Revista de la
Unión Matemática Argentina
Volumen 28, 1978.

ANILLO DE WITT DE FIBRADOS VECTORIALES

Angel R. Larotonda y Miguel A. López

Asumimos la teoría de fibrados vectoriales (reales de dimensión finita) y su correspondiente K0-teoría según la formulación de [1].

Una *forma cuadrática* sobre un fibrado vectorial $\xi = (E,p,X)$ es una aplicación $q: E \longrightarrow R$ continua tal que q/E_x es una forma cuadrática sobre el espacio vectorial $E_x = p^{-1}(x)$ para cada $x \in X$. La aplicación $B_q: E(\xi\oplus\xi) \longrightarrow R$ definida por $B_q(a,b) = \frac{1}{2}(q(a+b)-q(a)-q(b))$, es continua y su restricción a $E_x x E_x$ es bilineal y simétrica para cada $x \in X$. Definimos un X-morfismo de fibrados vectoriales $d_q: \xi \longrightarrow \xi^*$ por $d_q(a)(b) = B_q(a,b)$ cualquiera sea $(a,b) \in E(\xi\oplus\xi)$; q se dice *no degenerada* si d_q es un X-isomorfismo.

Un *fibrado cuadrático* es un par (ξ,q) donde ξ es un fibrado vectorial y q es una forma cuadrática sobre ξ no degenerada.

Una *isometría* $(\xi_1,q_1) \longrightarrow (\xi_2,q_2)$ de fibrados cuadráticos de base X es un X-morfismo (necesariamente un X-isomorfismo) $f: \xi_1 \longrightarrow \xi_2$ de los fibrados vectoriales subyacentes, tal que $q_1 = q_2 \circ f$. Si existe una isometría $f: (\xi_1,q_1) \longrightarrow (\xi_2,q_2)$ pondremos $(\xi_1,q_1) \approx (\xi_2,q_2)$.

Si (ξ_1,q_1) y (ξ_2,q_2) son fibrados cuadráticos de base X, definimos su *suma ortogonal* $(\xi_1,q_1) \perp (\xi_2,q_2) = (\xi_1\oplus\xi_2,\ q_1\perp q_2)$ y su *producto tensorial* $(\xi_1,q_1) \otimes (\xi_2,q_2) = (\xi_1 \otimes \xi_2\ ,\ q_1 \otimes q_2)$ poniendo:

$$(q_1 \perp q_2)\ (a_1,a_2) = q_1(a_1) + q_2(a_2)$$

$$(q_1 \otimes q_2)\ (a_1 \otimes a_2) = q_1(a_1).q_2(a_2)$$

para $a_i \in E(\xi_i)$; $i = 1,2$.

Previas las identificaciones naturales de $(\xi_1 \oplus \xi_2)^*$ y $(\xi_1 \otimes \xi_2)^*$ con $\xi_1^* \oplus \xi_2^*$ y $\xi_1^* \otimes \xi_2^*$ respectivamente, se tiene $d_{q_1\perp q_2} = d_{q_1} \oplus d_{q_2}$ y $d_{q_1 \otimes q_2} = d_{q_1} \otimes d_{q_2}$. Se concluye que la suma ortogonal y el producto tensorial de fibrados cuadráticos son fibrados cuadráticos.

Dado un fibrado vectorial ξ definimos una forma cuadrática no degenerada q_ξ sobre $\xi \oplus \xi^*$ por $q_\xi(x,y) = y(x)$. El fibrado cuadrático $H(\xi) = (\xi \oplus \xi^*,\ q_\xi)$ se dice el *fibrado hiperbólico* asociado a ξ.

Si $f: \xi \longrightarrow \eta$ es un X-isomorfismo de fibrados vectoriales, H(f) =

$= f \oplus (f^{-1})^*: H(\xi) \longrightarrow H(\eta)$ es una isometría. Por otra parte, $H(\xi_1 \oplus \xi_2) \approx H(\xi_1) \perp H(\xi_2)$.

H resulta un funtor de categorías con producto (en el sentido de [2]) de la categoría de fibrados vectoriales e isomorfismos con $\oplus$, en la categoría de fibrados cuadráticos e isometrías con $\perp$.

Si X es un espacio topológico indicamos con Witt(X) el conjunto de clases de fibrados cuadráticos de base X módulo la relación:

" $(\xi_1,q_1) \equiv (\xi_2,q_2)$ sii existen η_1,η_2 fibrados vectoriales de base X tales que $(\xi_1,q_1) \perp H(\eta_1) \approx (\xi_2,q_2) \perp H(\eta_2)$ ".

Así $\oplus$ y $\otimes$ inducen en Witt(X) una estructura de anillo conmutativo que llamaremos *anillo de Witt* de X, terminología sugerida por el hecho de que la definición anterior coincide con la clásica de anillo de Witt de R (ver [3], §8) para el caso de espacios de un punto. En realidad Witt(X) coincide - al menos para espacios compactos - con el anillo de Witt de la R-álgebra C(X,R) ([4]). Ponemos $[(\xi,q)]$ para indicar la $\equiv$-clase del fibrado cuadrático (ξ,q).

Se tienen entonces los siguientes resultados:

TEOREMA 1. *Si* X *es un espacio paracompacto y* (ξ,q) *es un fibrado cuadrático de base* X*, existen subfibrados vectoriales* ξ_1,ξ_2 *de* ξ, q-*ortogonales (esto es,* B_q*-ortogonales en el sentido usual), tales que* $\xi = \xi_1 \oplus \xi_2$, $q|\xi_1$ *es positivo-definida y* $q|\xi_2$ *es negativo-definida.*

(Este teorema permite reobtener los resultados de ([5], §40) sobre existencia de formas cuadráticas de signatura dada).

TEOREMA 2. *Con la notación del teorema anterior, la aplicación* $(\xi,q) \longmapsto \xi_1 - \xi_2$ *de* Witt(X) *en* KO(X) *está bien definida y resulta un isomorfismo de anillos.*

La aplicación indicada deviene así una generalización de la "signatura" de formas cuadráticas reales, reduciéndose a la misma en el caso de espacios de un punto.

BIBLIOGRAFIA

[1] D. HUSEMOLLER, *Fibre bundles*, Mc Graw-Hill, (1966).

[2] H. BASS, *Lectures on topics in algebraic K-theory*, Tata Institute of Fundamental Resarch, Bombay, (1967).

[3] N. BOURBAKI, *Algèbre*, Chapitre IX, *Formes sesquilinéaires et formes quadratiques*, Hermann, Paris, (1959).

[4] R. SWAN, *Vector bundles and projective modules*, Trans. A.M.S. 105, (1962), 264-277.

[5] N. STEENROD, *The topology of fibre bundles*, Princeton, (1951).

Universidad Nacional de Buenos Aires.
Argentina.

Recibido en agosto de 1977.