CLAUSURA DE LAS ORBITAS DE SIMILARIDAD DE OPERADORES EN
ESPACIOS DE HILBERT

Domingo A. Herrero

A la memoria de Evelio Oklander

I. INTRODUCCION.

Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert complejo y sea $L(\mathcal{H})$ el álgebra de los operadores lineales y continuos de $\mathcal{H}$ en sí mismo. A cada operador $T \in L(\mathcal{H})$ se le pueden asociar naturalmente dos familias de operadores, a saber

$$U(T) = \{UTU^*: U \text{ es unitario, } U^* \text{ es el adjunto de } U\}$$

y

$$S(T) = \{WTW^{-1}: W \text{ es invertible en } L(\mathcal{H})\}$$

llamados la "órbita unitaria" de T y la "órbita de similaridad" de T , respectivamente.

En general, ninguno de estos dos conjuntos es cerrado en $L(\mathcal{H})$.

En este trabajo se estudian las clausuras uniformes (es decir, con respecto a la topología de la norma) de dichos conjuntos. En la primera parte se dan varios resultados sencillos, que se aplican tanto a $L(\mathcal{H})$ como a otras álgebras de Banach con unidad; en particular, se incluyen aquí todas las condiciones *necesarias* conocidas para que un operador dado pertenezca a la clausura $S(T)^-$ de la órbita de similaridad de T .

Más adelante (*Sección 3*) se considera la órbita unitaria y su clausura. El principal resultado de esta sección dice que si T es de la forma $B \oplus A + K$, donde B es unitariamente equivalente a $B \oplus B$, K pertenece a algún ideal bilátero propio de $L(\mathcal{H})$ y C es la restricción de B a un subespacio reductor, entonces $U(T)^-$ contiene a los operadores unitariamente equivalentes a $T \oplus C$. Como corolario se obtiene la caracterización de $U(T)^-$ cuando T es "esencialmente normal", un resultado obtenido por D.W.Hadwin utilizando otro tipo de argumentos ([8]). (Por *subespacio* se entenderá siempre *variedad lineal cerrada*).

Finalmente, se demuestra un resultado sobre la clausura de $S(T)$ para el caso en que el espectro $\Lambda(T)$ de T tiene infinitas componentes y satisface ciertas condiciones adicionales (*Teorema 3*). Este resultado permite dar una caracterización casi completa de $S(K)^-$ para el caso en que K es un operador compacto con infinitos auto-

valores distintos. Los argumentos y resultados de este trabajo pueden aplicarse asimismo a otro tipo de operadores que los aquí estudiados; en una segunda nota se analizará $S(N)^-$ cuando N es un operador normal.

Resulta significativo el hecho de que muchas veces $S(T)^-$ contiene *todos* los operadores que satisfacen las condiciones necesarias encontradas en la primera parte y no es aventurado conjeturar que estas condiciones necesarias también son *suficientes*, cualquiera sea el operador T .

En cierto sentido, este trabajo es la continuación de la nota [16]. En dicha nota el autor probó el siguiente resultado, que será utilizado más adelante:

TEOREMA 1. $L(\mathcal{K})$ contiene un "casinilpotente universal"; es decir, existe un operador casinilpotente $Q_u \in L(\mathcal{K})$ tal que $S(Q_u)^-$ coincide con la clausura uniforme del conjunto de todos los operadores casinilpotentes.

NOTA IMPORTANTE. Luego de enviar este trabajo para su publicación, el autor (en colaboración con el Profesor José Barría) ha obtenido varios resultados nuevos en estas áreas (Referencias [26]; [27]; [28]; [29]). En particular ([28]), se ha obtenido una caracterización completa de $S(T)^-$ cuando T es un operador de rango finito, de donde se deduce inmediatamente la estructura de $S(K)^-$, cuando K es un operador compacto con infinitos autovalores distintos (Ver Corolario 5, más abajo).

2. RESULTADOS GENERALES. Ante todo consideraremos el caso más general: órbitas de similaridad en álgebras de Banach. Luego nos restringiremos a álgebras de operadores.

PROPOSICION 1. Sea B un álgebra de Banach con identidad e y sea $S(a) = \{r(a) : r \in \text{Automorfismos}(B)\}$ la "órbita de similaridad" de $a \in B$. Entonces

(i) Si $b \in S(a)^-$, entonces $\Lambda(b) \supset \Lambda(a)$. Esta inclusión puede ser propia; más aún, el radio espectral de b puede ser mayor que el de a . Además, toda componente de $\Lambda(b)$ interseca a $\Lambda(a)$.

(ii) Definamos $b <" a$ si $b \in S(a)^-$, y $b \sim a$ si $S(b)^- = S(a)^-$; $a \sim b$ es una relación de equivalencia en B y $<"$ induce un orden parcial ($<$) en el conjunto cociente $B/\sim$.

(iii) Sea $[a]$ la cooclase de a en $B/\sim$. Si $b \in [a]$, entonces $\Lambda(b) = \Lambda(a)$.

(iv) $S(a) \subset [a] \subset S(a)^-$; estos tres conjuntos son invariantes bajo

$\text{Aut}(B)$. Si $S_n(a) = \{\tau(a) : \tau \in \text{Aut}(B), \|\tau\| \cdot \|\tau^{-1}\| \leq n\}$ ($n=1, 2, 3, \dots$); $S_1(a) = U(a)$, $S(a) = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n(a)$, entonces $S_n(a)^- \subset [a]$; además, $b \in S_n(a)^-$ si y sólo si $a \in S_n(b)^-$. Las inclusiones son propias, en general.

(v) $S(a)^-$ es nunca denso en B .

(vi) Si $S(a)$ es cerrada, entonces $[a]$ es minimal en $(B/\sim; <)$. En particular, $[\lambda e] = \{\lambda e\}$ es minimal para cada λ complejo.

(vii) Si $a \in J$ para algún ideal bilateral cerrado invariante bajo $\text{Aut}(B)$, entonces $S(a)^- \subset J$. Más aún, si $p(a) \in J$ para algún polinomio p , entonces $p(b) \in J$ para todo b en $S(a)^-$.

(viii) Sea f una función analítica definida en un entorno Ω (¡no necesariamente conexo!) de $\Lambda(b)$, para algún $b \in S(a)^-$, y supongamos que $f(a) = 0$; entonces $f(b) = 0$.

(ix) Si B es abeliana, entonces $\Lambda(b) = \Lambda(a)$ para todo b en $S(a)^-$.

Demostración. (i) La primera inclusión y el hecho de que cualquier componente de $\Lambda(b)$ interseca a $\Lambda(a)$ se siguen de la semicontinuidad superior de las partes separadas del espectro ([12]; [17]; [25]). Para ver que el radio espectral de b puede ser mayor que el de a , basta usar el Teorema 1 y los resultados de [1]; [14]; [15].

(ii) La relación $<$ es obviamente reflexiva. Supongamos $b < a$ y $c < b$; entonces existen sucesiones $\{\tau_n\}$ y $\{\rho_n\}$ de automorfismos de B tales que $\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n(a) = b$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n(b) = c$. Dado $\varepsilon > 0$, $\|c - \rho_n(b)\| < \varepsilon$ para todo n suficientemente grande; fijado un n conveniente, podemos elegir m tal que $\|b - \tau_m(a)\| < \varepsilon/\|\rho_n\|$. Se ve inmediatamente que $\|c - \rho_n \circ \tau_m(a)\| \leq \|c - \rho_n(b)\| + \|\rho_n(b) - \rho_n[\tau_m(a)]\| \leq 2\varepsilon$. Concluimos que $c < a$; por lo tanto $<$ es una relación transitiva. A fortiori, $\sim$ es reflexiva, simétrica y transitiva, y por lo tanto es una relación de equivalencia.

Es inmediato ver que $B/\sim$ está parcialmente ordenado por la relación $<$ inducida por $<$ en el conjunto cociente.

(iii) Esto es una consecuencia inmediata de (i) e (ii).

(iv) Las inclusiones son obvias y la invariancia se prueba utilizando los argumentos de (ii). Análogamente para ver que $S_n(a)^- \subset [a]$ y de aquí obtenemos que $\Lambda(b) = \Lambda(a)$ para todo b en $S_n(a)^-$ utilizando (iii).

Que las inclusiones pueden ser propias se sigue del Teorema 1, (iii) y los resultados de [6].

(v) Por (i), $a + \lambda e \notin S(a)^-$ si $\lambda \neq 0$.

(vi) Si $S(a)$ es cerrada, $S(a) = [a] = S(a)^-$, por (iv), y el resultado es inmediato.

(vii) Supongamos que $p(a) \in J$, un ideal bilateral cerrado invariante bajo $\text{Aut}(B)$ para algún polinomio p y sea $\pi: B \rightarrow B/J$ la proyección canónica sobre el álgebra cociente. Entonces $\pi(p(a)) = p(\pi(a)) = 0$; es decir, $\pi(a)$ es un elemento algebraico de B/J . Para cualquier automorfismo τ , tenemos que $p(\tau(a)) = \tau(p(a)) \in J$ y por lo tanto $\pi(p(\tau(a))) = p(\pi(\tau(a))) = 0$. Luego, $\pi(\tau(a))$ es un cero de la aplicación continua $P: B/J \rightarrow B/J$ definida por $P(\pi(c)) = p(\pi(c))$. Dado que P y π son aplicaciones continuas, es inmediato que $S(a)^-$ está contenido en la imagen inversa de $\pi(0)$ bajo la aplicación $P \circ \pi$; es decir, $S(a)^- \subset \{b: p(b) \in J\}$.

(viii) Sean a, b, Ω y f como se indicó. Entonces existe una unión finita γ de curvas de Jordan rectificables, disjuntas dos a dos, orientadas positivamente con respecto a $\Lambda(a)$ tal que $\Lambda(b) \cap \gamma = \emptyset$,

$$\gamma \subset \Omega \text{ y } f(z) = 1/2\pi i \int_{\gamma} f(\lambda)(\lambda - z)^{-1} d\lambda, \text{ para cualquier } z \in \Lambda(b).$$

$$\begin{aligned} \text{Sea } \tau \in \text{Aut}(B); \text{ entonces } 0 &= \tau(f(a)) = \tau\left\{1/2\pi i \int_{\gamma} f(\lambda)(\lambda e - a)^{-1} d\lambda\right\} = \\ &= 1/2\pi i \int_{\gamma} f(\lambda)(\lambda e - \tau(a))^{-1} d\lambda = f(\tau(a)). \end{aligned}$$

Así, si $b = \lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n(a)$, utilizando la segunda ecuación resolvente ([22]) es fácil ver que $(\lambda e - \tau_n(a))^{-1} \rightarrow (\lambda e - b)^{-1}$ uniformemente sobre γ y por lo tanto $f(\tau_n(a)) \equiv 0 \rightarrow f(b) = 0$.

(ix) Si B es abeliana, entonces $a \rightarrow \Lambda(a)$ es continua con respecto a la métrica de Hausdorff, de donde se sigue el resultado (ver [22]).

UN EJEMPLO. Si $a = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \{\lambda I + \mu a: \lambda, \mu \in \mathbb{C}\} \subset L(\mathbb{C}^2)$, entonces $a^2 = 0$ y existen automorfismos τ_n definidos por $\tau_n(a) = (1/n)a$. Por lo tanto $S(a)$ no es cerrada, aún cuando B es abeliana y de dimensión compleja 2.

Por un teorema de Eidelheit (ver [22]), si $L(X)$ es el álgebra de todos los operadores (lineales y continuos) de un espacio de Banach X en sí mismo, entonces todo automorfismo de $L(X)$ es interior, es decir, está determinado por un elemento invertible W de $L(X)$: $\tau(T) = WTW^{-1}$.

Para estas álgebras tenemos los siguientes resultados

PROPOSICION 2. Sea $L(X)$ el álgebra de Banach de los operadores lineales y continuos de un espacio de Banach X en sí mismo y sea $T \in L(X)$. Entonces

(i) Si $p(T) = 0$ para algún polinomio p con ceros simples, $S(T)$ es cerrada y por lo tanto $[T]$ es minimal.

(ii) Si $A \in S(T)^-$ y $(z-A)$ es semi-Fredholm, entonces $(z-T)$ también es semi-Fredholm, $\text{ind}(z-A) = \text{ind}(z-T)$ y $\dim \text{nuc}(z-T) \leq \dim \text{nuc}(z-A)$.

En general esta desigualdad no puede reemplazarse por igualdad.

(iii) Sea $A \in S(T)^-$ y sea λ_0 un punto aislado de $\Lambda(A)$; entonces λ_0 también es aislado en $\Lambda(T)$ y las dimensiones de los correspondientes subespacios espectrales $X(A; \lambda_0)$ y $X(T; \lambda_0)$ son iguales. Más aún, si la restricción $(\lambda_0 - T)|X(T; \lambda_0)$ es nilpotente de orden n , entonces también la restricción $(\lambda_0 - A)|X(A; \lambda_0)$ es nilpotente de orden menor o igual que n .

Demostración. (i) Sea $p(T) = 0$ para algún polinomio $p(z) = \prod_{k=1}^m (z - \lambda_k)$, donde $\lambda_k \neq \lambda_j$ si $k \neq j$. Reemplazando, si fuera necesario, p por alguno de sus divisores, podemos suponer que p es el polinomio (mónico) minimal de T ; entonces X descomponerse como la suma algebraica directa de los subespacios $X_k = \text{núc}(\lambda_k - T)$, $k = 1, 2, \dots, m$, invariantes bajo T , y la restricción $T|X_k$ coincide con $\lambda_k I_k$, donde I_k indica la identidad en X_k (ver [17]; [23], Capítulo XI).

Sea $A = \lim_{n \rightarrow \infty} W_n A W_n^{-1}$. Por *Proposición 1(i)* y *(vii)*, p es también el polinomio minimal de A y por lo tanto X admite una descomposición análoga en subespacios invariantes bajo A : $X = \sum_{k=1}^m X_k''$, donde $\overset{\circ}{+}$ indica suma directa algebraica, $X_k'' = \text{núc}(\lambda_k - A)$ y $A|X_k'' = \lambda_k I_k''$, $k = 1, 2, \dots, m$.

Sea $X_{k,n} = W_n^{-1} X_k$, sea P_k la proyección de X sobre X_k a lo largo de $X_1 \overset{\circ}{+} \dots \overset{\circ}{+} X_{k-1} \overset{\circ}{+} X_{k+1} \overset{\circ}{+} \dots \overset{\circ}{+} X_m$ y sean P_k'' y $P_{k,n}$ definidas análogamente, para $k = 1, 2, \dots, m$. Entonces $T = \sum_{k=1}^m \lambda_k P_k$, $W_n T W_n^{-1} = \sum_{k=1}^m \lambda_k P_{k,n}$ y $A = \sum_{k=1}^m \lambda_k P_k''$. Dado que $\|A - W_n T W_n^{-1}\| = \left\| \sum_{k=1}^m \lambda_k (P_k'' - P_{k,n}) \right\| \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$), no es difícil concluir (usando nuevamente la semicontinuidad superior de partes separadas del espectro) que $\|P_k'' - P_{k,n}\| \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$), para $k = 1, 2, \dots, m$.

Para n suficientemente grande, $\|P_k'' - P_{k,n}\| < 1$, $k = 1, 2, \dots, m$, y (ver [23], Capítulo XI) por lo tanto $(P_k''|X_{k,n}): X_{k,n} \rightarrow X_k''$ es un isomorfismo de espacios de Banach y $W = \sum_{k=1}^m (P_k''|X_{k,n})$ es un elemento invertible de $L(X)$. Es evidente que $W X_{k,n} = X_k''$, $k = 1, 2, \dots, m$, de donde se sigue que $W W_n T W_n^{-1} W^{-1} = (W W_n) T (W W_n)^{-1} = A \in S(T)$. Por lo tanto $S(T)$ es cerrada y, por *Proposición 1(vi)*, $[T]$ es minimal.

(ii) La primera afirmación y la desigualdad son consecuencias de la estabilidad del índice de los operadores del tipo semi-Fredholm ([17]). Si U es una traslación bilateral en un espacio de Hilbert separable, entonces U es unitario y $\Lambda(U) = T = \{z: |z|=1\}$; sin embargo, $S(U)^-$ contiene un operador de la forma $S \oplus S^*$, donde S es una traslación unilateral, S^* es el adjunto de S y $\oplus$ indica suma

directa ortogonal ([9], Problema 85). $S \otimes S^*$ es un operador de Fredholm de índice 0 y núcleo de dimensión 1; este ejemplo muestra que, en general, no cabe esperar que $\dim \text{núc}(\lambda - T) = \dim \text{núc}(\lambda - A)$.

(iii) Sea λ_0 un punto aislado de $\Lambda(A)$ y sea γ una circunferencia de centro λ_0 , orientada positivamente, que separa λ_0 de $\Lambda(A) \setminus \{\lambda_0\}$. El idempotente asociado con λ_0 está dado por $P_0'' = P(A; \lambda_0) =$
 $= 1/2\pi i \int_{\gamma} (\lambda - A)^{-1} d\lambda.$

Por *Proposición 1(i)*, $\gamma \cap \Lambda(T) = \emptyset$, de modo que podemos similarmente definir $P_0 = P(T; \lambda_0)$. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \|A - W_n T W_n^{-1}\| = 0$, entonces se deduce de la integral anterior y la segunda ecuación resolvente que $\|P_0'' - W_n P_0 W_n^{-1}\| \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) y por lo tanto $P_0'' X = X(A; \lambda_0)$ y $W_n P_0 W_n^{-1} X = W_n (P_0 X)$ son espacios de Banach isomorfos; en particular, tienen la misma dimensión. Esto demuestra la primera afirmación; la segunda es consecuencia inmediata de la primera.

Utilizando el mismo tipo de argumentos podemos demostrar el siguiente resultado

COROLARIO 1. *Sea T un operador lineal en un espacio de Banach de dimensión finita. Entonces $S(T)^-$ contiene a todos los operadores A que satisfacen lo siguiente:*

(i) $\Lambda(A) = \Lambda(T)$ y para cada λ en $\Lambda(T)$ los subespacios espectrales $X(T; \lambda)$ y $X(A; \lambda)$ tienen la misma dimensión.

(ii) Si $\lambda_0 \in \Lambda(T)$ y los bloques de la forma de Jordan de $T|X(T; \lambda_0)$ tienen longitudes $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_{m_0} \geq 1$, entonces los bloques de A tienen longitudes $d_{11} \geq d_{12} \geq \dots \geq d_{1r_1}, d_{21} \geq \dots \geq d_{2r_2}, \dots,$
 $d_{m_0 1} \geq \dots \geq d_{m_0 r_{m_0}}$, tales que $d_k = \sum_{j=1}^{r_k} d_{kj}$, $k = 1, 2, \dots, m_0$.

[T] es minimal si y sólo si el polinomio minimal de T tiene ceros simples; [T] es maximal si y sólo si para cada $\lambda \in \Lambda(T)$, el polinomio minimal de T tiene un cero de orden igual a la dimensión de $X(T; \lambda)$, en λ .

Más adelante veremos una extensión de este resultado a espacios de Hilbert de dimensión infinita. Para cerrar la sección consideraremos el álgebra de operadores en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ de dimensión (topológica) infinita h.

PROPOSICION 3. *Sea $L(\mathcal{H})$ el álgebra de operadores en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, sea J un ideal bilateral cerrado de $L(\mathcal{H})$ y sea T un operador. Entonces*

(i) Si $p(T) \in J$ para algún polinomio p, entonces $S(T)^- \subset \{A + K: p(A) = 0 \text{ y } K \in J\}$.

(ii) Si $\lambda_0 \in \Lambda(T)$ es un punto aislado y $\mathcal{H}_0, \mathcal{H}'_0$ son los subespacios espectrales asociados con $\{\lambda_0\}$ y $\Lambda(T) \setminus \{\lambda_0\}$, resp., entonces $S(T)^-$ contiene un operador T' tal que $\mathcal{H}_0, \mathcal{H}'_0$ son también invariantes bajo T' , $T'|_{\mathcal{H}_0} = \lambda_0 I_0$ y $T'|_{\mathcal{H}'_0} = T|_{\mathcal{H}'_0}$.

(iii) Si $\Lambda(T)$ es la unión disjunta del conjunto compacto Γ y el conjunto finito $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m\}$, los subespacios invariantes asociados con Γ , $\{\lambda_k\}$ ($k = 1, 2, \dots, m$) son $\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1, \dots, \mathcal{H}_m$ y $T_0 = T|_{\mathcal{H}_0}$, entonces $S(T)^-$ contiene un operador $T' = T_0 \oplus N$, donde $N \in L(\mathcal{H}_0^\perp)$ es normal, $\Lambda(N) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$ y $\dim \text{núcl}(N - \lambda_k) = \dim \mathcal{H}_k$, para $k = 1, 2, \dots, m$.

Demostración. (i) Consecuencia de Proposición 1(vii) y del resultado central de [19].

(ii) Esto se sigue del corolario de Rota (ver [9]; [13]; [24]).

(iii) Por inducción en (ii) y propiedades de los espacios de Hilbert: $\mathcal{H}_1 \overset{\circ}{+} \dots \overset{\circ}{+} \mathcal{H}_m$ y $\mathcal{H}_0^\perp$ son dos complementos algebraicos de $\mathcal{H}_0$, y por lo tanto tienen igual dimensión.

3. ORBITAS UNITARIAS EN $L(\mathcal{H})$. La clausura de la órbita unitaria $U(T) = \{UTU^*: U \text{ es unitario}\}$ de un operador T en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, $\dim \mathcal{H} = h \geq \aleph_0$ ha sido considerada por varios autores (ver, p. ej., [6]; [8]; [11]). En lo que sigue, $A \approx T$ indicará que los operadores A y T son unitariamente equivalentes (A y T pueden actuar en distintos espacios de Hilbert). Necesitaremos aquí algunos resultados elementales, que están contenidos en el siguiente

LEMA 1. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert de dimensión h y sea $\{J_\alpha: \aleph_0 \leq \alpha \leq h\}$ la familia bien ordenada de todos los ideales biláteros cerrados no triviales de $L(\mathcal{H})$. Dado $T \in L(\mathcal{H})$, sea $\Lambda_\alpha(T)$ el espectro de la imagen canónica de T en $L(\mathcal{H})/J_\alpha$. (En particular, $\Lambda_{\aleph_0}(T) = E(T)$ es el espectro esencial de Calkin); entonces:

(i) $U(T)^- = U(A)^-$ y $S(T)^- = S(A)^-$ para todo $A \in U(T)^-$.

(ii) Si N es normal, entonces $U(N)^-$ es el conjunto de todos los operadores normales $A \in L(\mathcal{H})$ tales que $\Lambda(A) = \Lambda(N)$, $\Lambda_\alpha(A) = \Lambda_\alpha(N)$ para todo α y los autovalores aislados de A y de N tienen la misma multiplicidad.

NOTA. Dado α , $\aleph_0 \leq \alpha \leq h$, $J_\alpha = \{T \in L(\mathcal{H}): \dim (T\mathcal{H})^- < \alpha\}^-$ es un ideal bilátero cerrado de $L(\mathcal{H})$. Inversamente, todo ideal bilátero cerrado no trivial tiene esta forma. Sobre caracterización de los ideales y propiedades de los "espectros pesados" $\Lambda_\alpha(T)$, véase [4]; [5]; [7]; [15]; [18].

La igualdad $U(T)^- = U(A)^-$ para A en $U(T)^-$ es inmediata. La segunda igualdad es una consecuencia de la primera, dado que $U(T)$ es un

subconjunto de $S(T)$. (ii) es un resultado conocido (ver, p. ej., [6]; [10]; [15]).

Los argumentos de la demostración del siguiente resultado han sido modelados sobre el trabajo [20] de C. Pearcy y N. Salinas.

TEOREMA 2. Sea $T \in L(\mathcal{H})$ un operador de la forma $T \approx (B \oplus A) + K$, donde $A, B \in L(\mathcal{H})$, $B \approx B \oplus B$ y $K \in J_\alpha$ para algún α . Entonces $U(T)^-$ contiene un operador unitariamente equivalente a $C \oplus T$, donde $C \approx B|M$ para algún subespacio reductor M del operador B .

Demostración. Nuestras hipótesis acerca de B y de K implican que B es unitariamente equivalente a un número numerable de copias de sí mismo y que $\lim(n \rightarrow \infty) \|K - K_n\| = 0$, para cierta sucesión $\{K_n\}$ tal que $K_n|_{\mathcal{H}_n} = 0$ para cierto subespacio reductor $\mathcal{H}_n$ de codimensión menor que α . Es claro que

$$T \approx \begin{pmatrix} B + K_1 & K_2 \\ K_3 & A + K_4 \end{pmatrix} \in L(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H})$$

donde $K_1, \dots, K_4 \in J_\alpha$, y existe una sucesión creciente de proyecciones ortogonales $\{P_n\}$ tal que $P_n \rightarrow I$ en la topología fuerte, $P_n B = B P_n$, $B|_{P_n \mathcal{H}} \approx B|(I - P_n)\mathcal{H} \approx B$ y $\|(I - P_n)K_1 P_n\| + \|P_n K_1 (I - P_n)\| + \|(I - P_n)K_2\| + \|K_3 (I - P_n)\| \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$).

Descompongamos el subespacio $\mathcal{H}$ correspondiente a B en la suma de tres subespacios $\mathcal{H} = M' \oplus N \oplus P_n \mathcal{H}$, con M' isomorfo a M , de modo que $B \oplus A + K$ se pueda escribir como

$$B \oplus A + K = \begin{pmatrix} C + K_1^1 & K_1^2 & K_1^3 & K_1^4 \\ K_1^4 & B + K_1^5 & K_1^6 & K_1^2 \\ K_1^7 & K_1^8 & B + K_1^9 & K_1^2 \\ K_1^1 & K_1^2 & K_1^3 & A + K_1^4 \end{pmatrix}$$

con respecto a la nueva descomposición de $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ ($C \oplus B \approx B$).

Dado $\epsilon > 0$, existe $n = n(\epsilon)$ tal que $\|K_1^1\| + \|K_1^2\| + \|K_1^3\| + \|K_1^4\| + \sum_{j=1}^8 \|K_1^j\| < \epsilon$. Fijado este n , podemos elegir operadores J_j^k de manera que

$$B \oplus A + J = \begin{pmatrix} C & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B + J_1^5 & J_1^6 & J_2^2 \\ 0 & J_1^8 & B + K_1^9 & J_2^3 \\ 0 & J_3^2 & J_3^3 & A + K_4 \end{pmatrix} \approx C \oplus (B \oplus A + K)$$

entonces $J \in J_\alpha$ y $\|(B \oplus A + K) - (B \oplus A + J)\| = \|K - J\| < 2\varepsilon$.

Dado que $\varepsilon > 0$ era arbitrario, se sigue de esto que cualquier operador unitariamente equivalente a $C \oplus T$ pertenece a $U(T)^-$.

COROLARIO 2. Sea $T = H + K \in L(\mathcal{H})$, donde H es hiponormal y K es compacto. Si $A \approx N \oplus T$ para algún operador normal N que actúa en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}'$, $\dim \mathcal{H}' \leq h$, $\Lambda(N) \subset \Pi_{\aleph_0}(T)$ y $\Lambda_\alpha(N) \subset \Pi_\alpha(T)$ (donde $\Pi_\alpha(T)$ es el espectro a izquierda de peso α de T ; ver [5]) para todo α , entonces $A \in U(T)^-$.

Demostración. Supongamos que $h > \aleph_0$. Utilizando ([15], Teorema 3), podemos encontrar subespacios separables $\mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}'$, $\mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}$ que reducen a N , y a H y K , respectivamente, tales que $\Lambda(N|\mathcal{H}_0) = \Lambda(N)$, $\Lambda(N|\mathcal{H}_0^\perp) = E(N|\mathcal{H}_0^\perp)$, $K|\mathcal{H}_1^\perp = 0$, $\Lambda(H|\mathcal{H}_1) = \Lambda(H)$, $E(H|\mathcal{H}_1) = E(H) = E(T)$ y $\Pi_{\aleph_0}(H|\mathcal{H}_1) = \Pi_{\aleph_0}(H) = \Pi_{\aleph_0}(T)$. De acuerdo a [20] y [15], Corolario 5, $U(T|\mathcal{H}_1^\perp)^-$ contiene cualquier operador unitariamente equivalente a $(T|\mathcal{H}_1^\perp) \oplus (N|\mathcal{H}_0^\perp)$. Por lo tanto, será suficiente probar que $U(T|\mathcal{H}_1)^-$ contiene a los operadores unitariamente equivalentes a $(T|\mathcal{H}_1) \oplus (N|\mathcal{H}_0)$. Es decir que podemos limitarnos al caso en que $\mathcal{H}$ es separable y de dimensión infinita y $\Lambda(N) \subset \Pi_{\aleph_0}(T)$.

Más aún, usando los resultados de [20] podemos suponer, sin pérdida de generalidad (reemplazando K por $K + K_1$, donde K_1 es otro operador compacto de norma arbitrariamente chica), que $H = H_0 \oplus M$, donde H_0 es hiponormal y M es un operador normal de multiplicidad uniforme infinita (es decir, $M \approx M \oplus M$) y que $M = N \oplus M'$, con $M' \approx M$. Ahora el resultado se deduce fácilmente del Teorema 2.

Recientemente, D.W.Hadwin ([8]) anunció el siguiente resultado

COROLARIO 3. Sea $T \in L(\mathcal{H})$ un operador esencialmente normal (es decir, $T^*T - TT^*$ es compacto) y sea $T = T_0 \oplus N$ la (única) descomposición de T en su parte anormal T_0 y su parte normal N (N es normal y no existe ningún subespacio reductor $M \neq \{0\}$ tal que $T_0|_M$ sea normal). Entonces $U(T)^- = \{S \approx T_0 \oplus N' : N' \text{ es normal, } \Lambda(N') \subset \Lambda(N) \cup E(T_0), E(N') \subset E(N) \cup E(T_0), \Lambda_\alpha(N') = \Lambda_\alpha(N) \text{ y los autovalores aislados de } N \text{ y de } N' \text{ tienen la misma multiplicidad}\}$.

En realidad, D.W.Hadwin sólo considera el caso separable. Sin embargo, si T es esencialmente normal, entonces T_0 actúa en un subespacio separable, de modo que el caso general se deduce inmediatamente del caso separable. Su demostración se basa en el análisis de ciertas C^* -álgebras ligadas al operador T , pero no es difícil obtener una nueva demostración del mismo resultado utilizando los resultados de [3], Lema 1 y Teorema 2. Los detalles quedan a cargo

del lector.

4. ORBITAS DE SIMILARIDAD EN $L(\mathcal{H})$. Supongamos que el operador T admite una cadena $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ estrictamente creciente de subespacios invariantes tales que, si P_n es la proyección ortogonal de $\mathcal{H}$ sobre $M_n^{\perp}$ ($n = 1, 2, \dots$) y P_0 es la proyección sobre $\mathcal{H}_0 = \bigcap_{n=1}^{\infty} M_n^{\perp}$, entonces $\bigcap_n \Lambda(P_n T | M_n^{\perp}) = \{0\}$ y (si $P_0 \neq 0$) $\Lambda(P_0 T | \mathcal{H}_0) = \{0\}$. Si $M_0 = \{0\}$ y $\mathcal{H}_n = M_n \oplus M_{n-1} = M_n \cap M_{n-1}^{\perp}$, $n = 1, 2, \dots$, con respecto a la descomposición en suma directa ortogonal $\mathcal{H} = (\bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}_n) \oplus \mathcal{H}_0$, T puede escribirse como una matriz infinita de operadores

$$T = \begin{pmatrix} T_1 & T_{12} & T_{13} \cdots T_{1n} & \cdots & T_{10} \\ & T_2 & T_{23} \cdots T_{2n} & \cdots & T_{20} \\ & & \cdots \cdots \cdots & & \\ & & & \cdots \cdots \cdots & \\ & 0 & & T_n \cdots T_{n0} & \\ & & & & \ddots \\ & & & & T_0 \end{pmatrix} = \quad (I)$$

= triang($T_1, T_{12}, T_{13}, \dots, T_{10}; T_2, T_{23}, \dots, T_{20}; \dots; T_n, T_{n,n+1}, \dots, T_{n0}; \dots; T_0$), donde $T_n \in L(\mathcal{H}_n)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, $\Lambda(T_0) = \{0\}$ (ó $\Lambda(T_0) = \phi$ si $P_0 = 0$) y $\Lambda(T_n) = \sigma_n \subset \Lambda(P_{n-1} T | M_{n-1}^{\perp}) \subset \Lambda(T)^{\wedge}$, donde $K^{\wedge}$ indica el complemento de la componente no acotada de $C \setminus K$ (K compacto; ver [21], Teorema 0.8).

Por el corolario de Rota ([24]; ver también [9]; [13]), existe una sucesión de operadores invertibles $\{W_k\}$ en $L(\mathcal{H}_0)$ tal que $\|W_k^{-1}\| < 1/k$ y $\|W_k T_0 W_k^{-1}\| \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$). Así, si $U_k = (\bigoplus_{n=1}^{\infty} I_n) \oplus W_k$, la sucesión $\{U_k T U_k^{-1}\}$ converge en norma a $A = \text{triang}(T_1, T_{12}, \dots, 0; \dots; T_n, T_{n,n+1}, \dots, 0; \dots; 0) \in S(T)^{-}$ (es decir que la matriz de A es lo que se obtiene de (I) reemplazando la última columna por ceros).

Análogamente, si $V_k = (1/k)I_1 \oplus (\bigoplus_{n=2}^{\infty} I_n) \oplus I_0$, entonces la sucesión $\{V_k A V_k^{-1}\}$ converge en norma a $B_1 = \text{triang}(T_1, 0, 0, \dots, 0; T_2, T_{23}, \dots, 0; \dots; T_n, T_{n,n+1}, \dots, 0; \dots; 0) \in S(A)^{-} \subset S(T)^{-}$. Por inducción tenemos que $\{B_m = \text{triang}(T_1, 0, \dots, 0; T_2, 0, \dots, 0; \dots; T_m, 0, \dots, 0; T_{m+1}, T_{m+1,m+2}, \dots, 0; \dots; 0)\}_{m=1}^{\infty} \subset S(T)^{-}$, siendo B_m la suma directa de $T_1, T_2, \dots, T_m$ y un operador B'_m que admite una representación matricial de la forma (I) con ceros en la última columna, tal que

$\Lambda(B'_m) \subset [\Lambda(T) \setminus \bigcup_{n=1}^m \sigma_n]^\wedge$. Por lo tanto, podemos aplicar nuevamente el teorema de Rota a B'_m y obtener un operador B''_m similar a B'_m de norma menor que $\text{sp}(B'_m) + 1/m$ ($\text{sp}(L)$ = radio espectral de L). Reemplazando B'_m por B''_m en cada etapa y pasando al límite, obtenemos que $S(T)^-$ contiene cualquier operador de la forma $C = (\bigoplus_{n=1}^{\infty} T'_n) \oplus 0$, donde T'_n es similar a T_n ($n = 1, 2, \dots$) y $\|T'_n\| \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$).

Ahora estamos en condiciones de enunciar el resultado más importante de este trabajo, que es el siguiente

TEOREMA 3. Sea $T \in L(\mathcal{H})$, siendo $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert de dimensión infinita h . Supongamos que $\Lambda(T) = (\bigcup_{n=1}^{\infty} \sigma_n) \cup \{0\}$, donde $0 \notin \sigma_n$ para ningún valor de n y $\{\sigma_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una familia de subconjuntos abiertos y cerrados de $\Lambda(T)$, disjuntos dos a dos tal que $\sigma_n \rightarrow \{0\}$ ($n \rightarrow \infty$; en la métrica de Hausdorff). Sea $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ la cadena estrictamente creciente de subespacios invariantes asociados con los subconjuntos espectrales $\bigcup_{k=1}^n \sigma_k$. Entonces todo operador de la forma C indicada más arriba satisface $\Lambda(C) = \Lambda(T)$, y $\Lambda(T_n) = \sigma_n$ para $n = 1, 2, \dots$. Sea $\{\mathcal{H}'_n\}_{n=0}^{\infty}$ una familia ortogonal de subespacios tales que $\mathcal{H} = (\bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}'_n) \oplus \mathcal{H}'_0$ y sea $L = \text{triang}(L_1, L_{12}, \dots, L_{10}; L_2, L_{23}, \dots, L_{20}; \dots; L_n, L_{n,n+1}, \dots, L_{n0}; \dots; L_0)$ con respecto a dicha descomposición de $\mathcal{H}$ y supongamos que

(a) $\dim \mathcal{H}'_n = \dim \mathcal{H}_n$, $n = 1, 2, \dots$, y $\dim \mathcal{H}'_0 = \max\{h_0; \dim \mathcal{H}'_0; h'\}$, donde $h' = \inf_{n > 0} \dim \mathcal{H}'_n$.

(b) $L_n \approx L'_n \in S(T_n)^-$, $n = 1, 2, \dots$.

(c) Si $h' < \infty$, entonces L_0 es compacto y casinilpotente.

(d) Si h' es un cardinal infinito, L_0 es la suma directa de un casinilpotente en un subespacio de $\mathcal{H}'_0$ de dimensión h' y del operador 0 en el complemento ortogonal de dicho subespacio.

(e) Si P'_n es la proyección ortogonal de $\mathcal{H}$ sobre $(\bigoplus_{k=n}^{\infty} \mathcal{H}'_k) \oplus \mathcal{H}'_0$, $n = 1, 2, \dots$, entonces $\|P'_n L\| \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$).

Entonces $L \in S(T)^-$.

Demostración. Nuestras observaciones previas muestran que $C \in S(T)^-$, y las igualdades $\Lambda(T_n) = \sigma_n$, $n = 1, 2, \dots$, y $\Lambda(C) = \Lambda(T)$ se deducen fácilmente de la definición de M_n : $\Lambda(T|M_n) = \bigcup_{k=1}^n \sigma_k$, $n = 1, 2, \dots$. También es inmediato que $(L'_1 \oplus L'_2 \oplus \dots \oplus L'_m) \oplus (\bigoplus_{n=m+1}^{\infty} T'_n) \in S(T)^-$

para $m = 1, 2, \dots$ y el espectro de este operador es igual a $\Lambda(T) \cup (\bigcup_{n=1}^m \Lambda(L'_n))$. Sea, para cada n , L''_n un operador similar a T_n tal que $\|L'_n - L''_n\| < \varepsilon/n$ (para un cierto $\varepsilon > 0$ dado); entonces $(L''_1 \oplus L''_2 \oplus \dots \oplus L''_m) \oplus (\bigoplus_{n=m+1}^{\infty} T'_n) \in S(T)^-$ y su espectro coincide con el de T . Utilizando el resultado de Rota ([24]) y (e), vemos que $(\bigoplus_{n=1}^{\infty} L''_n) \oplus 0, (\bigoplus_{n=1}^{\infty} L'_n) \oplus 0 \in S(T)^-$ (Observemos que (e) implica, en particular, que $\|\bigoplus_{n=m}^{\infty} L'_n\| \rightarrow 0$ ($m \rightarrow \infty$)).

Supongamos que h' es un cardinal infinito; entonces consideramos operadores $D_m = (\bigoplus_{n=1}^{m-1} L''_n) \oplus M_m \oplus (\bigoplus_{n=m+1}^{\infty} L''_n) \oplus 0$, donde M_m es cualquier operador en $L(\mathcal{H}_n)$ unitariamente equivalente a $L''_m \oplus 0'$ con $0' =$ el operador 0 en un subespacio de dimensión h' . Es fácil ver que $\|D_m - (\bigoplus_n L''_n) \oplus 0\| \rightarrow 0$ ($m \rightarrow \infty$) y que $D_m \approx (\bigoplus_n L''_n) \oplus 0''$, donde $0'' =$ el operador 0 en un subespacio de $\mathcal{H}$ de dimensión igual a la de $\mathcal{H}'_0$.

Si h_0 y h' son ambos finitos, entonces $(\bigoplus_n T'_n) \oplus 0$ es la suma directa de un operador compacto en un subespacio de dimensión $\aleph_0$ y otro que actúa en un subespacio de dimensión h ; en este caso podemos utilizar el Teorema 2 para ver que la clausura de la órbita unitaria de $D = (\bigoplus_n L''_n) \oplus 0$ contiene un operador unitariamente equivalente a $D \oplus 0''$. De estas dos observaciones concluimos que, a los efectos de la demostración, podemos suponer directamente que $D = (\bigoplus_n L''_n) \oplus 0$, con $L''_n \in L(\mathcal{H}'_n)$, $\mathcal{H}'_n = \mathcal{H}_n$, $n = 0, 1, 2, \dots$.

Para cada n , descomponer $\mathcal{H}'_n = \mathcal{H}''_n \oplus R_n$, donde $\dim \mathcal{H}''_n = h' \text{ ó } 1$, de acuerdo a que h' sea un cardinal infinito o finito, y R_n es su complemento ortogonal en $\mathcal{H}'_n$. Sea $\{Q_{jk} : \mathcal{H}'_{k+m} \rightarrow \mathcal{H}'_{j+m}; 1 \leq j < k \leq p\}$ una familia finita arbitraria de operadores y sean los operadores $R_{jk} : \mathcal{H}'_{k+m} \rightarrow \mathcal{H}'_{j+m}$ definidos (con respecto a las descomposiciones indicadas) mediante las matrices

$$R_{jk} = \begin{pmatrix} Q_{jk} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por inducción sobre el resultado de [21], Corolario 0.15, vemos que el operador $E_m = \text{triang}(L''_1, 0, \dots, 0; \dots; L''_m, 0, \dots, 0; L''_{m+1}, R_{12}, R_{13}, \dots, R_{1p}, 0, 0, \dots, 0; L''_{m+2}, R_{23}, \dots, R_{2p}, 0, 0, \dots, 0; \dots; L''_{m+p-1}, R_{p-1,p}, 0, 0, \dots, 0; L''_{m+p}, 0, 0, \dots, 0; \dots; L''_n, 0, \dots, 0; \dots; 0) = (\bigoplus_{n=1}^m L''_n) \oplus \text{triang}(L''_{m+1}, R_{12}, \dots, R_{1p}; L''_{m+2}, R_{23}, \dots, R_{2p}; \dots; L''_{m+p-1}, R_{p-1,p}; L''_{m+p}) \oplus (\bigoplus_{n=m+p+1}^{\infty} L''_n) \oplus 0$ (Aquí "triang" se utiliza para indicar fila a fila una matriz triangular superior de orden p) es similar a D .

Sea F_m el operador obtenido a partir de E_m reemplazando L_n'' por 0 para $n = m+1, \dots, m+p$. Es inmediato que $\|E_m - F_m\| \rightarrow 0$ ($m \rightarrow \infty$). Observemos que $F_m \approx \left(\bigoplus_{n=1}^m L_n'' \right) \oplus \left(\bigoplus_{n=m+p+1}^{\infty} L_n'' \right) \oplus 0$ (en $\mathcal{H}_0$) $\oplus$ $\text{triang}(0, Q_{12}, Q_{13}, \dots, Q_{1p}; 0, Q_{23}, \dots, Q_{2p}; \dots; 0, Q_{p-1,p}; 0)$ (en $\bigoplus_{n=1}^p \mathcal{H}_{n+m}''$) $\oplus 0$ (en $\bigoplus_{n=1}^p \mathcal{R}_{n+m}$). Sea, finalmente, G_m el operador obtenido a partir de F_m reemplazando el último 0 de esta descomposición por $\bigoplus_{n=1}^p L_{n+m}''$.

Es inmediato que $\|E_m - G_m\| \rightarrow 0$ ($m \rightarrow \infty$) y que $G_m \approx D \oplus Q$, donde

$Q = \text{triang}(0, Q_{12}, \dots, Q_{1p}; 0, Q_{23}, \dots, Q_{2p}; \dots; 0, Q_{p-1,p}; 0)$ es precisamente la forma canónica de un operador nilpotente de orden menor o igual que p que actúa en un espacio de Hilbert de dimensión h' (si h' es un cardinal infinito) o bien en un espacio de dimensión p (si h' es finito). En el caso en que h' es cardinal infinito, podemos volver a utilizar los argumentos de la primera parte de la demostración, junto con el *Lema 1(i)*, para ver que $U(G_m)^-$ contiene un operador $G_m' \approx \left(\bigoplus_{n=1}^{\infty} L_n'' \right) \oplus Q$.

En conclusión, hemos demostrado que $S(T)^-$ contiene a todos los operadores unitariamente equivalentes a $\left(\bigoplus_{n=1}^{\infty} L_n'' \right) \oplus R$, donde $R \in L(\mathcal{H}_0)$ es un nilpotente tal que: (c') Si vale (c), entonces R es de rango finito; (d') Si vale (d), entonces R es un operador nilpotente arbitrario cuyo rango tiene dimensión menor o igual que h' . Ahora bien, todo operador casinilpotente es límite uniforme de nilpotentes; más aún, si el casinilpotente es compacto, entonces es límite de nilpotentes de rango finito (La primera afirmación está demostrada en [2]; [14]; [15]; la segunda, en [10]), de donde deducimos que el operador R puede reemplazarse por un casinilpotente elegido de acuerdo a lo indicado. En particular, vemos que $G = \left(\bigoplus_{n=1}^{\infty} L_n'' \right) \oplus L_0$ pertenece a $S(T)^-$.

Ahora "volvemos atrás" en la demostración y, utilizando (b) y [21], *Corolario 0.15*, obtenemos que el operador $H_m = \text{triang}(L_1'', L_{12}, \dots, L_{10}; L_2'', L_{23}, \dots, L_{20}; \dots; L_m'', L_{m,m+1}, \dots, L_{m0}; L_{m+1}'', 0, 0, \dots, 0; \dots; L_n'', 0, 0, \dots, 0; L_0)$ es similar a G y por lo tanto pertenece también a $S(T)^-$. Por último, utilizando nuevamente (e) vemos que la sucesión $\{H_m\}_{m=1}^{\infty}$ converge en norma a un operador L'' tal que $\|L'' - L\| < \varepsilon$. Dado que $L'' \in S(T)^-$ y que ε puede elegirse arbitrariamente chico, la demostración está terminada.

Como caso particular tenemos el siguiente corolario, cuya demostración queda a cargo del lector interesado.

COROLARIO 4. *Sea $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de operadores invertibles en*

un espacio de Hilbert de dimensión infinita h y sea $T = \bigoplus_{n=1}^{\infty} T_n$.

Si $\{\Lambda(T_n)\}$ es una familia disjunta de conjuntos compactos y $\|T_n\| \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$), entonces $S(T)^-$ contiene cualquier operador unitariamente equivalente a $T \oplus Q$, donde Q es un casinilpotente en un espacio de dimensión menor o igual que h .

TEOREMA 4. Sea K un operador compacto con infinitos autovalores no nulos $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$ (Todos distintos). Entonces $K = \text{triang}(K_1, K_{12}, K_{13}, \dots, K_{10}; K_2, K_{23}, \dots, K_{20}; \dots; K_n, K_{n, n+1}, \dots, K_{n0}; \dots; K_0)$ con respecto a alguna descomposición $\mathcal{H} = (\bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}_n) \oplus \mathcal{H}_0$, donde $\dim \mathcal{H}_n$ es finita para $n = 1, 2, \dots$, $0 \leq \dim \mathcal{H}_0 \leq \aleph_0$ (si $\mathcal{H}$ es separable) ó $\dim \mathcal{H}_0 = h$ (si $\mathcal{H}$ no es separable), $\Lambda(K|_{\bigoplus_{n=1}^m \mathcal{H}_n}) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$, $\Lambda(K_n) = \{\lambda_n\}$ ($n = 1, 2, \dots$) y $\Lambda(K_0) \subset \{0\}$.

Entonces $S(T)^-$ es el conjunto de todos los operadores compactos $T = \text{triang}(T_1, T_{12}, \dots, T_{10}; T_2, T_{23}, \dots, T_{20}; \dots; T_n, T_{n, n+1}, \dots, T_{n0}; \dots; T_0)$ tales que T_n es unitariamente equivalente a un operador $T'_n \in S(K_n)^-$ ($n = 1, 2, \dots$) y T_0 es un compacto casinilpotente en un subespacio de dimensión $\aleph_0$ o finita (si $\mathcal{H}$ es separable) ó dimensión igual a h (si $\mathcal{H}$ no es separable).

Demostración. Eligiendo $\sigma_n = \{\lambda_n\}$ y utilizando la compacidad de K y de T , todas las condiciones del Teorema 3 se pueden verificar en forma inmediata, y esto garantiza que $T \in S(K)^-$.

Para ver que $S(K)^-$ no puede contener otros operadores, basta aplicar las Proposiciones 1(vii) y 2, y el Corolario 1.

COROLARIO 5. Sea K un operador compacto con infinitos autovalores no nulos distintos $\lambda_1, \lambda_2, \dots$. Sea R_n el subespacio espectral de K asociado con $\{\lambda_n\}$ y sea $L_n = K|R_n$. Entonces

(i) Si el polinomio minimal de L_n es $(z - \lambda_n)$ para todo n , $[K]$ es minimal en $L(\mathcal{H})/\sim$.

(ii) Si el polinomio minimal de L_n es $(z - \lambda_n)^{\dim R_n}$ para todo n , $[K]$ es maximal de $(K + \{\lambda I : \lambda \in \mathbb{C}\})/\sim$ pero no es maximal en $L(\mathcal{H})/\sim$. Si Q_u es un "casinilpotente universal" de $L(\mathcal{H})$, $[K \oplus Q_u]$ es maximal en $L(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H})/\sim$.

(iii) Si $\dim R_n = 1$ para todo n , $S(K)^- = S(T)^-$ para cualquier $T \in S(K)^-$.

Demostración. La maximalidad de $[K \oplus Q_u]$ se sigue a partir de los resultados de [1], [15] sobre la caracterización de la clausura uniforme del conjunto de los operadores nilpotentes. El resto de la

demostración queda a cargo del lector.

Las condiciones del *Teorema 3* pueden parecer excesivamente restrictivas. El siguiente ejemplo demuestra que, en general, no pueden relajarse.

EJEMPLO. Sea $T_n = \text{triang}(1/n, 1; 1/n)$ en $\mathcal{H}_n$ de dimensión 2 y sea $K_n = \text{triang}(q/n, q/n; q/n)$ con respecto a la misma descomposición. Sea $\mathcal{H} = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}_n$, $T = \bigoplus_n T_n$ y $K = \bigoplus_n K_n$. Es evidente que T_n es similar a K_n para todo n . Si H es el operador hermitiano diagonal con autovalores $\{1/n: n = 1, 2, \dots\}$, entonces $\mathcal{H}$ admite una descomposición de la forma $\mathcal{H} = R_1 \oplus R_2$, con respecto a la cual $T = \text{triang}(H, I; H)$ y $K = \text{triang}(H, H; H)$. No es difícil ver que si $L_m = \text{triang}(H, F_m; H)$, donde F_m es el operador hermitiano diagonal con autovalores $1, 1/2, 1/3, \dots, 1/m, 1/m, 1/m, \dots$, es similar a T y que $\|L_m - K\| \rightarrow 0$ ($m \rightarrow \infty$); por lo tanto $K \in S(T)^-$. Dado que K es compacto y T no lo es, $T \notin S(K)^-$. La explicación de este hecho puede encontrarse en que, si R_m indica la proyección ortogonal de $\mathcal{H}$ sobre $\bigoplus_{n=1}^m \mathcal{H}_n$, entonces $\|(I - R_m)K\| \rightarrow 0$ ($m \rightarrow \infty$), mientras que $\{(I - R_m)T\}$ no converge en norma.

REFERENCIAS

- [1] C.APOSTOL, C.FOIAS y D.VOICULESCU, *On the norm-closure of nilpotents*. II, Rev. Roum. Math. Pures Appl. 19 (1974), 549-577.
- [2] C.APOSTOL y D.VOICULESCU, *On a problem of Halmos*, Rev. Roum. Math. Pures Appl., 19 (1974), 283-284.
- [3] L.BROWN, R.G.DOUGLAS y P.A.FILLMORE, *Unitary equivalence modulo the compact operators and extensions of C^* -algebras*, Proceedings of a Conference on Operator Theory, Halifax, Nova Scotia, 1973, Lecture Notes in Mathematics N°345, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1973, 58-128.
- [4] L.A.COBYRN y A.LEBOW, *Components of invertible elements in quotient algebras of operators*, Trans. Amer. Math. Soc. 130 (1968), 359-366.
- [5] G.EDGAR, J.ERNEST y S.G.LEE, *Weighing operator spectra*, Indiana Univ. Math. J. 21 (1971), 61-80.
- [6] R.GELLAR y L.PAGE, *Limits of unitarily equivalent normal operators*, Duke Math. J. 41 (1974) 319-322.
- [7] B.GRAMSCH, *Eine Idealstruktur Banachscher Operatoren-algebren*, J. Reine Angew. Math. (Crelle's Journal) 225 (1967) 97-115.
- [8] D.W.HADWIN, *Closures of unitary equivalence classes*, Notices Amer. Math. Soc. 21 (1974), 74T-B55, A-306.

- [9] P.R.HALMOS, *A Hilbert space problem book*, D.Van Nostrand, Princeton, New Jersey, 1967.
- [10] -----, *Ten problems in Hilbert space*, Bull. Amer. Math. Soc. 76 (1970), 887-933.
- [11] -----, *Limits of shifts*, Acta Sci. Math. (Szeged) 34 (1973), 131-139.
- [12] D.A.HERRERO, *Normal limits of nilpotent operators*, Indiana Univ. Math. J. 23 (1974), 1097-1108.
- [13] -----, *A Rota universal model for operators with multiply connected spectrum*, Rev. Roum. Math. Pures Appl. 21 (1976), 15-23.
- [14] -----, *Toward a spectral characterization of the set of norm limits of nilpotent operators*, Indiana Univ. Math. 24 (1975), 847-864.
- [15] -----, *Norm limits of nilpotent operators and weighted spectra in non-separable Hilbert space*, Rev. Un. Mat. Argentina 27 (1975), 83-105.
- [16] -----, *Universal quasiniptent operators*, Acta Sci. Math. (Szeged), (a publicarse).
- [17] T.KATO, *Perturbation theory for linear operators*, Springer-Verlag, New York Inc., New York, 1966.
- [18] E.LUFT, *The two-sided closed ideals of the algebra of bounded linear operators of a Hilbert space*, Czechoslovak Math. J. 18 (1968), 595-605.
- [19] C.L.OLSEN, *A structure theorem for polynomially compact operators*, Amer. J. Math. 93 (1971), 686-698.
- [20] C.PEARCY y N.SALINAS, *Compact perturbations of seminormal operators*, Indiana Univ. Math. J. 22 (1973), 789-794.
- [21] H.RADJAVI y P.ROSENTHAL, *Invariant subspaces*, Ergebnisse der Math. und ihrer Grenzgebiete, Band 77, Springer-Verlag, New York-Heidelber-Berlin, 1973.
- [22] C.RICKART, *General theory of Banach algebras*, D.Van Nostrand, Princeton, New Jersey-Toronto-London, 1960.
- [23] F.RIESZ y B.Sz.-NAGY, *Functional analysis*, Ungar, New York, 1955.
- [24] G.C.ROTA, *On models for linear operators*, Comm. Pure Appl. Math. 13 (1960), 469-472.
- [25] N.SALINAS, *Operators with essentially disconnected spectrum*, Acta Sci. Math. (Szeged) 33 (1972), 193-206.
- [26] D.A.HERRERO, *Closure of similarity orbits of Hilbert space operators, II: Normal operators*, J. London Math. Soc. (2) 13 (1976), 299-316.
- [27] -----, *Closure of similarity orbits of Hilbert space operators, III*, (a publicarse).
- [28] J.BARRIA SANCHEZ y D.A.HERRERO, *Closure of similarity orbits of nilpotent operators, I: Finite rank operators*, (a publicarse).

[29] J. BARRIA SANCHEZ y D.A. HERRERO, *Closure of similarity orbits of nilpotent operators, II*, (a publicarse).

Universidad Simón Bolívar
Caracas 108, Apartado Postal 80659
Venezuela

Recibido en noviembre de 1974.