

ECUACION CUASIARMONICA CON DERIVADA TEMPORAL.
SU RESOLUCION POR EL METODO DE FAEDO-GALERKIN
CON ELEMENTOS FINITOS. (PROGRAMAS CTR Y CTR1).

F.G. Basombrío y B. Cruz*

RESUMEN. Se presenta un programa de cálculo cuyo objetivo es obtener una solución numérica aproximada del siguiente problema de evolución,

$$v \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(b \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(b \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) = g(x, y, t)$$

donde la solución $\phi(x, y, t)$ buscada en una región Ω del plano y para $0 \leq t \leq T$ deberá satisfacer la condición inicial,

$$\phi(x, y, 0) = \varphi(x, y) ;$$

la condición de contorno tipo Dirichlet

$$\phi|_{\Gamma^*} = \delta$$

en una parte Γ^* de Γ ; y en el resto Γ' de dicha frontera su derivada interior a Ω verificará la condición de contorno tipo Neumann

$$b \frac{\partial \phi}{\partial n} \Big|_{\Gamma'} = \gamma \quad n: \text{normal interior}$$

A la par que g , tanto v como b , δ y γ pueden ser funciones del punto y del tiempo t . Además b en Ω ha de estar sujeto al requisito

$$C \geq |b(x, y, t)| \geq c > 0$$

C, c : constantes.

Para el caso axisimétrico el problema es

$$v \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r} \left(b \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(b \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) + \frac{b}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} = g(r, z, t)$$

con similares condiciones, inicial, de Dirichlet y de Neumann.

El procedimiento general se encuadra matemáticamente en el método de Galerkin con la adaptación de Faedo.

El espacio, parametrizado por las variables x, y (ó r, z), es discretizado por elementos finitos triangulares, y la variable temporal t por

* Centro de Cómputos del Centro Atómico Bariloche. Comisión Nacional de Energía Atómica.

diferencias finitas.

Se utiliza el esquema de Crank-Nicolson, que para evaluar la solución en el nivel n ($t = n\Delta t$) toma promedios entre los niveles $n-1$ y n . En cada paso se resuelve por el algoritmo de Gauss, un sistema lineal de ecuaciones algebraicas de matriz banda simétrica, que permite determinar los valores nodales del siguiente nivel. El método, implícito, es entonces incondicionalmente estable y si el problema original está bien planteado en el sentido de la teoría de ecuaciones en derivadas parciales, es también convergente.

Experimentos numéricos realizados con soluciones exactas generales y llevados hasta 110 ciclos en el tiempo para una red de 287 nodos y 512 elementos, han mostrado que el error de redondeo (con precisión simple) llega solamente a afectar la cuarta o quinta cifra de los resultados, mientras que los de discretización se acumulan alcanzando una magnitud del orden del 1%. Está prevista la extensión no lineal general de este código.

APLICACIONES POSIBLES. Problemas no estacionarios de conducción térmica; circulación de fluidos viscosos incompresibles; difusión de trazadores radioactivos en metales, etc.

Recibido en abril de 1977.

Versión final agosto de 1977.