Revista de la
Unión Matemática Argentina
Volumen 27, 1975.

SOBRE UN TEOREMA DE R. PALAIS Y LOS METODOS DE PROYECCION $\Pi_\Phi\{P_n\}$

Carmen Casas

En esta nota examinamos la relación entre un teorema de Palais [3], reformulado adecuadamente, y un teorema de la teoría de los métodos de proyección Π de Galerkin [2]. Mostramos que en el caso considerado por Palais, de un álgebra A_Φ "approximately tame", a. t., ambos teoremas son equivalentes. En caso de álgebras A generales el teorema de Palais sugiere la introducción de un método de proyección que llamamos Π_Φ, y damos para el método Π_Φ dos teoremas de estabilidad así como un criterio general para que se verifique $T \in \Pi_\Phi$. Previamente examinamos la relación entre la noción de álgebra a. t. y la de ideal simétrico mono-normante, y de paso extendemos el teorema de Palais al caso de bases equivalentes a ortonormales y sustituímos la condición "tame" por otra más débil vinculada a la noción de operador casi triangular.

Cuestiones más finas, tales como caracterización de la clase Π_Φ, caso de bases generales, etc., serán consideradas en un trabajo próximo.

El tema me fue sugerido por el Prof. M. Cotlar a quien agradezco su generosa ayuda.

1. PRELIMINARES.

1.1. NOTACIONES. En todo lo que sigue H designará un espacio fijo de Hilbert, $\{e_n\}$ una base ortonormal fija del mismo, H_n el subespacio generado por $\{e_1,\dots,e_n\}$, P_n la proyección ortogonal de H sobre H_n, B(H) el espacio de los operadores lineales acotados $A: H \longrightarrow H$ con la norma usual $\|A\|$, $K_n = \{K \in B(H);\ \dim. K(H) = n\}$, $K = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$, y Ω_∞ el espacio de los operadores $X \in B(H)$ compactos con la misma norma $\|X\|$. Si A es invertible y $\{\varphi_j\} = \{A\, e_j\}$, entonces $\{\varphi_j\}$ se llama base equivalente a ortonormal; poniendo

$$P'_n\, x = \sum_{j=1}^{n} c_j\, \varphi_j, \text{ si } x = \sum_{j=1}^{\infty} c_j\, \varphi_j, \text{ vale } P'_n = A\, P_n A^{-1} \qquad (1)$$

En algunas situaciones más generales consideramos en vez de $\{e_n\}$ una base $\{\varphi_n\}$ equivalente a ortonormal con $\{P'_n\}$ en vez de $\{P_n\}$. Observemos que $P_n x \longrightarrow x$, $\forall x \in H$, o sea $P_n \longrightarrow 1$ fuertemente pero no en norma. Sin embargo se tiene (cfr. [3] pág. 274):

1.1.1. Si $P_n x \longrightarrow x$, $\forall x \in H$, $\|P_n\| \leqslant 1$, entonces $\|P_n A - A\| \longrightarrow 0$ y $\|AP_n - A\| \longrightarrow 0$ para todo $A \in \Omega_\infty$.

$A \in B(H)$ se dice triangular (respectivamente casitriangular) respecto de la sucesión $\{P_n\}$ (cfr. [4],[5]) si $P_n A P_n - P_n A = 0$ $\forall n$. (respect. $\|P_n A P_n - P_n\| \longrightarrow 0$).

Si $A \in \Omega_\Phi$ entonces, por 1.1.1, la última condición $\|P_n A P_n - P_n A\| \to 0$ equivale a $\|P_n A P_n - AP_n\| \longrightarrow 0$.

Para todo $A \in \Omega_\infty$ indicaremos con $\{s_j(A)\}$ a la sucesión de los números de Schmidt de A (cfr. [1]) de modo que

$$A\, x = \sum_{j=1}^{\infty} s_j(x, \varphi_j)\, \psi_j \;, \quad s_j = s_j(A) \qquad (2)$$

donde $\{\varphi_j\}$ (resp: $\{\psi_j\}$) es una base (sistema) ortonormal.

$$\text{Si } \hat{c} = \{\xi = (\xi_j) \in c_0 :\ \xi_j = 0 \text{ desde un } j\}\ , \qquad (3)$$

$\Phi(\xi) = \Phi(\xi_1, \xi_2, \ldots)$ es una función normante simétrica definida en $\hat{c}$ (cfr. [1], cap. III), y si

$$c_\Phi = \{\xi = (\xi_j) \in c : \|\xi\|_\Phi \equiv \sup_n \Phi(\xi_1 \ldots \xi_n, 0 \ldots 0) < \infty\} \qquad (4)$$

indicaremos con $\Omega_\Phi = \{X \in \Omega_\infty : \{s_n(X)\} \in c_\Phi\}$ al ideal normado simétrico asociado a Φ, con

$$\|X\|_\Phi = \|\{s_n(X)\}\|_\Phi \qquad (5)$$

Si $A \in \Omega_\infty$ es dado por (2) y si Q_n es el proyector ortogonal sobre el subespacio $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ designemos con

$$A_n = Q_n A = \sum_{j=1}^{n} s_j(x, \varphi_j)\, \psi_j \qquad (2a)$$

Se tiene entonces [1] que

$$\min_{K \in K_n} \|A - K\|_\Phi = \|A - A_n\|_\Phi = \Phi(s_{n+1}(A), s_{n+2}(A), \ldots) \qquad (6)$$

$$\inf_{K\in K} \|A - K\|_{\Phi} = \lim_{n\to\infty} \Phi(s_{n+1}(A), s_{n+2}(A), \dots) \qquad (6a)$$

1.2. LA CONDICION TAME. $A \subset B(H)$ designará un álgebra de Banach de operadores, cuya topología es más fina que la inducida por la de $B(H)$. $B(H_n)$ designará la subálgebra de $B(H)$ formada por los operadores A tales que $A(H_n)=H_n$ y $A(H_n^{\perp}) = 0$, de modo que $P_nAP_n \in B(H_n)$, $\forall A \in B(H)$.
Siguiendo a Palais [3] diremos que A cumple la condición "tame", o que A es un álgebra "approximately tame" respecto de la base $\{e_n\}$ fijada si:

1) $B(H_n) \subset A \quad \forall n=1,2,\dots$; 2) $P_nAP_n \to A$ en la norma de A, $\forall A \in A$

En particular si $A = \Omega_{\Phi}$ entonces 2) equivale a

$$2a) \quad \|P_nAP_n - A\|_{\Phi} \longrightarrow 0 \qquad (7)$$

y 2) implica que $A \subset \Omega_{\Phi}$.
La condición 2a) implica estas otras dos

3) $\|P_nAP_n - P_nA\|_{\Phi} \to 0$ y 3a) $\|P_nAP_n - AP_n\|_{\Phi} \to 0$ puesto que

$\|P_nAP_n - P_nA\|_{\Phi} = \|P_n(P_nAP_n) - P_nA\|_{\Phi} \leqslant \|P_n\| \; \|P_nAP_n - A\|_{\Phi}$

A su vez la 3) implica obviamente la

4) $\|P_nAP_n - P_nA\| \to 0$ o sea toda $A \in A$ es casitriangular.

Diremos que un operador $A \in \Omega_{\Phi}$ es *casitriangular-*Φ *a derecha* (respecto de $\{P_n\}$) si verifica 3), y *casitriangular-*Φ *a izquierda* si verifica 3a).
La casi triangularidad-Φ es pues una condición más débil que la "tame" de Palais.

1.3. EL TEOREMA DE PALAIS.

Pongamos:

$$\begin{aligned}
&G\,L\,(H) = \{T \in B\,(H): T \text{ invertible en } B\,(H)\}\\
&G\,L\,(n,\{P_n\}) = \{T \in G\,L\,(H): T = I + A,\ A \in B\,(H_n)\}\\
&G\,L\,(\infty,\{P_n\}) = \underline{\lim}_{n\to\infty}\, G\,L\,(n) = \text{límite inductivo de las } G\,L\,(n),\\
&G\,(A) = \{T \in G\,L\,(H): T = I + A,\ A \in A\}\\
&O = \{A \in A: 1 + A \in G\,L\,(H)\}
\end{aligned} \qquad (8)$$

Entonces se tiene:

1.3.1. TEOREMA DE PALAIS. *Si* A *es un álgebra "approximately tame"* *de operadores en* H, *entonces la inyección* $j: GL(\infty) \to G(A)$ *es una equivalencia homotópica. O sea, existe una aplicación continua* $q_1 : G(A) \to GL(\infty)$, $q_1(G(A)) = GL(\infty) \subset G(A)$, *tal que* jq_1 *así como* $q_1 j$ *son homotópicas a la aplicación identidad.*

Para lo que sigue conviene recordar la idea de la demostración de este teorema. Primeramente se define P_t para todo $t > 0$, por la fórmula

$$P_t = P_n + (t - n)(P_{n+1} - P_n), \quad n \leqslant t \leqslant n+1 \tag{8a}$$

Luego como $\mathcal{O}$ es un abierto de A, se define en $\mathcal{O}$ la función:

$$t'(A) = \inf\{t \geqslant 0,\ P_t A P_t + 1 = Q_t + 1 \text{ es inversible en } A\} \tag{8b}$$

Se prueba que $t'(A)$ es contínua superiormente, y que por tanto existe una función contínua $t(A)$ en $\mathcal{O}$, tal que

$$t(A) \geqslant t'(A), \quad A \in \mathcal{O} \tag{8c}$$

Se define $q_\tau : G(A) \to GL(\infty)$ por la fórmula

$$\begin{aligned} q_\tau(1+A) &= I + P_{\frac{1}{\tau}t(A)}\, A\, P_{\frac{1}{\tau}t(A)} = \\ &= P_{\frac{1}{\tau}t(A)}(1+A)\, P_{\frac{1}{\tau}t(A)} + (1 - P_{\frac{1}{\tau}t(A)}) \end{aligned} \tag{8d}$$

Se prueba entonces que

1.3.2. Si A es "approximately tame" entonces $\forall\, A \in A$,
$q_\tau(1 + A) \to 1 + A$ en A, cuando $\tau \to 0$,
$q_n(1 + A) \to 1 + A$ en A si $n \to \infty$.

De 1.3.2, resulta enseguida que $q_1 j$ es homotópica a la identidad de $GL(\infty)$, así como $j\, q_1$ homotópica a la identidad de $G(A)$, lo que prueba el teorema 1.3.1.

1.4. LA CLASE $\Pi\{P_n\}$.

Sea $\{P_n\}$ una sucesión de proyectores de H que convergen fuertemente a 1, $P_n x \to x$, $x \in H$. Diremos (cf [2]) que el operador $A \in B(H)$ pertenece a la clase $\Pi(P_n)$ si A es inversible en $B(H)$ y si $\forall n > n_0$ es $P_n A P_n$ invertible en $B(H_n)$ (o sea considerando $P_n A P_n$ como operador de H_n en H_n), y además

$$(P_n\ A\ P_n)^{-1}\ P_n\ x \longrightarrow A^{-1}x, \quad \forall\ x$$

Son de especial interés los dos casos siguientes:

a) $\{P_n\}$ es la sucesión de proyectores ortogonales correspondientes a una base ortogonal $\{e_n\}$.

b) $\{P_n\}$ es la sucesión de proyectores correspondientes a una base $\{\varphi_j\}$ no necesariamente ortonormal, pero equivalente a la base ortonormal $\{e_j\}$.

Vale la siguiente propiedad (cf. [2]) de frecuente aplicación:

1.4.1. $A \in \Pi\{P_n\}$ *si y sólo si* A *es invertible y existe un* $c > 0$ *tal que desde un* $n > n_0$ *se verifica*

$$\|(P_n\ A\ P_n)x\| \geqslant c\ \|P_n\ x\|\ , \quad x \in H \tag{9}$$

$$P_n\ A\ P_n\ (H_n) = H_n \tag{9a}$$

Mencionaremos aún los siguientes teoremas. (cf. [2])

1.4.2. *Si* $A = 1 + S + T$, $\|S\| < 1$ *y* T *un operador compacto entonces* $A \in \Pi\{P_n\}$ *, siendo* $\{P_n\}$ *cualquier sucesión de proyectores ortogonales.*

1.4.3. (Teorema de estabilidad I). *Si* $A \in \Pi\{P_n\}$, *entonces existe* $\gamma > 0$ *tal que para todo operador* B *de* H *en* H, *tal que* $\|B\| < \gamma$ *, entonces* $A + B \in \Pi\{P_n\}$, *o sea* $\Pi\{P_n\}$ *es un conjunto abierto.*

1.4.4. (Teorema de estabilidad II). *Si* $A \in \Pi\{P_n\}$ *y* T *es un operador compacto de* H *en* H *entonces* $A + T \in \Pi\{P_n\}$.

2. RELACION ENTRE IDEALES MONONORMANTES Y LA CONDICION DE PALAIS.

Siguiendo a [1] diremos que la función normante simétrica $\Phi(\xi)$ es mononormante, si para todo $\xi \in c_\Phi$ es

$$\lim_{n\to\infty} \Phi(\xi_{n+1}, \xi_{n+2}, \ldots) = \lim_{n,p\to\infty} \Phi(\xi_{n+1}, \ldots, \xi_{n+p}, 0, 0, \ldots) = 0$$

De (6) y (6a) del §1, se deduce enseguida que para toda Φ normante simétrica son equivalentes las condiciones siguientes:

a) Φ es mononormante.

b) Para todo $A \in \mathfrak{S}_\Phi$ existe una sucesión $\{B_n\} \subset K_n$ con $\|B_n - A\|_\Phi \longrightarrow 0$.

c) Para todo $A \in \Omega_\Phi$ es $\|A - A_n\|_\Phi \to 0$, donde $A_n = Q_n A$ es dado por (2a), §1.

2.1. PROPOSICION. *Para toda función normante Φ, son equivalentes las condiciones siguientes:*

a) *Φ es mononormante.*

b) *la condición* 2a), *osea* $\|P_n A P_n - A\|_\Phi \to 0$ *si* $n \to \infty$, *se verifica para todo* $A \in \Omega_\Phi$ *y para toda sucesión de proyectores ortonormales* $P_n \in K_n$ *asociados a una base ortonormal* $\{e_n\}$.

c) *la condición* 2a) *se verifica por lo menos para una sucesión* $\{P_n\}$ *ortogonal asociada a una base ortonormal* $\{e_n\}$.

d) *la condición* 2a) *se verifica para toda* $A \in \Omega_\Phi$ *y para toda sucesión de proyectores* $\{P_n\}$ *asociados a una base equivalente a una ortonormal.*

2.2. LEMA. *Sea* $\{P_n\}$ *una sucesión de proyectores ortogonales asociados a una base ortonormal* $\{e_n\}$, *Φ una función mononormante simétrica, entonces para todo* $A \in \Omega_\Phi$ *vale*

$$\|A(1 - P_n)\|_\Phi \to 0, \text{ y } \|(1 - P_n)A\|_\Phi \to 0$$

Demostración. Consideraremos primero el caso A de rango 1, entonces existen dos vectores φ, ψ, tales que $\forall x \in H$

$$Ax = c(x, \psi)\varphi \ , \ \|\varphi\| = 1, \ c > 0$$

Además $\|A(1 - P_n)\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|A(1 - P_n)x\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|c((1 - P_n)x,\psi)\varphi\| =$

$= \sup\limits_{\|x\|=1} c\|(x,(1 - P_n)\psi)\varphi\| = c \sup\limits_{\|x\|=1} \|(x,(1 - P_n)\psi)\varphi\| \leq c\|(1-P_n)\psi\|$

O sea $\|A(1 - P_n)\| \leq c\|(1 - P_n)\psi\|$ y como $(P_n - 1)\psi \to 0$ resulta

$$\lim_{n\to\infty} \|A(1 - P_n)\| = 0 \qquad (10)$$

Como $A(1 - P_n)$ es de rango 1, y $A \in \Omega_\Phi$ es $\|A(1 - P_n)\|_\Phi = \|A(1 - P_n)\|$ y de (10) resulta

$$\|A(1 - P_n)\|_\Phi \to 0 \qquad (11)$$

Consideremos ahora A un operador de rango finito m, entonces $A = \sum\limits_{0\leq k\leq m} \lambda_k B_k$, donde los B_k son operadores de rango 1.

Como $\|A(1 - P_n)\|_\Phi \leq \sum\limits_{0\leq k\leq m} |\lambda_k| \ \|B_k(1 - P_n)\|_\Phi$, y por (11) cada término tiende a 0, resulta $\|A(1 - P_n)\|_\Phi \to 0$.

Finalmente sea $A \in \Omega_\Phi$, por §2.b existe un $B \in K_N$ tal que

$\|B - A\|_\Phi < \frac{\varepsilon}{3}$.

Además por (11) $\|B(1 - P_n)\|_\Phi < \frac{\varepsilon}{3}$ $\forall\, n > n_0$ luego

$\|A(1 - P_n)\|_\Phi \leqslant \|A - B\|_\Phi + \|B(1 - P_n)\|_\Phi + \|(B - A)P_n\|_\Phi < \varepsilon$, $\forall\, n > n_0$

o sea

$$\|A(1 - P_n)\|_\Phi \longrightarrow 0 \qquad \text{c.d.d.}$$

Demostración de la proposición 2.1. a) $\Rightarrow$ b)

$\|A - P_n A P_n\|_\Phi \leqslant \|A(1 - P_n)\|_\Phi + \|(1 - P_n)A P_n\|_\Phi \leqslant \|A(1 - P_n)\|_\Phi +$

$+ \|(1 - P_n)A\|_\Phi \|P_n\|$

y por el lema 2.2 cada término tiende a 0, luego $\|A - P_n A P_n\|_\Phi \to 0$.

b) $\Rightarrow$ c) trivial.

a) $\Rightarrow$ d) Sea $\{e_j\}$ una base ortonormal de H y $\{\varphi_j\}$ su base equivalente, y $\{P_n\}$ y $\{P_n'\}$ los proyectores asociados a $\{e_j\}$ y $\{\varphi_j\}$ respectivamente; $\varphi_j = A e_j$ y $P_n' = A P_n A^{-1}$ por 1.1 (1). Sea $B \in \Omega_\Phi$; por b) vale $\|P_n B P_n - B\|_\Phi \longrightarrow 0$. Entonces $\|P_n' B P_n' - B\|_\Phi =$

$= \|A P_n A^{-1} B A P_n A^{-1} - A A^{-1} B A A^{-1}\|_\Phi =$

$= \|A(P_n A^{-1} B A P_n - A^{-1} B A)A^{-1}\|_\Phi \leqslant \|A\| \|A^{-1}\| \|P_n A^{-1} B A P_n - A^{-1} B A\|_\Phi$

y la última expresión tiende a 0 pues $A^{-1} B A \in \Omega_\Phi$ es decir $\|P_n' B P_n' - B\|_\Phi \longrightarrow 0$.

d) $\Rightarrow$ c) trivial.

c) $\Rightarrow$ a) Si se verifica 2a) para una sucesión de proyectores, como $Q_n = P_n A P_n \in K_n$, 2a) significa que existe $\{Q_n\} \in K$ con $\|A - Q_n\|_\Phi \longrightarrow 0$ y por §2.b) Φ es mononormante.

2.4. COROLARIO. *Si la propiedad* 2a) *se verifica para una sucesión* $\{P_n\}$ *de proyectores ortogonales asociados a una base* $\{e_n\}$ *ortonormal se cumple para cualquier otra sucesión* $\{P_n\}$ *asociados a otra base ortonormal.*

Observemos que vale el siguiente lema.

2.5. LEMA. *La función normante simétrica* Φ *es mononormante, si la condición* $\|A - A_n\|_\Phi \longrightarrow 0$ *se verifica para todo* $A \in \Omega_\Phi$, $A > 0$. (*donde* A_n *es dado por* 2a §1).

Sea $\xi = \{\xi_n\} \in C_\Phi$, y $\{\varphi_j\}$ una base ortonormal de H. Consideremos el operador $Ax = \sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i| (x,\varphi_i)\varphi_i$; entonces $A \in \Omega_\Phi$ y $A > 0$.

$$A_n x = \sum_{i=1}^{n} |\xi_i| (x,\varphi_i)\varphi_i \text{ y } \|A-A_n\|_\Phi = \sup_k \Phi(\xi_{n+1},\xi_{n+2},\dots,\xi_{n+k},0,\dots,0).$$

Ya que por hipótesis $\|A - A_n\|_\Phi \longrightarrow 0$, resulta

$$\lim_{n,k\to\infty} \Phi(\xi_{n+1},\xi_{n+2},\dots,\xi_{n+k},0,\dots,0) = 0$$

es decir Φ es mononormante.

Como Φ_Π no es mononormante resulta:

2.6. COROLARIO. *Existe un* $A \in \Phi_\Pi$, $A > 0$ *tal que* $\|A - A_n\|_\Phi$ *no converge para* $n \longrightarrow \infty$.

Como Φ_Π y los Φ_p son mononormantes obtenemos el siguiente corolario que contiene el teorema E de Palais (cf. [3]):

2.7. COROLARIO. *Si* Φ *es mononormante, entonces* $A = \Omega_\Phi$ *es un álgebra 'approximately tame' en sentido de Palais.*

En particular, las álgebras Ω_p y Ω_Π son 'approximately tame' respecto de toda base ortonormal así como de toda base equivalente a ortonormal.

3. EL TEOREMA DE PALAIS Y LA CLASE $\Pi\{P_n\}$.

Sea Φ mononormante y $A = \Omega_\Phi$. Por 2.7 sabemos que A es 'approximately tame' respecto de $\{P_n\}$ generales asociados a bases equivalentes a ortonormales, luego a $\Omega_\Phi = A$ se aplica el teorema de Palais 1.3.1 y 1.3.2.

Ahora relacionaremos este teorema (en caso de $A = \Omega_\Phi$) con el método de proyección $\Pi\{P_n\}$ (ver 1.4). Observemos antes que si $G(A)$ es la clase definida en (8) del 1.3, se tiene

3.1. LEMA. *Sea* Φ *normante simétrica* $A = \Omega_\Phi$. *Entonces para todo* $1 + A \in G(A)$ *es* $(1+A)^{-1} \in G(A)$. *Luego poniendo* $V(1+A) = (1+A)^{-1}$, *tenemos que* $V: G(A) \to G(A)$ *es un operador contínuo en* $G(A)$.

Demostración. Si $C = (1+A)^{-1}$, $(1+A)C = 1$, entonces $C = 1-AC$, y de $A \in A$ es $AC \in A$ y $1-AC = C$ es invertible, luego $(1+A)^{-1} = C \in G(A)$.

Además: $A_n \longrightarrow A$ en A implica $(1+A_n)^{-1} \longrightarrow (1+A)^{-1}$ en A, pues $1 + A_n = 1 + A + \varepsilon_n$ con $\|\varepsilon_n\|_\Phi \longrightarrow 0$,

$$1 + A_n = (1+A)[1 + (1+A)^{-1}\varepsilon_n] = (1+A)(1+\eta_n) \text{ donde } \|\eta_n\|_\Phi \longrightarrow 0.$$

Luego para $n > n_0$ $1 + \eta_n$ es invertible y $(1+\eta_n)^{-1} \longrightarrow 1$,

entonces $(1+A_n)^{-1} \longrightarrow (1+A)^{-1}$. c.d.d.

En todo lo que sigue Φ es mononormante y $\mathcal{A} = \Omega_\Phi$.

Por lo visto en 1.3.1, si $q_\tau : G(\mathcal{A}) \longrightarrow G(\mathcal{A})$ es definido por $q_\tau\,(1+A) = 1 + P_{\frac{1}{\tau}t(A)}\, A\, P_{\frac{1}{\tau}t(A)}$ entonces $q_\tau\,(1+A) \longrightarrow 1+A$ si $\tau \to 0$ en $\mathcal{A}$, en particular $q_n\,(1+A) \to 1+A$ si $n \longrightarrow \infty$ de modo que q_τ da una homotopía de q_1 en 1.

Como $\mathcal{Y}$ es continuo, obtenemos que: $\mathcal{Y}q_\tau \longrightarrow \mathcal{Y}$ $\therefore$ $\mathcal{Y}q_1 \cong \mathcal{Y}$ y $q_\tau\mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{Y}$ $\therefore$ $q_1\mathcal{Y} \cong \mathcal{Y}$, luego

$$(\mathcal{Y}q_\tau - q_\tau\mathcal{Y})\,(1+A) \longrightarrow 0 \quad \text{en} \quad \mathcal{A} \tag{12}$$

$$\mathcal{Y}q_1 \cong q_1\mathcal{Y} \tag{12a}$$

Ahora como $A \in \Omega_\Phi$, por 1.4.2 $1+A \in \Pi\{P_n\}$ de modo que desde un $\tau > \tau_0$, es $P_{\frac{1}{\tau}t(A)}\,(1+A)\,P_{\frac{1}{\tau}t(A)} : H_n \longrightarrow H_n$ invertible en $B(H_n)$; y existe $[P_{\frac{1}{\tau}t(A)}\,(1+A)\,P_{\frac{1}{\tau}t(A)}]^{-1} : H_n \longrightarrow H_n$, donde $t(A)$ fue dado en (8c) de 1.3.1.

3.2. PROPOSICION. *Se puede elegir la función continua* $t(A)$ *de modo que desde un* $\tau > \tau_0$ *se verifique*

$$\mathcal{Y}q_\tau(1+A) = P_{\frac{1}{\tau}t(A)}\,[P_{\frac{1}{\tau}t(A)}\,(1+A)\,P_{\frac{1}{\tau}t(A)}]^{-1}\,P_{\frac{1}{\tau}t(A)} + (1-P_{\frac{1}{\tau}t(A)}) \tag{13}$$

$$q_\tau\mathcal{Y}\,(1+A) = P_{\frac{1}{\tau}t(A)}\,(1+A)^{-1}\,P_{\frac{1}{\tau}t(A)} + (1 - P_{\frac{1}{\tau}t(A)}) \tag{14}$$

de modo que por (12a) es:

$$P_{\frac{1}{\tau}t(A)}\,[P_{\frac{1}{\tau}t(A)}\,(1+A)P_{\frac{1}{\tau}t(A)}]^{-1}P_{\frac{1}{\tau}t(A)} - P_{\frac{1}{\tau}t(A)}\,(1+A)^{-1}P_{\frac{1}{\tau}t(A)} \to 0 \text{ en } \mathcal{A} \tag{15}$$

Demostración. Observemos que, para $\tau > \tau_0$ es

$$\mathcal{Y}q_\tau\,(1+A) = [P_{\frac{1}{\tau}t(A)}\,(1+A)\,P_{\frac{1}{\tau}t(A)} + (1 - P_{\frac{1}{\tau}t(A)}]^{-1} =$$

$$= P_{\frac{1}{\tau}t(A)}\,[P_{\frac{1}{\tau}t(A)}\,(1+A)\,P_{\frac{1}{\tau}t(A)}]^{-1}\,P_{\frac{1}{\tau}t(A)} + (1 - P_{\frac{1}{\tau}t(A)})$$

Para verificar esta igualdad, basta multiplicar a derecha y a izquierda por $P_{\frac{1}{\tau}t(A)}\,(1+A)\,P_{\frac{1}{\tau}t(A)} + (1-P_{\frac{1}{\tau}t(A)})$ y comprobar que da 1.

Esto prueba (13).

Como $\mathcal{V}(1 + A) = (1 + A)^{-1} \in G(\mathcal{A})$, $(1 + A)^{-1} = 1 + D$, $D \in \mathcal{A}$;

$q_\tau \mathcal{V}(1+A) = q_\tau(1+A)^{-1} = P\,\frac{1}{\tau}t(D)\,(1+A)^{-1}\,P\,\frac{1}{\tau}\,t(D) + 1 - P\,\frac{1}{\tau}\,t(D)$.

Eligiendo $t(D) = t(A)$ una función contínua mayor que $t'(A)$ y $t'(D)$ se puede reemplazar $t(D)$ por $t(A)$ y obtenemos (14). c.d.d.

En particular (15) da

$$P_n(P_n(1 + A)\,P_n)^{-1}\,P_n - P_n\,(1 + A)^{-1}\,P_n \longrightarrow 0 \text{ en } \mathcal{A} \qquad (15a)$$

Interpretaremos (15a) en términos de la teoría de la proyección. Si $\mathcal{A}$ es un álgebra que contiene los operadores de rango finito y $\mathcal{A} \subset \Omega_\infty$, entonces $1 + A \in G(\mathcal{A})$ implica $1 + A \in \Pi\{P_n\}$ (ver 1.4.2) ($\{P_n\}$ cualquier sucesión de proyectores correspondiente a una base equivalente a una ortonormal). O sea, mientras que el teorema 1.4.2. dice tan sólo que (15a) vale en la topología fuerte, en cambio si $\mathcal{A} = \Omega_\Phi$, Φ mononormante, 3.2 nos dice que (15a) vale en la topología de la norma $\|\ \|_\Phi$, o sea el teorema (I) de Palais expresa un hecho formalmente más fuerte que $1 + A \in \Pi\{P_n\}$.

Esto sugiere estudiar una nueva clase de operadores que llamaremos $\Pi_\Phi\{P_n\}$ que serán los que verifican (15a) en la topología de $\mathcal{A}$, que pasamos a estudiar en las secciones siguientes.

4. LA CLASE Π_Φ.

4.1. DEFINICION. *Sean* Φ *una función normante simétrica,* Ω_Φ *el ideal normado correspondiente, y* $\{P_n\}$ *una sucesión de proyectores ortogonales que convergen fuertemente a la unidad en* $H(P_n x \longrightarrow x)$. *Sea* $H_n = P_n(H)$. *Diremos que un operador* $A \in \Pi_\Phi\{P_n\}$ *si:* i) A *es invertible,* ii) *los operadores* $P_nAP_n : H_n \longrightarrow H_n$ *son invertibles en* $B(H_n)$, *o sea existe* $(P_nAP_n)^{-1} : H_n \longrightarrow H_n$ *y* iii) *vale* $\|(P_nAP_n)^{-1}\,P_n - P_nA^{-1}P_n\|_\Phi \longrightarrow 0$.

Observemos que iii) implica que $(P_nAP_n)^{-1} P_n - P_nA^{-1}P_n \in \Omega_\Phi$, mientras que $A \notin \Omega_\Phi$.

4.2. PROPOSICION. *Una condición necesaria y suficiente para* $A \in \Pi_\Phi\{P_n\}$, *es que se verifiquen las condiciones siguientes:*

(a) $(P_nAP_n)^{-1}$ *existe como operador de* H_n *en* H_n, *y* $\forall\ n > n_0$

$\|(P_nAP_n)^{-1} P_n\| \leq C,\ C > 0$

(b) $\|P_nA(1-P_n)A^{-1}P_n\|_\Phi \longrightarrow 0$

Demostración. Supongamos $A \in \Pi_\Phi\{P_n\}$, entonces se verifican i) ii) y iii) de la definición, es decir $\forall\, n > n_0$

$\|(P_nAP_n)^{-1}P_n - P_nA^{-1}P_n\|_\Phi < \varepsilon$, o sea

$\|(P_nAP_n)^{-1}P_n - P_nA^{-1}P_n\| < \varepsilon$ y $\|(P_nAP_n)^{-1}P_n\| < \|P_nA^{-1}P_n\| + \varepsilon \leq$

$\leq \|A^{-1}\| + \varepsilon = C$, lo que prueba (a).

Por otra parte:

$\|P_nA(1-P_n)A^{-1}P_n\|_\Phi = \|P_n - P_nAP_nA^{-1}P_n\|_\Phi = \|P_nAP_n[(P_nAP_n)^{-1}P_n - P_nA^{-1}P_n]\|_\Phi \leq$

$\leq \|P_nAP_n\|\ \|(P_nAP_n)^{-1}P_n - P_nA^{-1}P_n\|_\Phi \leq \|A\|\ \|(P_nAP_n)^{-1}P_n - P_nA^{-1}P_n\|_\Phi$ y el último miembro tiende a 0 pues $A \in \Pi_\Phi\{P_n\}$, lo que prueba (b).

Supongamos ahora que se verifican (a) y (b).
Las propiedades i) y ii) se verifican obviamente. Para verificar iii), observemos primero la siguiente identidad:

$(P_nAP_n)(P_nA^{-1}P_n) = P_n - P_nA(1-P_n)A^{-1}P_n$. Luego

$P_nA^{-1}P_n = (P_nAP_n)^{-1}[P_n - P_nA(1-P_n)A^{-1}P_n] =$

$= (P_nAP_n)^{-1}P_n - (P_nAP_n)^{-1}P_nA(1-P_n)A^{-1}P_n$, de donde

$(P_nAP_n)^{-1}P_n - P_nA^{-1}P_n = (P_nAP_n)^{-1}P_nA(1-P_n)A^{-1}P_n$ y

$\|(P_nAP_n)^{-1}P_n - P_nA^{-1}P_n\|_\Phi \leq \|(P_nAP_n)^{-1}P_n\|\ \|P_nA(1-P_n)A^{-1}P_n\|_\Phi$

Por las condiciones (a) y (b) el último miembro tiende a 0 lo que prueba iii), c.d.d.

OBSERVACION. La condición (a) de 4.2 es cierta para un operador A si y sólo si $A \in \Pi\{P_n\}$ ya que (a) es equivalente a las condiciones (9) y (9a) de 1.4.1.
Luego 4.2. puede enunciarse en la siguiente forma

4.2.(bis) PROPOSICION. $A \in \Pi_\Phi\{P_n\}$ *si y sólo si:*

a) $A \in \Pi\{P_n\}$ *y*

b) *si* $\|P_nA(1-P_n)A^{-1}P_n\|_\Phi \to 0$

4.3. COROLARIO. *Si* $A \in \Pi\{P_n\}$ *y si* A *es casi triangular* Φ *a derecha o* A^{-1} *es casi triangular* Φ *a izquierda respecto de* $\{P_n\}$ *(ver 1.2) entonces* $A \in \Pi_\Phi(P_n)$.

Demostración. Supongamos por ejemplo que $A \in \Pi\{P_n\}$ y que A es casi triangular Φ a derecha respecto a $\{P_n\}$. Para probar que $A \in \Pi_\Phi\{P_n\}$ basta verificar b) del teorema 4.2 bis. Pero $\|P_nA(1-P_n)A^{-1}P_n\|_\Phi \leqslant \|P_nA-P_nAP_n\|_\Phi \ \|A^{-1}\|$ y por la casi triangularidad Φ a derecha, la última expresión tiende a 0. c.d.d.

4.4. COROLARIO. *Si* $A = 1+S+T$, *donde* S *es casi triangular* Φ *a derecha respecto a* $\{P_n\}$, $\|S\| < 1$, *y* T *un operador de rango finito, entonces* $A \in \Pi_\Phi\{P_n\}$.

En efecto: Por 1.4.2, $A \in \Pi\{P_n\}$ y $A = 1+S+T$ es casi triangular Φ a derecha respecto a $\{P_n\}$, luego por 4.3 $A \in \Pi_\Phi\{P_n\}$.

4.5. DEFINICION. *Diremos que* Φ *es casi mononormante si* Φ *es normante simétrica y para cualquier* $T \in \Omega_\Phi$, T *es casi triangular* Φ *a derecha respecto a cualquier sucesión de proyectores ortonormales que convergen fuertemente a* 1. ($P_nx \to x$).

Observemos que si Φ es mononormante, entonces Φ es casi mononormante, pues por 2.7 Ω_Φ es 'approximately tame' respecto a cualquier sucesión de proyectores ortogonales $\{P_n\}$ con $P_nx \to x$, y por 1.1.1, si $A \in \Omega_\Phi$ A es casi triangular a derecha respecto a $\{P_n\}$.

4.6. COROLARIO. *Si* Φ *es casi mononormante, si* A *es casi triangular* Φ *a derecha respecto a* $\{P_n\}$ *y* $A \in \Pi\{P_n\}$, *y si* $T \in \Omega_\Phi$ *entonces* $A+T \in \Pi_\Phi$.

En efecto por 1.4.4 $A+T \in \Pi\{P_n\}$ y $A+T$ es casi triangular Φ a derecha respecto a $\{P_n\}$, luego por 4.3, $A+T \in \Pi_\Phi$.

4.7. COROLARIO. *Si* Φ *es mononormante las clases* $\Pi\{P_n\}$ *y* $\Pi_\Phi\{P_n\}$ *coinciden.*

Basta aplicar el corolario 4.3. Luego en caso de un Ω_Φ mononormante el teorema de Palais expresa en forma geométrica el mismo hecho que el teorema 1.4.2.

Un teorema de V. Neumann (cf.[6]) dice que todo operador simétrico A puede escribirse como una suma de un operador de Ω_2 de norma arbitrariamente pequeña y un operador de la forma $\sum_j \lambda_j (x,\varphi_j)\varphi_j$ donde $\{\varphi_j\}$ es un sistema ortonormal, pero $\{\lambda_j\}$ no tiende necesariamente a cero, de modo que este operador no es necesariamente compacto. Luego para todo A y para todo n finito existe un sistema ortonormal $\{\varphi_1^{(n)}, \varphi_2^{(n)}, \ldots, \varphi_n^{(n)}\}$ y una n-upla numérica $\{\lambda_{1n}, \lambda_{2n}, \ldots, \lambda_{n,n}\}$ tales que:

1) Para todo $x \in H$, vale $Ax = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{jn}(x,\varphi_j^{(n)})\varphi_j^{(n)} + R_n(x)$ (16)

con $\sum (\lambda_{jn})^2 \geqslant C > 0$ (16a)

2) El proyector $P_n x = \sum_{j=1}^{n} (x,\varphi_j^{(n)})\, \varphi_j^{(n)}$ (17)

verifica $P_n x \to x$, $\forall$ x (17a)

3) $\|P_n R_n\| \longrightarrow 0$ y $\|R_n P_n\| \longrightarrow 0$ para $n \longrightarrow \infty$

Podemos entonces dar el siguiente criterio general para la clase $\Pi_\Phi\{P_n\}$.

4.8. TEOREMA. *Sea Φ normante simétrica, A un operador invertible tal que para todo* n *existen* $\{\varphi_j^{(n)}\}$ *y* $\{\lambda_{jn}\}$ *que verifican las condiciones* 1), 2), 3) *y la* 3a), *más fuerte que* 3), *siguiente:*

3a) $\|R_n P_n\|_\Phi \longrightarrow 0$ *y* $\|P_n R_n\|_\Phi \longrightarrow 0$ (17b)

entonces $A \in \Pi_\Phi\{P_n\}$.

Demostración. Basta verificar las condiciones a) y b) de 4.2. Veamos primero que $(P_nAP_n)^{-1}$ existe como operador de H_n en H_n. Observemos que de (16) y (17b) es claro que para n grande es $P_nA = AP_n + S_n$, donde $\|S_n\| \leqslant \|S_n\|_\Phi < \varepsilon_n$ y $\varepsilon_n \longrightarrow 0$. (18)

Luego: $P_nA^{-1}P_n \cdot P_nAP_n = P_nA^{-1}AP_n + P_nA^{-1}S_nP_n =$

$= P_n + S_n'$, $\|S_n'\| < \varepsilon_n^1 \longrightarrow 0$.

Como P_n es igual a 1 en H_n, es $P_n + S_n'$ invertible en H_n, y $[(P_n+S_n')^{-1}P_nA^{-1}P_n]\, P_nAP_n = P_n = 1$ en H_n, luego $(P_n+S_n')^{-1}P_nA^{-1}P_n$ es el inverso a izquierda de P_nAP_n. Análogamente se verá que P_nAP_n tiene inversa a derecha, luego $(P_n+S_n')^{-1}P_nA^{-1}P_n = (P_nA\,P_n)^{-1}$.

Además para $n \longrightarrow \infty$ es $\|(P_n+S_n')^{-1}\| \longrightarrow \|P_n\| = 1$ y como $P_nA^{-1}P_nx = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\lambda_j}(x,\varphi_j)\varphi_j$ es (en H_n) $\|P_nA^{-1}P_n\| \leqslant \sup \frac{1}{\lambda_j} \leqslant C$,

resulta que: $\|(P_nAP_n)^{-1}\| = \|(P_n + S_n')^{-1} P_nA^{-1}P_n\| \leq$
$\leq \|(P_n + S_n')^{-1}\| \; \|P_nA^{-1}P_n\| \leq (1 + \varepsilon) C = C_1$. Esto prueba a).

Para probar b), observemos que por (18) es
$\|P_nA(1-P_n)A^{-1}P_n\|_\Phi = \|(AP_n+S_n)(1-P_n)A^{-1}P_n\|_\Phi = \|S_n(1-P_n)A^{-1}P_n\|_\Phi \to 0.$

4.9. TEOREMA DE ESTABILIDAD I. *Si* $A \in \Pi_\Phi\{P_n\}$*, A casi triangular a derecha y* A^{-1} *casi triangular a izquierda respecto a* $\{P_n\}$*, sucesión de proyectores ortogonales,* $P_nx \to x$*, entonces existe un* $\delta > 0$ *tal que* $A+T \in \Pi_\Phi\{P_n\}$*, para todo* $T \in \Omega_\Phi$ *con* $\|T\| < \delta$.

Demostración. Por a) de 4.2 bis es $A \in \Pi\{P_n\}$ y por 1.4.3, si $\|T\| < \delta_1$, $A + T \in \Pi\{P_n\}$ luego por 4.2 bis basta probar que $A + T$ verifica la condición b). Observamos primero que:
$(A + T)^{-1} = [A(1 + A^{-1} T)]^{-1} = [1 + A^{-1} T + (A^{-1} T)(A^{-1} T)\ldots]A^{-1}$
si hemos elegido $\|T\| < \delta_1$ $(\delta < \delta_1)$ de modo que $\|A^{-1}T\| < 1$. Si llamamos $B_1 = A^{-1}T + A^{-1}T\, A^{-1}T + \ldots$, entonces $B_1 \in \Omega_\Phi$ y vale
$(A + T)^{-1} = (1 + B_1)\, A^{-1} = A^{-1} + B_1\, A^{-1}$, luego
$\|P_n(A + T)(1 - P_n)(A + T)^{-1} P_n\|_\Phi = \|P_nA(1-P_n)\, A^{-1}P_n + P_nA(1-P_n)$
$B_1A^{-1}P_n + P_nT(1-P_n)A^{-1}\, P_n + P_nT(1-P_n)B_1A^{-1}\|_\Phi \leq$
$\leq \|P_nA(1-P_n)A^{-1}P_n\|_\Phi + \|P_nA(1-P_n)\, B_1A^{-1}P_n\|_\Phi + \|P_nT(1-P_n)\, A^{-1}\, P_n\|_\Phi +$
$+ \|P_nT(1-P_n)\, B_1A^{-1}P_n\|_\Phi$. Veamos que cada término de esta última expresión tiende a 0.

$\|P_nA(1-P_n)A^{-1}P_n\|_\Phi \longrightarrow 0$ pues $A \in \Pi_\Phi\{P_n\}$
$\|P_nA(1-P_n)B_1A^{-1}P_n\|_\Phi \leq \|P_nA-P_nAP_n\| \; \|B_1A^{-1}P_n\|_\Phi \longrightarrow 0$
porque A es triangular a derecha y $B_1 \in \Omega_\Phi$;
$\|P_nT(1-P_n)A^{-1}P_n\|_\Phi \leq \|P_nT\|_\Phi \; \|(1-P_n)A^{-1}P_n\| \longrightarrow 0$,
ya que A^{-1} es triangular a izquierda, y $T \in \Omega_\Phi$;
$\|P_nT(1-P_n)B_1A^{-1}\|_\Phi \leq \|T(1-P_n)\| \; \|B_1A^{-1}\|_\Phi$ y $\|T(1-P_n)\| \longrightarrow 0$ por 1.1.1.
Luego $\|P_n(A+T)(1-P_n)(1+T)^{-1} P_n\|_\Phi \longrightarrow 0$, c.d.d.

4.10. TEOREMA DE ESTABILIDAD II. *Si* $A \in \Pi_\Phi$*, con* $A \in \Pi\{P_n\}$ *y A casi triangular a derecha respecto de* $\{P_n\}$*, sucesión de proyectores ortogonales,* $P_nx \to x$*, entonces* $A + T \in \Pi_\Phi$ *para todo T de rango finito.*

Demostración. Observemos primero que por ser T de rango finito, podemos suponer $T = Q\,T$, donde Q es el proyector sobre el rango de T. Q y $T \in \Omega_\Phi$.

Por 1.4.4 $A + T \in \Pi\{P_n\}$. Para ver que $A + T \in \Pi_\Phi\{P_n\}$ basta probar b) de 4.2 bis.

$$P_n(A+T)(1-P_n)(A+T)^{-1}P_n = P_nA(1-P_n)(A+T)^{-1}P_n + P_nT(1-P_n)(A+T)^{-1}P_n =$$
$$= P_nA(1-P_n)(1+A^{-1}T)^{-1}A^{-1}P_n + P_nT(1-P_n)(A+T)^{-1}P_n$$

Si llamamos C a $(1+A^{-1}T)^{-1}$, $C(1+A^{-1}T) = 1$, $C+CA^{-1}T = 1$ y $C = 1-CA^{-1}T$; entonces:

$$\|P_n(A+T)(1-P_n)(A+T)^{-1}P_n\|_\Phi = \|P_nA(1-P_n)(1-CA^{-1}T)A^{-1}P_n\|_\Phi +$$
$$+ \|P_nQT(1-P_n)(A+T)^{-1}P_n\|_\Phi \leq \|P_nA(1-P_n)A^{-1}P_n\|_\Phi +$$
$$+ \|P_nA(1-P_n)CA^{-1}TA^{-1}P_n\|_\Phi + \|P_nQT(1-P_n)(A+T)^{-1}P_n\|_\Phi$$ y cada uno de los últimos términos tiende a 0. En efecto:

$\|P_nA(1-P_n)A^{-1}P_n\|_\Phi \longrightarrow 0$ porque $A \in \Pi_\Phi\{P_n\}$

$\|P_nA(1-P_n)CA^{-1}TA^{-1}\ P_n\|_\Phi \leq \|P_nA(1-P_n)\|\ \|A^{-1}\|^2\ \|C\|\ \|T\|_\Phi \longrightarrow 0$

por ser A triangular y

$\|P_nQT(1-P_n)(A+T)^{-1}P_n\|_\Phi \leq \|Q\|_\Phi\ \|T(1-P_n)\|\ \|(A+T)^{-1}\| \longrightarrow 0$

porque $\|T(1-P_n)\| \longrightarrow 0$ por 1.1.1, c.d.d.

REFERENCIAS

[1] I.C. GOHBERG, M.G. KREJN, *Introduction à la théorie des opérateurs linéaires, non auto-adjoints dans un espace Hilbertien*, Dunod-1971.

[2] I.C. GOHBERG, FELDMAN, *Ecuaciones de convolución y su solución por métodos de proyección*, Moscú - 1971.

[3] R.S. PALAIS, *On the homotopy type of certain groups of operators*, Topology, Vol. 3 (1965), 271-279.

[4] P.R. HALMOS, *Quasitriangular operators*, Acta Sci. Mat. (Szeged) 29 (1968), 283-293.

[5] C. PEARCY, N. SALINAS, *An invariant subspace theorem*, Michigan Math. J. 20 (1973), 21-31.

[6] SMIRNOV, *A course of higher mathematics*, Tomo V, Pergamon Press.

Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias, Universidad Central de Venezuela, Caracas, Venezuela.

Recibido en junio de 1974.
Versión final junio 1975.