARIO. *Si* A *está contenido en* R *entonces* N(A) = 0 *ó* N(A) = Z_2.

Demostración. En efecto, N(A) es un subgrupo de $Br_2(A)$ por [3] y en este caso es imagen de un grupo cíclico.

4.4. PROPOSICION. *Si* N(A) = 0 *entonces* M(A) = 8Z *y la sucesión exacta*

$$0 \longrightarrow 8Z \longrightarrow \mathrm{Witt}(A) \longrightarrow Q(A) \longrightarrow 0$$

se parte.

Demostración. Sea (P,q) un A módulo cuadrático perteneciente a M(A).
Si el rango de P es 2, sea $\{v_1,v_2\}$ una base de P y sea

$\begin{Vmatrix} 2a & c \\ c & 2b \end{Vmatrix}$ la matriz de d_q en tal base, donde d_q es la forma bilineal asociada a q.

Dado que $4ab-c^2 = -1$, sigue que $x = -2v_1 + (c+1)v_2$ es un cero de q y por lo tanto $(P,q) = H(A)$.
Si rango de P es 4, dado que $N(A) = 0$, sigue que $C(P,q) = 0$ en $Br_2(A)$; entonces por [2] es un A módulo cuadrático trivial.

Si rango de P=6, sigue que q admite un cero no trivial en toda completación de K, y por lo tanto lo admite en A.
Sigue que $(P,q) = (P',q') \perp H(A)$, donde (P',q') es un A módulo cuadrático de rango 4 perteneciente a $M(A)$.
Por lo anterior se deduce que (P,q) es un espacio trivial.
Si n=8

$$\begin{Vmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{Vmatrix}$$

es la matriz correspondiente a un módulo cuadrático de rango 8 y discriminante 1. [2]
Por ser $(P \otimes R, q \otimes R)$ un R módulo cuadrático definido, se tiene que $(P,q) \neq 0$ en Witt(A).
La primer parte del teorema se deduce entonces del diagrama exacto y conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & M(A) & \longrightarrow & M(R) = 2Z \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ & 0 = & N(A) & \longrightarrow & N(R) = Z_2 \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ & & 0 & & 0 \end{array}$$

Veamos que la sucesión se parte.
Sea B un elemento de Q(A), y sea (P,q) un A módulo cuadrático de rango 2 tal que $Z(C_0(P,q)) = B$.

Dado que $N(A) = 0$, se deduce que es el único módulo de rango 2 (salvo isometrías) con esa propiedad.
En efecto, sea (P',q') un módulo de rango 2 con discriminante B.
Sigue entonces que $C(P,q) = C(P',q')$ en $H(A)$.
Dado entonces que rango P = rango P' = 2, sigue trivialmente que

$C(P,q)_{(1)} = C(P',q')_{(1)}$, y obtenemos el resultado parcial.
En las condiciones anteriores $2(P,q) = 0$ en Witt(A).
Sigue que la aplicación

$$Q(A) \longrightarrow \mathrm{Witt}(A)$$
$$B \longrightarrow (P,q) \quad \text{definida anteriormente}$$

es un homomorfismo.
Para esto es suficiente ver que si B_1 y B_2 son dos elementos de Q(A) y (P_1,q_1) , (P_2,q_2) son las imágenes respectivas, entonces $(P_1,q_1) \perp (P_2,q_2) = (P,q)$ donde este módulo cuadrático es imagen de $B_1 \times B_2$.
Dado que $(P_1,q_1) \perp (P_2,q_2) \perp (P,q)$ es un elemento de rango 6 en M(A) se deduce que es nulo en Witt(A).
Dado que $2(P,q) = 0$ en Witt(A), tenemos la tesis.

4.5. COROLARIO. *Si* A *está contenido en* R*,* $N(A) = 0$ *y* $Q(A) = 0$, *entonces* $\mathrm{Witt}(A) = 8Z$. *En particular, se tiene el resultado de* [2] : $\mathrm{Witt}(Z) = 8Z$.

4.6. PROPOSICION. *Si* $N(A) = Z_2$ *entonces* $M(A) = Z_2$.

Demostración. De todas las consideraciones anteriores, se deduce que $M(A) = 4Z$ ó $M(A) = 8Z$.
Si $M(A) = 8Z$, entonces el módulo cuadrático de rango 8, (P,q) asociado a la matriz de la proposición 4.4 , es un generador de M(A). Veamos que esto no puede suceder.
En efecto, dado que la aplicación $M(A) \longrightarrow N(A)$ es un epimorfismo, sea (P,q) un A módulo cuadrático de dimensión mínima, tal que $C(P,q) \neq 0$ en N(A).
Sigue que $(P,q) = n(P,q)$, lo cual es un absurdo pues obtenemos que $C(P,q) = nC(P,q) = 0$ en N(A).
Se deduce que rango $P = 4$, y obtenemos el resultado.

4.7. PROPOSICION. *Sea* A *contenido en* R *y* (P,q) *un* A *módulo cuadrático de rango* 2*, tal que* $(P \otimes R, q \otimes R)$ *tiene determinante negativo.*
Entonces $2(P,q) = 0$ *en* Witt(A).

Demostración. Sigue trivialmente que $(P,q) \perp (P,q)$ es un espacio hiperbólico en toda completación de K.

Por lo tanto $2(P,q)$ admite un cero no trivial en A.
Sigue entonces que $2(P,q) = H(A) \perp (P',q')$, donde este módulo es de rango 2.
Es fácil ver que $(P',q') = H(A)$, y tenemos el resultado.

4.8. COROLARIO. *Si* A *está contenido en* R, $N(A) = Z_2$, *entonces la sucesión exacta*

$$0 \longrightarrow 4Z \longrightarrow \mathrm{Witt}(A) \longrightarrow Q(A) \longrightarrow 0$$

se parte si y sólo si no existen módulos de rango 2 *cuyo determinante sea positivo.*

BIBLIOGRAFIA

[1] AUSLANDER,M., GOLDMAN,O., *The Brauer group of a commutative ring*, (T.A.M.S.), vol.97, 1960.

[2] LAROTONDA,A., MICALI,A., VILLAMAYOR,O., *Sur le groupe de Witt* (1972).

[3] MICALI,A., VILLAMAYOR,O., *Sur les algèbres de Clifford*, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup., (1968).

[4] O'MEARA, *Quadratic Forms*.

Universidad Nacional de Río Cuarto
Argentina

Recibido en julio de 1974