Revista de la
Unión Matemática Argentina
Volumen 28, 1977.

EVOLUCION DEL CONCEPTO DE DIFERENCIAL *

Manuel Balanzat

El concepto de diferencial se remonta, como es sabido, a la época en que nació el cálculo infinitesimal; para las funciones reales de una variable real el uso de la notación dy/dx fue de gran utilidad pero enmascaró la esencia del concepto de diferencial. No hace demasiado tiempo era corriente el siguiente lenguaje: dx, cuando x es la variable, representa el incremento infinitamente pequeño dado a la variable, y cuando x es una función, es el término de primer orden de su incremento; puede admitirse que lo esencial está, pero desde luego que no está bien explicitado. En lo que respecta a las diferenciales de orden superior la explicación era, en casi todos los textos y hasta hace relativamente pocos años, bastante confusa.

En lo que respecta a las funciones reales de varias variables reales era corriente, en los buenos textos de comienzos del siglo, y aún hasta 1940, decir que una función f era diferenciable en (a,b) si existían las derivadas parciales en ese punto y se decía después que la diferencial era:

$$df = f'_x(a,b)dx + f'_y(a,b)dy$$

en donde dx y dy representaban los incrementos infinitamente pequeños de las variables.

Desde luego que esta definición es inadecuada, y no pone de manifiesto la propiedad de mejor aproximación de la diferencial. Por otra parte, como era de esperar, con la sola hipótesis de existencia de las dos derivadas primeras no se obtenía ningún resultado. ¿Qué hacían entonces los tratadistas para obtener los teoremas esenciales?. Tomemos por ejemplo uno de los mejores tratados de análisis que se han escrito, el libro de Goursat en su primera edición; para obtener los resultados fundamentales, por ejemplo: continuidad de la función diferenciable, diferenciación de funciones compuestas, condiciones de monogeneidad de las funciones complejas de variable compleja, se añadían hipótesis suplementarias, la más empleada era: las derivadas parciales existen en un entor-

*Conferencia "Julio Rey Pastor" de la XXVI Reunión de la Unión Matemática Argentina, Universidad de San Luis (1976).

no del punto y son continuas en él.

La primera definición correcta de la diferencial para funciones de varias variables es la de Stolz dada en su libro: "Grundzüge der Differential und Integral Rechnung" aparecido en 1893: la función f es diferenciable en el punto (a,b) si existen, en dicho punto, las dos derivadas primeras y si además:

$$f(a+h,b+k) - f(a,b) = (f'_x(a,b) + \varepsilon)h + (f'_y(a,b) + \mu)k$$

en donde ε y μ son funciones de h y de k que tienden a cero cuando h y k tienden a cero. La extensión a n variables es inmediata.

Stolz prueba que con su definición se pueden obtener los resultados del cálculo diferencial de varias variables que se obtenían con la hipótesis de existencia de derivadas parciales en un entorno y continuidad de las mismas en el punto, probó además que esta última hipótesis implicaba la diferenciabilidad, pero dió un contraejemplo para probar que la recíproca no era cierta; dicho contraejemplo es la función

$$f(x,y) = (x^2 + y^2).\text{sen } (x^2 + y^2)^{-1/2} \quad ; \quad f(0,0) = 0$$

que es diferenciable en (0,0) sin que haya continuidad de las derivadas parciales en ese punto.

Otro contraejemplo es la función:

$$F(x,y) = (x^2 + y^2)\ g((x^2 + y^2)^{1/2})$$

en donde g es una función continua sin derivada en ningún punto. La función F es diferenciable en (0,0) pero no hay derivadas parciales en el entorno de (0,0).

En lo que respecta a las condiciones de monogeneidad el primero que demostró que se necesitaban solamente las condiciones de Cauchy Riemann y la hipótesis de diferenciabilidad de u y v fue Fréchet en 1919.
Stolz observó que la hipótesis de existencia de las derivadas parciales era superflua, pero no insistió sobre este punto que tiene importancia en las extensiones de la teoría de la diferencial.

La definición de Stolz tardó mucho en llegar a los textos de enseñanza y pasó aún bastante más tiempo antes de que se le diera a la definición una forma intrínseca:

Si Ω es un abierto de R^n, f una aplicación de Ω en R y P un punto de Ω, la diferencial de f en P es un vector df(P) con la propiedad:

$$f(P + H) - f(P) = \langle df(P),H\rangle + \|H\| r(H); \qquad \lim_{H\to 0} r(H) = 0$$

Para las aplicaciones de R en R^n no se presentaron dificultades, ya que una tal aplicación es diferenciable si, y sólo si, lo son sus componentes.

En lo que respecta a las aplicaciones de R^n en R^m se hizo durante mucho tiempo su estudio mediante un análisis complicado de matrices jacobianas sin poner de manifiesto que el problema era de la misma naturaleza que el de la diferenciación de una función real de variables reales, es decir que la diferencial en P es una aplicación lineal, df(P) de R^n en R^m, que se podrá representar, dada una base, como una matriz jacobiana

$$df(P) = \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_k}\right)$$

y tal que:

$$f(P + H) - f(P) = df(P)[H] + \|H\| r(H); \quad \lim_{H\to 0} r(H) = 0$$

en donde el primer sumando del segundo miembro es el vector de R^m que se obtiene al aplicar la diferencial al vector H de R^n. (Usaremos siempre la notación [ ] en ese sentido).

Naturalmente si m=1, la diferencial es un vector del espacio dual y df(P)[H] es el producto escalar $\langle df(P),H \rangle$, si es n=1, la diferencial es un vector y df(P)[H] es el producto del escalar H por el vector df(P).

Es importante señalar que, para el caso de funciones reales de varias variables reales, Hadamard dió, en 1923, una nueva definición de la diferencial basada en el teorema de diferenciación de funciones compuestas. La memoria se titula: "La notion de différentielle dans l'enseignement" lo que muestra que el autor pensaba que el interés era sólo didáctico pero posteriores desarrollos probaron que esta definición era también interesante en otros aspectos. Severi dió también una nueva definición de la diferencial que no tuvo mayor repercusión.

Vamos a ver ahora cómo se produjo la extensión de la diferenciación a las aplicaciones entre espacios de dimensión infinita cuyo estudio empezó bastante antes de quedar bien establecida la definición para espacios de dimensión finita.

El precursor de la teoría fue Volterra, que ya en 1887 introdujo el concepto de función de línea, siguieron los trabajos de varios matemáticos entre los cuales el más importante, antes de la primera guerra mundial, fue el de Gateaux; posteriormente Paul Levy obtuvo resultados de interés, pero puede considerarse como el creador de la teoría moderna a Fréchet; su memoria: "Sur la notion de différentielle dans l'analyse générale" (Ann. Ec. Normale Sup., 1925) es la primera exposición de conjunto de la teoría en forma clara y con la mayor parte de los resultados básicos. Este trabajo fue completado por dos importantes memorias, una de Graves: "Riemann Integration and Taylor's Theorems in General Analysis" y otra de Hildebrandt y Graves: "Implicit Functions and their Differentials in General Analysis", ambas publicadas en 1929 en las "Transactions of the A.M.S.".

La teoría de la diferencial para aplicaciones entre espacios normados, iniciada con la memoria de Fréchet que acabamos de mencionar, es hoy día una teoría clásica que se enseña sistemáticamente en muchas universidades y son numerosos los textos en los que está expuesta. Uno de los primeros autores que incluyó esta teoría en un texto relativamente elemental fue Dieudonné en su libro Fundamentos del Análisis Moderno, aparecido en 1960.

Recordemos brevemente la formulación de esta teoría. Sean X e Y dos espacios normados reales, $L(X,Y)$ el espacio de las aplicaciones lineales y continuas de X en Y, Ω un abierto de X, x_o un punto de Ω y f una aplicación de Ω en Y. Se dice que f es *diferenciable Fréchet* en x_o si existe un elemento de $L(X,Y)$, que se dice que es la diferencial de f en x_o y se representa con la notación $df(x_o)$, tal que:

$$f(x_o + h) - f(x_o) = df(x_o)[h] + \|h\| r(h); \quad \lim_{h\to 0} r(h) = 0$$

Se obtienen así todos los resultados clásicos: unicidad, linealidad, continuidad, diferenciación de productos (que se definen como aplicaciones bilineales continuas), el teorema básico de diferenciación de funciones compuestas, la fórmula del incremento finito, la determinación de máximos y mínimos cuando Y = R (con la que se obtiene una deducción elegante de las ecuaciones de Euler del Cálculo de Variaciones), los teoremas de diferenciación de sucesiones así como los teoremas de función inversa y de funciones implícitas.

También se pueden extender los teoremas sobre diferenciales exactas en la forma siguiente, que esbozaremos, por ser menos frecuente su inclusión en los textos: sean X e Y dos espacios de Banach reales, Γ una curva orientada simple en X, α una aplicación de Γ en $L(X,Y)$. Se define la integral curvilínea en la forma habitual:

$$\int_\Gamma \alpha(x)[dx] = \lim \sum \alpha(t_i)[x_i - x_{i-1}].$$

y se demuestra que el límite existe cuando α es continua y Γ rectificable, hipótesis que mantendremos en lo que sigue. Se tienen los siguientes resultados sobre integración de diferenciales exactas:

Si Ω es un abierto conexo de X, Γ una curva orientada simple, contenida en Ω, de extremos a y b y si f es una aplicación de Ω en Y continuamente diferenciable en Ω, se tiene:

$$\int_{\Gamma} df(x)[dx] = f(b) - f(a)$$

Si Ω es un abierto conexo en X, α es una aplicación continua de Ω en L(X,Y), tal que las integrales de α sobre dos poligonales con los mismos orígenes y extremos sean iguales, entonces es posible definir:

$$f(x) = \int_a^x \alpha(u)[du]$$

y esta función es diferenciable en Ω y $df(x) = \alpha(x)$.

Hay también otro enfoque posible para definir la diferencial de una aplicación entre dos espacios normados el cual está basado en la memoria antes mencionada de Hadamard, cuya idea esencial es primero la de definir, en la forma habitual, la derivada de una aplicación de R en un normado y definir después la diferencial usando la regla de diferenciación de funciones compuestas. Precisando:

Sean X e Y dos espacios normados reales, Ω un abierto de X, x_o un punto de Ω y f una aplicación de Ω en Y. Se dice que f es diferenciable Hadamard en x_o si existe un elemento de L(X,Y), que se dice que es la diferencial de f en x_o, y que representaremos con la notación $df(x_o)$, con la siguiente propiedad:

Cualquiera que sea la aplicación g de un intervalo real en Ω, derivable en λ_o con $g(\lambda_o) = x_o$, entonces la aplicación compuesta $G(\lambda) = f(g(\lambda))$ es derivable en λ_o y se tiene:

$$G'(\lambda_o) = df(x_o)[g'(\lambda_o)].$$

Hadamard probó que si $X = R$ e $Y = R^m$, la definición de Stolz y la suya coincidían y es fácil ver que lo mismo ocurre si se hace $X = R^n$.

Para el caso de dimensión cualquiera, finita o infinita, es claro que una aplicación diferenciable en el sentido de Fréchet lo es en el de Hadamard y esta implicación subsistirá con cualquier definición de la diferencial que cumpla la ley de diferenciación de funciones compuestas y que se reduzca a la derivada ordinaria para $X = R$.

En cambio con dimensión infinita existen aplicaciones diferenciables Hadamard que no son diferenciables Fréchet. Esbozaremos el contraejemplo; sea X el espacio de las funciones continuas en un intervalo con la norma del supremo y M la aplicación de X en R definida por $M(f) = \max\{f(x)\}$. Sea f_o un vector de X; es necesario para que M sea diferenciable en f_o que esta función alcance su máximo en un solo punto, ya que se prueba facilmente que si M es diferenciable en f_o y si c es un punto en el cual f_o alcanza su máximo, entonces la diferencial, que suponíamos existente, tiene que ser la delta de Dirac en c, luego por la unicidad de la diferencial, c tiene que ser el único punto de máximo de f_o.

Ahora bien puede probarse que si f_o alcanza su máximo en un solo punto, M es diferenciable Hadamard en el punto pero no es nunca diferenciable Fréchet.

Otra forma de encarar la extensión de la diferencial fue iniciada por Gateaux en 1913 y desarrollada en su memoria póstuma: "Fonctions d'une infinité de variables indépendantes" publicada en el Bull. de la Soc. Math. de France en 1919. La teoría de Gateaux presenta interés y tiene importantes aplicaciones. La diferencial se define de la siguiente manera:

Sean X e Y dos espacios normados, Ω un abierto de X, x_o un punto de Ω y f una aplicación de Ω en Y. Tomemos h perteneciente a X y distinto del cero, definimos:

$$F(t) = f(x_o + th) \quad \text{con } x_o + th \in \Omega$$

y supongamos que existe el límite:

$$F'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{F(t) - F(0)}{t}$$

entonces se dice que F'(0) es la variación de Gateaux de f en x_o respecto del incremento, que se designa con la notación $Vf(x_o;h)$; se ve que esta definición es la extensión natural del concepto de derivada en una dirección.

Si $Vf(x_o;h)$ existe para todo h y si considerada como función de h es lineal y continua se dice que V es la diferencial de Gateaux, o diferencial débil de f en x_o.

La definición de Gateaux es muy general ya que se pueden dar ejemplos de aplicaciones de R^2 en R que son diferenciables en el sentido de Gateaux y no lo son en el de Stolz.

Desarrollada la teoría de la diferencial dentro del dominio de los espacios normados se planteó la posibilidad de extenderla a un cuadro más general. Fréchet,en su memoria de 1937, fue el primero que planteó la necesidad de ir mas allá del cuadro de los espacios normados y sugirió que la definición de Hadamard sería la más adecuada para hacer esta generalización.

Naturalmente la extensión a un dominio más amplio que el de los espacios normados necesitaba una buena definición de ese dominio, que en 1937 no existía aún. Cuando la teoría de espacios vectoriales topológicos tomó forma definitiva fue posible desarrollar el cálculo diferencial en dichos espacios.

Comenzaremos por un caso simple; sea Y un espacio vectorial topológico y f una aplicación de un intervalo real en Y. Para que una definición de la diferencial sea de interés debe conducir en este caso a definir la diferencial en x_o por la fórmula: $df(x_o)[t] = t.f'(x_o)$, en donde t es escalar real y $f'(x_o)$ es el vector derivada:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_o + h) - f(x_o)}{h}$$

y parece conveniente que se deba cumplir el teorema siguiente: si $f'(x)$ es nula en todo el intervalo entonces f es una constante.

Ahora bien, esta propiedad puede no cumplirse para el caso en que Y sea un espacio no localmente convexo; en efecto sea Y el espacio de las funciones reales medibles en (0,1) con la convergencia en medida, es decir que una base de entornos del cero está formada por la familia $V(\varepsilon,\delta)$ definida por la propiedad f pertenece a $V(\varepsilon,\delta)$ si la medida del conjunto de puntos en los cuales es $|f(x)| > \varepsilon$ es menor que δ. Es conocido que así se obtiene un espacio vectorial topológico metrizable y no localmente convexo.

Consideremos la aplicación F de (0,1) en Y definida así: $F(t) = H_t$ en donde la función H_t se define por $H_t(x) = 0$ para $x \leqslant t$ y $H_t(x) = 1$ para $x > t$. El cociente de incrementos,

$$\frac{F(t+h) - F(t)}{h}$$

es una función que es nula salvo en un intervalo de longitud h, luego dado $V(\varepsilon,\delta)$, basta tomar $h < \delta$ para que el cociente de incrementos esté en el entorno, lo que implica $F'(t) = 0$ y sin embargo F no es constante.

Este resultado parece indicar que el dominio indicado para una buena teoría debe ser el de los espacios localmente convexos al menos si se buscan propiedades de tipo global; las propiedades de tipo local, que sólo dependen de la diferenciabilidad en un punto, son válidas aún cuando no se haga la hipótesis de convexidad local.

Las formas de extensión a los espacios localmente convexos del concepto de diferencial presentan características diferentes según que se quiera generalizar la definición de Hadamard (o la de Gateaux) o la definición de Fréchet.

En el primer caso la definición dada para los espacios normados se extiende en forma inmediata, no así las demostraciones que exigen técnicas y razonamientos diferentes. La teoría fue desarrollada por Balanzat (Revista de la U.M.A., 1962, Anais da Academia Brasileira de Ciências, 1962 y Mathematicae Notae , 1964).

La extensión para la diferencial de Fréchet implica obtener una condición equivalente a la

$$\frac{f(x_o+h) - f(x_o) - df(x_o)[h]}{\|h\|} \xrightarrow[h\to 0]{} 0$$

en la que interviene de manera esencial la norma.

Para obtener esta generalización se han elaborado numerosas teorías, en su mayoría a partir de 1960, citaremos entre los principales autores: Michal, Hyers, Lamadrid, Sebastiao e Silva, Marinescu, Vainberg, Engel, Bastiani, Keller y otros. No es posible, por razones de tiempo en esta conferencia hacer un estudio detallado y comparativo de las diferentes definiciones, nos remitimos a la excelente exposición sobre el tema: Averbukh and Smolyanov, "The various definitions of the derivative in linear topological spaces", Russian Mathematical Surveys, vol. 23, 1968, pgs. 67-113. La tabla de las distintas definiciones ocupa tres páginas y hay además dos diagramas sobre sus relaciones mutuas.

Parece indicado señalar la existencia de otras dos publicaciones en donde se hace una exposición al día de la teoría y se da además una extensa bibliografía, que recomendamos a los que quieran ampliar los resultados, forzosamente someros, de esta conferencia. Las dos publicaciones son: la de Averbukh and Smolyanov, "The theory of differentiation in linear topological spaces", Russian Mathematical Surveys", vol. 22, 1967, pgs. 201-258, y el artículo de M.Z. Nashed: "Differentiability and Related Properties of Nonlinear Operators; some Aspects of the Role of Differentials in Nonlinear Functional Analysis" publicado en el libro "Non Linear Functional Analysis and Applications", Academic Press,1971,pgs.103-310.

Daremos ahora una definición de la diferenciabilidad Fréchet que, abarca, haciendo modificaciones de detalle y particularizaciones, una gran parte de las definiciones dadas por los distintos autores.

Sean X e Y dos espacios vectoriales topológicos, σ una familia de subconjuntos de X que debe cumplir un cierto número de condiciones, análogas pero no idénticas, a las empleadas para definir las σ-topologías en L(X,Y).

Sea Ω un abierto de X, x_o un punto de Ω y f una aplicación de Ω en Y. Se dice que f es σ-diferenciable en x_o si existe $df(x_o) \in L(X,Y)$, que es la diferencial, tal que para $S \in \sigma$ y $h \in S$, se tenga:

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x_o+th) - f(x_o)}{h} = df(x_o)[h],$$

con convergencia uniforme en S.

En particular si σ es la familia de los finitos se dice que se tiene la diferencial débil (ligada con la de Gateaux), si es la familia de los compactos se dice que se tiene la diferencial compacta, (ligada con la de Hadamard) y finalmente si se toma la familia de los acotados se habla de la diferencial acotada.

Las distintas teorías de la diferenciación permiten obtener bastantes propiedades de la teoría para los normados, aún cuando algunas de ellas tienen una forma algo diferente. Hay, por ejemplo, varias formas de extender el teorema de los incrementos finitos para espacios localmemte convexos de las cuales mencionaremos la siguiente: Sea f una aplicación diferenciable Hadamard en un abierto convexo y supongamos que el conjunto de las diferenciales en los puntos de dicho conjunto sea equicontinuo; entonces dado un entorno V de cero en Y que sea cerrado y absolutamente convexo, existe un entorno U de cero en X, tal que: si a y b están en el abierto y $(b-a) \in tU$, entonces $f(b) - f(a) \in tV$.

La definición de las integrales curvilíneas se hace como para el caso de los espacios normados y siguen valiendo los teoremas sobre diferenciales exactas.

Puede igualmente hacerse un estudio de las diferenciales de orden superior, que aquí nos limitaremos a mencionar.

Por otra parte si bien algunas propiedades se generalizan, hay otras que no se pueden extender, lo que marca diferencias importantes entre la teoría para espacios normados y para espacios vectoriales topológicos, por ejemplo en este último dominio la diferenciabilidad en un punto no implica la continuidad en dicho punto y hay incluso resultados que prueban que esto no es demasiado excepcional, aclaremos este punto.

Recordemos que un espacio vectorial topológico es sucesional, cuando $x \in \bar{A}$, implica la existencia de una sucesión (x_n) de elementos de A tales que $x = \lim x_n$. Naturalmente todos los espacios metrizables son sucesionales pero se puede dar ejemplos de espacios vectoriales topológicos sucesionales y no metrizables. Se obtienen los resultados siguientes:

Sea X un espacio sucesional e Y un espacio vectorial topológico, cualquier aplicación de X en Y diferenciable Hadamard en un punto es continua en dicho punto.

Sea X un espacio no sucesional e Y un espacio vectorial topológico, siempre se puede definir una aplicación de X en Y diferenciable Hadamard y discontinua en un punto.

Sean X e Y dos espacios vectoriales topológicos y f una aplicación de X en Y; suponemos que se toma una definición de σ-diferenciabilidad tal que la familia σ contenga todas las sucesiones convergentes. Entonces la condición necesaria y suficiente para que cada aplicación de X en Y que sea σ-diferenciable en x_o sea también continua en x_o, es que X sea sucesional.

Cuando se considera la diferenciabilidad en un abierto el problema cambia y hay distintos resultados de los que citaremos el siguiente:

Si f es diferenciable Hadamard en un entorno de x_o y si el conjunto de las diferenciales en ese entorno es equicontinuo, entonces f es continua en x_o.

Otra diferencia de interés con el caso de los normados es que no se conocen teoremas buenos de existencia para las funciones implícitas. El enunciado del teorema de existencia y diferenciabilidad es facilmente traducible al caso de los espacios vectoriales topológicos, pero no así la demostración, es más, la traducción literal lleva a un resultado falso, aún en el caso de los espacios metrizables.

Queda la posibilidad de obtener algunos resultados con traducciones menos literales o con nuevas definiciones de la diferencial, hay algunos resultados parciales de los cuales nos limitaremos a señalar el de ver Eecck "Sur le calcul différentiel dans les espaces vectoriels topologiques", Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle, 1974, en donde con, una nueva forma de definir la diferencial, obtiene la diferenciabilidad cuando se admite la existencia de la función implícita.

Para terminar mencionaremos la existencia de otros trabajos en los que se estudia la diferenciación con estructuras algo distintas de las de los espacios vectoriales topológicos, este aspecto no lo podemos desarrollar por falta de tiempo, nos limitaremos a señalar para estructuras pseudo-topológicas el texto de Frölicher and Bucher: "Calculus in Vector Spaces without Norm", Lectures Notes n° 30 y para las estructuras bornológicas los trabajos de Colombeau, en particular la memoria: "Sur quelques particularités du calcul différentiel dans les espaces bornologiques ou topologiques", Revue Roumaine de Mathématiques Pures et Appliquées, vol. 17, 1973.

Universidad Nacional de Buenos Aires.
Argentina.