Revista de la
Unión Matemática Argentina
Volumen 28, 1977.

DETERMINACION DE LAS FUNCIONES ESFERICAS IRREDUCIBLES DEL PAR (SU(2),SO(2)) (*)

Sofía Paczka y Susana Fornari

INTRODUCCION. Dados G un grupo de Lie, K un subgrupo compacto de G, χ un carácter irreducible de K, V un espacio vectorial sobre C de dimensión finita y dk la medida invariante normalizada sobre K, decimos que una función continua $\Phi: G \longrightarrow \mathrm{End}(V)$ es una función esférica del par (G,K) asociada al carácter χ si:

$$\Phi(e) = I \quad (e = \text{identidad de } G,\ I = \text{identidad de } \mathrm{End}(V))$$

$$\Phi(x).\Phi(y) = \chi(e) \int_K \chi(k^{-1})\, \Phi(xky)\, dk \qquad \text{para todo } x,y \in G$$

Φ es irreducible cuando V no tiene subespacios propios distintos del $\{0\}$ estables por $\Phi(x)$ para todo $x \in G$.

En nuestro caso K = SO(2) es un toro maximal en G = SU(2). Si K es un toro maximal en SU(2), χ un carácter irreducible de K y Φ una función esférica del par (SU(2),K) entonces la función definida por $[x \longrightarrow \Phi(g^{-1}xg)]$ es una función esférica del par $(SU(2), gKg^{-1})$ asociada al carácter $[k \longrightarrow \chi(g^{-1}kg)]$.

Teniendo en cuenta esto determinaremos todas las funciones esféricas irreducibles del par (SU(2),T) con T otro toro maximal en SU(2):

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} \ \theta \in R \right\}$$

Por otra parte si K es un toro maximal en SU(2) las funciones esféricas irreducibles del par (SU(2),K) son de dimensión 1, o sea $V \approx C$. En consecuencia determinar todas las funciones esféricas irreducibles del par (SU(2),T) consiste en hallar todas las funciones que satisfacen:

a) $\Phi: SU(2) \longrightarrow C$ continua.

b) $\Phi(e) = I$.

(*) El material de esta publicación ha sido tomado de nuestro trabajo final presentado en el Instituto de Matemática, Astronomía y Física de la Universidad Nacional de Córdoba, para optar al título de Licenciadas en Matemática; dicho trabajo fue dirigido por el Dr. Juan A. Tirao.

c) $\Phi(x).\Phi(y) = \int_T \chi(t^{-1})\, \Phi(xty)\, dt$ para todo $x,y \in SU(2)$.

De la propiedad c) se deduce facilmente que para todo $t_1,t_2 \in T$ y todo $x \in SU(2)$ $\Phi(t_1xt_2) = \chi(t_1).\Phi(x).\chi(t_2)$. Además $\Phi \in C^\infty(SU(2),C)$, más aún, es analítica y es autofunción del operador de Casimir Δ de $SU(2)$.

Más aún, la recíproca es cierta, o sea, es esférica una función Φ: $SU(2) \longrightarrow C$ que satisface:

$\Phi \in C^\infty(SU(2),C)$.

$\Phi(e) = 1$.

$\Phi(t_1xt_2) = \chi(t_1)\Phi(x)\chi(t_2) \quad \forall\ t_1,t_2 \in T\ ; \quad \forall\ x \in SU(2)$.

$\Delta\ \Phi = \lambda\ \Phi\ , \quad \lambda \in R$.

Sea Φ una función esférica asociada al carácter χ_n de T, donde

$$\chi_n : \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} \longmapsto e^{in\theta} \quad , \quad n \text{ entero.}$$

Entonces $\overline{\Phi}$, la función conjugada de Φ, es esférica asociada al carácter χ_m con $m = -n$. Por lo tanto es suficiente determinar todas las funciones esféricas asociadas a los caracteres χ_n con $n \in N = \{0,1,2,\ldots\}$.

Para cada $n \in N$, la función Φ_n: $SU(2) \longrightarrow C$ es esférica asociada al carácter χ_n donde

$$\Phi_n : \begin{pmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix} \longmapsto a^n.$$

Tenemos que S^2 es una variedad compleja con la estructura que le inducen las proyecciones estereográficas, además $SU(2)$ actúa transitivamente en S^2, siendo la acción por transformaciones holomorfas y resultando T el grupo de isotropía del polo norte N de S^2, de todo esto se obtiene que $SU(2)/_T$ es difeomorfo a S^2. Llamemos α a este difeomorfismo.

Sea ∂ la componente holomorfa de la diferencial exterior en S^2 y sea δ el operador adjunto de ∂ con respecto al siguiente producto escalar en S:

$$\langle w_1,w_2 \rangle = \int_{S^2} |\Phi_n(g)|^2\ \frac{1}{2}\ \langle w_{1m},w_{2m} \rangle_2\ dm$$

donde w_1 y w_2 son 1-formas complejas de S^2, $n \in N$, g es tal que $\alpha \circ \pi(g) = m$, (π la proyección canónica de $SU(2)$ en $SU(2)/_T$), dm es una medida $SU(2)$-invariante normalizada y $\langle\ ,\ \rangle_2$ es el producto escalar inducido por R^3.

De $\displaystyle\int_{S^2} |\Phi_n(g)|^2 \frac{1}{2} \langle w_{1m}, w_{2m} \rangle_2 dm =$

$$= \int_{SU(2)} |\Phi_n(g)|^2 \langle [(\alpha\circ\pi)^* w_1]_g, [(\alpha\circ\pi)^* w_2]_g \rangle \, dg$$

(el producto escalar que aparece en la integral sobre SU(2) es el inducido por la forma de Killing) se deduce la relación

$$\Phi_n . \delta\partial h \circ (\alpha\circ\pi) = -(\frac{\Delta}{2} + \frac{n^2}{16} + \frac{n}{8}) . \Phi_n . [h\circ(\alpha\circ\pi)]$$

con $h \in C^\infty(S^2, C)$; y resulta que si h satisface: $h(N) = 1$, h constante sobre los paralelos y $\delta\partial h = \gamma h$, entonces $\Phi: SU(2) \longrightarrow C$ definida por $\Phi = \Phi_n . [h\circ(\alpha\circ\pi)]$ es una función esférica asociada al carácter χ_n, $n \in N$.

Como la función h es constante sobre los paralelos, la ecuación $\delta\partial h = \gamma h$ con $h(N) = 1$ se reduce a la ecuación en una variable, en el intervalo $[-1,1]$: $(1-x^2)\dfrac{d^2h}{dx^2} + [n-(n+2)x]\dfrac{dh}{dx} + 4\gamma h = 0$, con la condición $h(1) = 1$, cuyas soluciones para γ de la forma $\gamma = \frac{k}{4}(k+n+1)$ con k y $n \in N$, son los polinomios de Jacobi $P_k^{(0,n)}$.

Si $h_{n,k}(\varphi,\theta) = P_k^{(0,n)}(\cos\theta)$ entonces, por la densidad de los polinomios de Jacobi $P_k^{(0,n)}$, $k \in N$, en el espacio $L^2([-1,1], (1+x)^n dx)$, resulta que $\Phi_{n,k} = \Phi_n . [h_{n,k}\circ(\alpha\circ\pi)]$ son *todas* las funciones esféricas irreducibles del par (SU(2),T) asociadas al carácter χ_n $n \in N$.

PRELIMINARES. $SU(2) = \{A \in M(2,C) / A^{-1} = {}^t\overline{A}, \det A = 1\}$ es un grupo de Lie compacto, conexo de dimensión 3. Su álgebra de Lie es

$$su(2) = \left\{ \begin{pmatrix} ai & b \\ -\overline{b} & -ai \end{pmatrix} / a \in R, b \in C \right\}$$

Sea $B(X,Y) = tr(adX.adY)$, X e $Y \in su(2)$, la forma de Killing de su(2); es definida negativa pues el centro de SU(2) es discreto. Por lo tanto SU(2) es semisimple. Además, sabemos que en su(2) $B(X,Y) = 4tr(X.Y)$.

OPERADOR DE CASIMIR. Sea G un grupo de Lie compacto, conexo y semisimple de dimensión n; $\langle\ ,\ \rangle$ un producto escalar invariante a izquierda inducido por la forma de Killing, $\{X_1,\ldots,X_n\}$ una base de g = álgebra de Lie de G; $\tilde{X}_1,\ldots,\tilde{X}_n$ campos vectoriales invariantes a izquierda tales que $(\tilde{X}_i)_e = X_i$; $g_{ij} = \langle X_i, X_j \rangle$, (g^{ij}) matriz inversa de (g_{ij}).

Definimos el operador de Casimir Δ de la siguiente manera

$$\Delta : C^\infty(G) \longrightarrow C^\infty(G) \quad , \quad \Delta = \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}\tilde{X}_i\tilde{X}_j \quad .$$

Δ no depende de la elección de la base $\{X_1,\ldots,X_n\}$.

En nuestro caso $-B(T,S)$ es un producto escalar en su(2). Haciendo de dL_p (L_p traslación a izquierda en SU(2)) una isometría, extendemos este producto escalar a todos los espacios tangentes.

Los vectores tangentes $H = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$, $Y_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $Y_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ constituyen una base ortogonal de su(2) con norma $\sqrt{8}$, por lo tanto $g^{ij} = \frac{1}{8}\,\delta_{ij}$. Luego la expresión del operador de Casimir en SU(2) es

$$\Delta = \frac{1}{8}\,(\tilde{H}^2 + \tilde{Y}_1^2 + \tilde{Y}_2^2)$$

donde $\tilde{H}$, $\tilde{Y}_1$, $\tilde{Y}_2$ son los campos invariantes a izquierda definidos por H, Y_1 e Y_2.

Δ *es autoadjunto.* Sabemos que la expresión del adjunto de Δ es $\Delta^* = \frac{1}{8}\,(\tilde{H}^{*2} + \tilde{Y}_1^{*2} + \tilde{Y}_2^{*2})$ pero en nuestro caso $\tilde{H}^* = -\tilde{H}$, $\tilde{Y}_1^* = -\tilde{Y}_1$, $\tilde{Y}_2^* = -\tilde{Y}_2$ (Helgason pág. 451). Por lo tanto $\Delta^* = \Delta$ y los autovalores λ de la ecuación $\Delta f = \lambda f$ son *reales*.

EQUIVALENCIA ENTRE EL PROBLEMA INTEGRAL Y EL DIFERENCIAL.

Indicaremos brevemente cómo puede probarse la equivalencia entre los problemas:

(I) a) $\Phi: G \longrightarrow C$ continua. b) $\Phi(e) = 1$.

c) $\Phi(x).\Phi(y) = \int_K \chi(k^{-1})\,\Phi(xky)\,dk \quad \forall\, x,y \in G$.

(II) i) $\Phi \in C^\infty(G,C)$. ii) $\Phi(e) = 1$.

iii) $\Phi(t_1 x t_2) = \chi(t_1)\,\Phi(x)\,\chi(t_2) \quad \forall\, t_1,t_2 \in K,\ \forall\, x \in G$.

iiii) $\Delta\,\Phi = \lambda\,\Phi$.

para $G = SU(2)$ y K un toro maximal en SU(2), χ carácter irreducible de K y Δ el operador de Casimir de SU(2).

(I) $\Rightarrow$ (II). Es fácil ver que $\Phi \in C^\infty(G,C)$ y que cumple la propiedad iii).

Sea $D_o(G)$ el álgebra de operadores diferenciales invariantes a izquierda por G y a derecha por K o sea el conjunto de operadores diferenciales que satisfacen

$$D^{L(g)} = D = D^{R(k)} \quad \forall\, g \in G,\ \forall\, k \in K$$

donde L(g) y R(k) son las traslaciones a izquierda y derecha respectivamente y $D^h f = (Df^{h^{-1}})^h$ con $f^h = f \circ h^{-1}$ y $h = L(g), R(k)$.

En la igualdad (I)c) consideremos x fijo y apliquemos a ambos miembros un $D \in D_o(G)$, entonces

$$\Phi(x).D\Phi(y) = \int_K \chi(k^{-1})\ D\Phi^{L(k^{-1}x^{-1})}(y)\ dk = \int_K \chi(k^{-1})\ D\Phi(xky)\ dk$$

En $y = e$

$$\Phi(x).D\Phi(e) = \int_K \chi(k^{-1})(D\Phi)^{R(k^{-1})}(x)\ dk = \int_K \chi(k^{-1}) D\Phi(x).\chi(k) dk =$$

$$= D\Phi(x).$$

Por consiguiente Φ es autofunción de Δ pues $\Delta \in D_o(G)$ (más aún es invariante a izquierda y derecha por G).

(II) $\Rightarrow$ (I). Sea $D_o^k(G)$ el álgebra de restricciones de los elementos de $D_o(G)$ a las funciones que cumplen iii). Sabemos que $D_o^k(G)$ está generado por Δ y que contiene operadores elípticos, por lo tanto Φ es analítica por ser autofunción de un operador elíptico. Sean

$$f_1(y) = \Phi(x).\Phi(y) \qquad\qquad f_2(y) = \int_K \chi(k^{-1})\ \Phi(xky)\ dk$$

Como recién, podemos probar que

$$Df_1(e) = \Phi(x)\ D\Phi(e) \quad \text{y} \quad Df_2(e) = D\Phi(x) \text{ para todo } D \in D_o^k(G).$$

Por ser Φ autofunción de todo $D \in D_o^k(G)$ resulta $Df_1(e) = Df_2(e)$ para todo $D \in D_o^k(G)$. Sea D un operador cualquiera de D(G) álgebra de operadores diferenciales invariantes a izquierda por G. Entonces

$$D \longrightarrow D_o = \int_K D^{R(k)}\ dk$$

es una proyección de D(G) sobre $D_o(G)$. Sea f una función que satisface iii):

$$D_o f(e) = \int_K D^{R(k)} f(e)\ dk = \int_K (Df^{R(k^{-1})})(k^{-1}) dk = \int_K Df(k^{-1}).\chi(k) dk$$

pero como $D^{L(k)}f = Df$ resulta $Df(e) = D^{L(k)}f(e) = (Df^{L(k^{-1})})(k^{-1}) =$ $= \chi(k) Df(k^{-1})$; reemplazando este resultado en la última integral se ve que $D_o f(e) = Df(e)$.

Como f_1 y f_2 están en las condiciones de la f se tiene que

$$Df_1(e) = D_o f_1(e) = D_o f_2(e) = Df_2(e) \quad \forall\ D \in D(G)$$

de esto y de la analiticidad de f_1 y f_2 resulta $f_1 = f_2$.

ESTRUCTURA COMPLEJA DE S^2. Sea S^2 la esfera unitaria en R^3,

$N = (0,0,1)$ el polo norte de S^2 y $S = (0,0,-1)$ el polo sur. Sean $U_N = S^2 - \{N\}$, $U_S = S^2 - \{S\}$, $\Psi_N: U_N \longrightarrow C$, $\Psi_S: U_S \longrightarrow C$

$$\Psi_S(x,y,z) = \frac{x}{1+z} - i\frac{y}{1+z} \qquad \Psi_N(x,y,z) = \frac{x}{1-z} + i\frac{y}{1-z}$$

Los mapas (U_N,Ψ_N) y (U_S,Ψ_S) definen una estructura de variedad compleja en S^2.

DIFEOMORFISMO ENTRE $SU(2)/_T$ Y S^2.

Sea $C^* = C \cup \{\infty\}$, $\Psi_N^*: S^2 \longrightarrow C^*$ extensión continua de Ψ_N, definida así

$$\Psi_N^*(m) = \Psi_N(m) \text{ si } m \neq N \text{ y } \Psi_N^*(N) = \infty.$$

Ψ_N^* es biholomorfa considerando en C^* la estructura compleja dada por los mapas: $\theta_1: C \longrightarrow C$, $\theta_1(z) = z$ y $\theta_2: C^* - \{0\} \longrightarrow C$, $\theta_2(z) = \frac{1}{z}$ si $z \neq \infty$, $\theta_2(\infty) = 0$.

Sea $g = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \in SU(2)$, definimos $g: C^* \longrightarrow C^*$ por $g.z = \dfrac{az+b}{-\bar{b}z+\bar{a}}$

y $\theta_g: S^2 \longrightarrow S^2$, $\theta_g(m) = \Psi_N^{*-1} \circ g \circ \Psi_N^*$.

Resulta que $g \longrightarrow \theta_g$ es una acción de $SU(2)$ en S^2 y más aún esta acción es transitiva, pues es fácil ver que si $z \in C$ existe $g_z = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \in SU(2)$ tal que $g_z.z = 0$; sean ahora $z,w \in C$ y sus correspondientes g_z y g_w entonces $h = g_w^{-1}.g_z$ cumple que $h.z = w$.

Por lo tanto $SU(2)$ *es un grupo de Lie transitivo de transformaciones de* S^2.

Sea $T = \left\{ \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} / \theta \in R \right\}$ toro maximal en $SU(2)$. T es el grupo de isotropía del punto N, pues si $g \in SU(2)$ y $z \in C$: $\lim\limits_{z\to\infty} g.z = $

$$= \lim_{z\to\infty} \frac{az+b}{-\bar{b}z+\bar{a}} = -\frac{a}{\bar{b}} = \infty \text{ si } b=0.$$

Sea $\alpha: SU(2)/_T \longrightarrow S^2$ tal que $\alpha: gT \longrightarrow g.N$, α es continua y biyectiva; como $SU(2)/_T$ es compacto y S^2 es Hausdorff α resulta un homeomorfismo y por lo tanto es un difeomorfismo (Proposición 4.3, pág. 114 de Helgason).

SU(2) ACTUA EN S^2 POR ROTACIONES. Sea $g_o = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$, tenemos que $SU(2) = Tg_o^{-1}Tg_oT$ y que $\theta_t (t \in T)$, θ_{g_o} y $\theta_{g_o^{-1}}$ son rotaciones de S^2.

En consecuencia θ_g ~~rota~~ rota a la esfera unitaria para todo $g \in SU(2)$

pues si $g = t_1 g_o^{-1} t_2 g_o t_3$ entonces

$$\theta_g = \theta_{t_1} . \theta_{g_o^{-1}} . \theta_{t_2} . \theta_{g_o} . \theta_{t_3}$$

DETERMINACION EN $sl(2,C)$ DE LOS SUBESPACIOS p_+ Y p_-.

Sea h el álgebra de Lie de T, p ortogonal en su(2) a h con respecto al producto escalar inducido por la forma de Killing, luego $su(2) = h \oplus p$.

Sea $M = SU(2)/_T$, $e = [e]$ clase de equivalencia de la identidad e de SU(2), $\pi: SU(2) \longrightarrow M$ la proyección natural, entonces $d(\pi \circ \exp)_0 : p \longrightarrow M_e$ es un isomorfismo y por lo tanto también lo es $d(\alpha \circ \pi \circ \exp)_0 : p \longrightarrow S^2_N$. Extendemos éste último isomorfismo a uno β de p^c en T_N, donde p^c es el complexificado de p (p^c está contenido en $su(2)^c \cong sl(2,C)$), $T_N = H_N \oplus \overline{H}_N$, H_N y $\overline{H}_N$ son los espacios tangentes antiholomorfo y holomorfo, respectivamente, de S^2 en el punto N. Sean en p^c los subespacios p_+ y p_- generados por X_1 y $\overline{X}_1$ respectivamente

$$X_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - i\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \overline{X}_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

resulta $\beta(p_+) = H_N$ y $\beta(p_-) = \overline{H}_N$.

Sean ∂ y $\overline{\partial}$ las componentes holomorfa y antiholomorfa respectivamente de la diferencial exterior d en S^2, $d = \partial + \overline{\partial}$; $(\lambda_o, \lambda_1, \lambda_2)$ en cada punto $q \in SU(2)$ la base dual de $(\tilde{H}_q, \tilde{Y}_{1_q}, \tilde{Y}_{2_q})$ y $w_1 = \lambda_1 + i\lambda_2$, $\overline{w}_1 = \lambda_1 - i\lambda_2$ las formas duales de $\tilde{X}_1$ y $\tilde{\overline{X}}_1$ respectivamente:

$(\alpha\circ\pi)^*\partial f + (\alpha\circ\pi)^*\overline{\partial} f = d(\alpha\circ\pi)^* f = h_1\lambda_1 + h_2\lambda_2$ (no tiene coeficiente en λ_o pues es constante sobre cada clase de equivalencia)

$$= d(\alpha\circ\pi)^* f(\tilde{Y}_1)\lambda_1 + d(\alpha\circ\pi)^* f(\tilde{Y}_2).\lambda_2 =$$

$$= \tilde{X}_1(\alpha\circ\pi)^* f.w_1 + \tilde{\overline{X}}_1(\alpha\circ\pi)^* f.\overline{w}_1$$

Luego $(\alpha\circ\pi)^*\overline{\partial} f = \tilde{\overline{X}}_1(\alpha\circ\pi)^* f.\overline{w}_1$ y $(\alpha\circ\pi)^*\partial f = \tilde{X}_1(\alpha\circ\pi)^* f.w_1$ $(1)^*$

ALGUNAS PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES ESFERICAS DEL PAR (SU(2),T).

TEOREMA 1. *Φ esférica $\Rightarrow$ $\overline{\Phi}$ esférica; ($\overline{\Phi}$ es la función conjugada de de Φ). Además:*

a) *Si Φ es esférica asociada al carácter χ_n entonces $\overline{\Phi}$ es esférica asociada al carácter χ_{-n}.*

b) *Ambas satisfacen la ecuación $\Delta f = \lambda f$ con el mismo valor de λ.*

Demostración. Veamos que $\overline{\Phi}$ es esférica:

$\overline{\Phi} : SU(2) \longrightarrow C$ es C^∞ pues Φ lo es, además $\overline{\Phi}(e) = 1$.

$\overline{\Phi}(t_1xt_2) = \overline{\chi_n(t_1)\Phi(x)\chi_n(t_2)} = \chi_{-n}(t_1)\overline{\Phi(x)}\chi_{-n}(t_2) \quad \forall\ t_1,t_2 \in T$; $x \in SU(2)$.

Sea λ tal que $\Delta\Phi = \lambda\Phi$ entonces $\Delta\overline{\Phi} = \overline{\Delta\Phi}$ pues Δ es un operador real, $\overline{\Delta\Phi} = \overline{\lambda\Phi} = \overline{\lambda}\overline{\Phi} = \lambda\overline{\Phi}$ ya que los autovalores de Δ son reales.

OBSERVACION IMPORTANTE. Para conocer todas las funciones esféricas, por el teorema anterior, es suficiente hallar sólo las funciones esféricas asociadas a los caracteres χ_n, $n \in N$, ya que las asociadas a los caracteres χ_{-n}, $n \in N$, se obtendrán de las anteriores por conjugación.

TEOREMA 2. *Sea* Φ *esférica,* $\Psi(x) = \Phi(x^{-1})$; *entonces* Ψ *es esférica y además:*

a) *Si* Φ *está asociada al carácter* χ_n *entonces* Ψ *está asociada a* χ_{-n}.

b) *Ambas satisfacen la ecuación* $\Delta f = \lambda f$ *con el mismo valor de* λ.

Demostración. a) Obviamente Ψ es C^∞ y $\Psi(e) = 1$.

$$\Psi(x).\Psi(y) = \Phi(x^{-1}).\Phi(y^{-1}) = \Phi(y^{-1})\Phi(x^{-1}) = \int_T \chi_n(t^{-1})\Phi(y^{-1}tx^{-1})dt =$$

$$= \int_T \chi_{-n}(t)\Psi(xt^{-1}y)dt = \int_T \chi_{-n}(t^{-1})\Psi(xty)dt$$

Por lo tanto Ψ es esférica y está asociada al carácter χ_{-n}.

b) Sea λ tal que $\Delta\Phi = \lambda\Phi$. Como Ψ es esférica existe λ_1 tal que $\Delta\Psi = \lambda_1\Psi$. Si $\widetilde{X}$ es un campo vectorial invariante a izquierda en $SU(2)$ se puede ver que $\widetilde{X}^2\Psi(e) = \widetilde{X}^2\Phi(e)$; y como $\Delta = \frac{1}{8}(\widetilde{H}^2+\widetilde{Y}_1^2+\widetilde{Y}_2^2)$ resulta $\Delta\Psi(e) = \Delta\Phi(e)$ de donde $\lambda_1 = \lambda$.

TEOREMA 3. *Sean* Φ_1 *y* Φ_2 *dos funciones esféricas asociadas al carácter* χ_n *y* λ_1 *y* λ_2 *tales que* $\Delta\Phi_1 = \lambda_1\Phi_1$, $\Delta\Phi_2 = \lambda_2\Phi_2$. *Si* $\lambda_1 = \lambda_2$ *entonces* $\Phi_1 = \Phi_2$.

Demostración. Sea $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$ y $\Phi = \dfrac{\Phi_1+\Phi_2}{2}$, resulta que Φ es esférica asociada al carácter χ_n, por lo tanto

$\Phi(x).\Phi(x) = \int_T \chi_n(t^{-1})\Phi(xtx)dt = \frac{1}{2}\ \Phi_1^2(x) + \Phi_2^2(x)$ pero, por otra parte $\Phi(x).\Phi(x) = \frac{1}{4}\ [\Phi_1(x) + \Phi_2(x)]^2$.

Igualando los segundos miembros resulta $0 = \frac{1}{4}\ [\Phi_1(x) - \Phi_2(x)]^2$.

De los teoremas 1,2 y 3 se deduce

COROLARIO 1. $\overline{\Phi(x)} = \Phi(x^{-1})$ *para toda función esférica* Φ.

COROLARIO 2. *Para todo* a $\in$ SO(2) $\Phi(a) \in R$, *para toda función esférica* Φ.

Demostración. Existe $k \in T$, $k = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$, tal que $kak^{-1} = a^{-1}$ $\forall$ $a \in SO(2)$. Si Φ es esférica $\Phi(a) = \Phi(kak^{-1}) = \Phi(a^{-1}) = \overline{\Phi(a)}$.

CONSTRUCCION DE PARTICULARES FUNCIONES Φ_n PARA CADA $n \in N$.

Definimos, para cada $n \in N$, $\Phi_n : SU(2) \longrightarrow C$, $\Phi_n\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} = a^n$.

Sea χ_n el carácter irreducible de T, o sea

$$\chi_n\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} = e^{in\theta}$$

Veamos que Φ_n es esférica asociada a χ_n. Es obvio que $\Phi_n(e) = 1$, $\Phi_n \in C^\infty(SU(2),T)$ $\Phi_n(tgt') = \chi_n(t)\Phi_n(g)\chi_n(t')$ $\forall$ $t,t' \in T$, $g \in SU(2)$.

Extendemos el producto escalar definido en su(2) a sl(2,C) = = su(2) $\oplus$ isu(2), o sea

$$\langle X+iY, X'+iY' \rangle = \langle X,X' \rangle + \langle Y,Y' \rangle + i\langle Y,X' \rangle - i\langle X,Y' \rangle .$$

Sean $\tilde{\bar{X}}$ y $\tilde{X}$ los campos vectoriales invariantes a izquierda de SU(2) inducidos por los vectores ortonormales de su(2) $\bar{X} = \frac{1}{4}(\tilde{Y}_1 + i\tilde{Y}_2)$ y $X = \frac{1}{4}(\tilde{Y}_1 - i\tilde{Y}_2)$ $(2)^*$, respectivamente.

Reemplazando $\tilde{Y}_1 = 2(\tilde{X}+\tilde{\bar{X}})$, $\tilde{Y}_2 = 2i(\tilde{X}-\tilde{\bar{X}})$ en $\Delta = \frac{1}{8}(\tilde{H}^2 + \tilde{Y}_1^2 + \tilde{Y}_2^2)$ resulta

$$\Delta = \frac{\tilde{H}^2}{8} + [\tilde{X},\tilde{\bar{X}}] + 2\tilde{\bar{X}}\tilde{X} \qquad (3)^*$$

Pero $[\tilde{X},\tilde{\bar{X}}] = \widetilde{[X,\bar{X}]} = -\frac{1}{8}\, i\, \widetilde{[Y_2,Y_1]} = \frac{1}{4}\, i\tilde{H}$, $\tilde{H}\,\Phi_n = in\Phi_n$ y $\tilde{X}\Phi_n = 0$.

Luego

$$\Delta\, \Phi_n(g) = -\left(\frac{n^2}{8} + \frac{n}{4}\right) \Phi_n$$

S^2 ES UNA VARIEDAD RIEMANIANA EN LA QUE SU(2) ACTUA POR ISOMETRIAS.

Definimos en S_N^2 el producto escalar $\langle\ ,\ \rangle_1$ que hace de $d(\alpha\circ\pi)_e : p \longrightarrow S_N^2$ una isometría. Con respecto a este producto escalar la acción de T en S_N^2 a través de $(d\theta_t)_N$, $t \in T$, es por isometrías pues: sea $\bar{X} \in p$ y $X = d(\alpha\circ\pi)_e \bar{X}$, entonces:

$$(d\theta_t)_N\, X = d(\alpha\circ\pi)_e\, Ad_t\, \bar{X}$$

donde $Ad_t = d(I_t)_e$, $I_t : SU(2) \longrightarrow SU(2)$, tal que $I_t(g) = tgt^{-1}$; como el producto escalar definido en p es invariante por la acción de Ad_t, $(d\theta_t)_N$ es una isometría.

Sea $m \in S^2$, $g \in SU(2)$ tal que $m = (\alpha\circ\pi)(g)$; definimos en S_m^2 el siguiente producto escalar:

$$\langle X_{1m}, X_{2m} \rangle_1 = \langle d\theta_{g^{-1}} X_{1m}, d\theta_{g^{-1}} X_{2m} \rangle_1 \qquad X_{1m}, X_{2m} \in S^2_m$$

Este producto está bien definido (esto es, no depende de g tal que $(\alpha\circ\pi)(g) = m$) y hace que la acción de SU(2) en S^2 sea por isometrías.

Este producto escalar definido en S^2_m se extiende a su complexificado T_m y pasan al dual T^*_m ($\forall\ m \in S^2$), entonces dadas dos 1-formas w_1 y w_2 en S^2:

$$\langle w_{1m}, w_{2m} \rangle_1 = \langle [(\alpha\circ\pi)^* w_1]_g \ , \ [(\alpha\circ\pi)^* w_2]_g \rangle$$

Con respecto a la métrica inducida por R^3en S^2, que la indicamos $\langle\ ,\ \rangle_2$, la acción de SU(2) en S^2 es también por isometrías pues, como vimos, SU(2) actúa en S^2 por rotaciones.

Como T_N tiene dimensión compleja 1, es irreducible por la acción de T y por lo tanto los productos escalares $\langle\ ,\ \rangle_1$ y $\langle\ ,\ \rangle_2$ son iguales salvo un factor constante k (lema de Schur), que resulta igual a 2, es decir

$$\langle X_{1m}, X_{2m} \rangle_1 = 2 \langle X_{1m}, X_{2m} \rangle_2 \quad , \quad \langle w_{1m}, w_{2m} \rangle_1 = \frac{1}{2} \langle w_{1m}, w_{2m} \rangle_2$$

$$X_{1m}, X_{2m} \in T_m \quad , \quad w_{1m}, w_{2m} \in T^*_m \ .$$

Sean dg y dt las únicas medidas invariantes normalizadas en SU(2) y T respectivamente. Sean dg_T y dm las únicas medidas normalizadas SU(2)-invariantes en SU(2)/T y S^2 respectivamente (Helgason pág. 369).

Dadas dos 1-formas en S^2 w_1 y w_2, definimos para cada $n \in N$:

$$\langle w_1, w_2 \rangle = \int_{SU(2)} |\Phi_n(g)|^2 \langle [(\alpha\circ\pi)^* w_1]_g , [(\alpha\circ\pi)^* w_2]_g \rangle \, dg$$

Veamos que: $\langle w_1, w_2 \rangle = \int_{S^2} |\Phi_n(g)|^2 \frac{1}{2} \langle w_{1m}, w_{2m} \rangle_2 \, dm$ con g tal que $(\alpha\circ\pi)(g) = m$.

$$\langle w_1, w_2 \rangle = \int_{SU(2)/T} [\int_T |\Phi_n(g)|^2 \langle [(\alpha\circ\pi)^* w_1]_{gt} , [(\alpha\circ\pi)^* w_2]_{gt} \rangle \, dt] \, dg_T =$$

$$= \int_{SU(2)/T} |\Phi_n(g)|^2 \langle [(\alpha\circ\pi)^* w_1]_g , [(\alpha\circ\pi)^* w_2]_g \rangle \, dg_T =$$

$$= \int_{S^2} |\Phi_n(g)|^2 \frac{1}{2} \langle w_{1m}, w_{2m} \rangle_2 \, dm$$

Sea $n \in N$, para este n consideremos en S^2 el producto escalar definido anteriormente, sea $f \in C^\infty(S^2, C)$, γ una (1,0)-forma diferenciable sobre S^2, la relación $\langle \partial f, \gamma \rangle = \langle f, \delta\gamma \rangle$ $\forall$ f define el operador δ adjunto de ∂.

LEMA 1. *Sea* $h \in C^\infty(S^2,C)$ *entonces*

$$(\alpha\circ\pi)^* \delta\partial h = -\Phi_n^{-1}.[\tilde{\overline{X}}\tilde{X}(\Phi_n.(h\circ\alpha\circ\pi))]$$

donde $\overline{X}$ *y* X *son los definidos en* $(2)^*$.

Demostración. Sea $X = X_1 + iX_2$ un campo vectorial complejo sobre $SU(2)$, f y g dos funciones de $C^\infty(SU(2),C)$, entonces:

$$\int_{SU(2)} Xf\,\overline{g} = -\int_{SU(2)} f\,\overline{\overline{X}g} \quad \text{(Helgason pág. 451).}$$

Sean w la (1,0)-forma dual de $\tilde{X}$ (definido en $(2)^*$), γ una (1,0)-forma sobre S^2 tal que $(\alpha\circ\pi)^*\gamma_g = \varphi(g)w_g$, $f \in C^\infty(S^2,C)$, por $(1)^*$ $(\alpha\circ\pi)^*\partial f = \tilde{X}(f\circ\alpha\circ\pi)w$.

$$\langle \partial f,\gamma \rangle = \int_{SU(2)} |\Phi_n(g)|^2 \langle [(\alpha\circ\pi)^*\partial f]_g, [(\alpha\circ\pi)^*\gamma]_g \rangle\, dg =$$

$$= \int_{SU(2)} \langle \Phi_n(g)\tilde{X}(f\circ\alpha\circ\pi)(g)w_g,\ \Phi_n(g)\varphi(g)w_g \rangle\, dg =$$

$$= \int_{SU(2)} \tilde{X}(\Phi_n.(f\circ\alpha\circ\pi))(g)\ \overline{\Phi_n.\varphi(g)}\ \langle w_g,w_g \rangle\, dg =$$

$$= -\int_{SU(2)} \Phi_n.(f\circ\alpha\circ\pi)(g)\ \overline{\tilde{\overline{X}}(\Phi_n.\varphi)(g)}\, dg =$$

$$= -\int_{SU(2)} \Phi_n.(f\circ\alpha\circ\pi)(g)\ \overline{\Phi_n\Phi_n^{-1}\ \tilde{\overline{X}}(\Phi_n.\varphi)(g)}\, dg =$$

$$= -\int_{SU(2)} |\Phi_n(g)|^2\ f\circ\alpha\circ\pi(g)\ \overline{\Phi_n^{-1}\tilde{\overline{X}}(\Phi_n.\varphi)(g)}\, dg = \langle f,\delta\gamma \rangle$$

Luego $(\alpha\circ\pi)^*\delta\gamma = -\Phi_n^{-1}.[\tilde{\overline{X}}(\Phi_n.\varphi)]$. Sea $h \in C^\infty(S^2,C)$, entonces $(\alpha\circ\pi)^*\partial h = \tilde{X}(h\circ\alpha\circ\pi)w$ y $(\alpha\circ\pi)^*\delta\partial h = -\Phi_n^{-1}.\tilde{\overline{X}}\tilde{X}(\Phi_n.(h\circ\alpha\circ\pi)$.

LEMA 2. *Con las hipótesis del lema anterior sea* h *tal que:* h *es constante sobre los paralelos,* $h(N) = 1$ *y* h *autofunción de* $\delta\partial$ *con un autovalor real* γ, *entonces la función* $\Phi = \Phi_n.(h\circ\alpha\circ\pi)$ *es esférica asociada al carácter* χ_n.

Demostración. $\Phi \in C^\infty(SU(2),C)$ y $\Phi(e) = 1.h(N) = 1$.

Sean $t_1,t_2 \in T$, $x \in SU(2)$ entonces

$\Phi(t_1xt_2) = \chi_n(t_1)\Phi_n(x)\chi_n(t_2).h\theta_{t_1}(\alpha\circ\pi)(x) =$

$= \chi_n(t_1)\Phi_n(x)\chi_n(t_2).h\circ\alpha\circ\pi(x)$ pues h es constante sobre los paralelos y θ_{t_1} es una rotación de la esfera alrededor del eje z. Por lo tanto

$$\Phi(t_1xt_2) = \chi_n(t_1)\Phi(x)\chi_n(t_2) \quad \forall\ t_1,t_2 \in T,\ x \in SU(2).$$

Por (3)* $\Delta = \frac{1}{8}\tilde{H}^2 + \frac{1}{4}i\tilde{H} + 2\tilde{\tilde{X}}\tilde{X}$. Como $h\circ\alpha\circ\pi$ es constante sobre las coclases a izquierda de T resulta $\tilde{H}(h\circ\alpha\circ\pi) = 0$, entonces

$\Delta[\Phi_n.(h\circ\alpha\circ\pi)] = (\frac{1}{8}\tilde{H}^2\Phi_n).(h\circ\alpha\circ\pi)+(\frac{1}{4}i\tilde{H}\Phi_n).(h\circ\alpha\circ\pi)+2\tilde{\tilde{X}}\tilde{X}(\Phi_n.(h\circ\alpha\circ\pi)$

Del LEMA 1 y de $\delta\partial h = \gamma h$ resulta $2\tilde{\tilde{X}}\tilde{X}(\Phi_n.(h\circ\alpha\circ\pi) = -2\Phi_n\delta\partial h\circ(\alpha\circ\pi) =$

$= -2\gamma\Phi_n.(h\circ\alpha\circ\pi)$.

Por lo tanto $\Delta[\Phi_n.(h\circ\alpha\circ\pi)] = -(\frac{n^2}{8} + \frac{n}{4} + 2\gamma).\Phi_n.(h\circ\alpha\circ\pi)$.

OBSERVACION. Por el lema anterior la solución del problema diferencial $\delta\partial h = \gamma h$, $h(N) = 1$, h constante sobre los paralelos, $h \in C^\infty(S^2,C)$, $\gamma \in R$ nos proporcionará una familia de funciones esféricas. Más aún, veremos luego que resolviendo este problema diferencial para los γ tales que $4\gamma = k(k+n+1)$, $k,n \in N$ se obtendrán todas las funciones esféricas asociadas a los χ_n.

NOTA. Si en S^2 hubiéramos considerado la estructura compleja conjugada de la definida, en lugar de ∂ tendríamos ahora $\bar{\partial}$.

PLANTEO Y RESOLUCION DE $\delta\partial h = \gamma h$.

Sea Ψ_N la proyección estereográfica desde el polo norte de S^2, $\Psi_N(x,y,z) = \frac{x+iy}{1-z} = a+ib$, el operador ∂ en este mapa tiene la siguiente expresión:

$$\partial = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial a} - i\frac{\partial}{\partial b}\right)(da+idb)$$

y en función de las coordenadas (φ,θ):

$$\overline{\partial} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial}{\partial\varphi} - i\,\mathrm{sen}\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)d\varphi + \left(\frac{i}{\mathrm{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi} + \frac{\partial}{\partial\theta}\right)d\theta\right]$$

Sea $h \in C^\infty(S^2,C)$ constante sobre los paralelos, o sea $h(\varphi,\theta) = h(\theta)$ y $f \in C^\infty(S^2,C)$:

$$\langle\partial f,\partial h\rangle = \frac{1}{2}\int_{S^2}|\Phi_n(g)|^2\langle\partial f_m,\partial h_m\rangle_2\,dm$$

donde $g \in SU(2)$ es tal que $\theta_g.m = N$.

Sea $g = t_1at_2$, $t_i \in T$, $a \in SU(2)$; por lo tanto $|\Phi_n(g)| = |\Phi_n(a)|$;

sea $a = \begin{pmatrix}\cos(\alpha/2) & -\mathrm{sen}(\alpha/2)\\ \mathrm{sen}(\alpha/2) & \cos(\alpha/2)\end{pmatrix}$, se proyecta sobre S^2 al punto

$\theta_a.N$; ahora bien, $\theta_a.N = (\varphi,\theta)$ con $\varphi = \mathrm{arctg}(0)$ o sea $\varphi = 0$ ó $\varphi = \pi$; $\theta = \arccos(\cos\alpha)$ o sea $\theta = \alpha$ por lo tanto los puntos $(x,0,z)$ del meridiano correspondiente a $\varphi = 0$ ó $\varphi = \pi$ y $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, provienen (por $\alpha\circ\pi$) de elementos de SO(2).

Si $m \in S^2$ tiene coordenadas esféricas (φ,θ) y $\theta_g.m = N$ con $g = t_1at_2$, resulta

$$|\Phi_n(g)|^2 = |\Phi_n(a)|^2 = (\cos\frac{\theta}{2})^{2n} = (\frac{1+\cos\theta}{2})^n .$$

Sea $\Omega = \operatorname{sen}\theta\, d\varphi\, d\theta$, 2-forma sobre S^2; como SU(2) actúa por rotaciones, Ω es SU(2)-invariante.

$$\langle \partial f,\partial h\rangle = \frac{1}{32\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi}(\frac{1+\cos\theta}{2})^n \langle(\frac{\partial f}{\partial\varphi} - i\operatorname{sen}\theta\,\frac{\partial f}{\partial\theta})d\varphi +$$

$$+ (\frac{\partial f}{\partial\theta} + \frac{i}{\operatorname{sen}\theta}\,\frac{\partial f}{\partial\varphi})d\theta ,\ \frac{\partial h}{\partial\theta}\,d\theta - i\operatorname{sen}\theta\,\frac{\partial h}{\partial\theta}\,d\varphi\rangle \operatorname{sen}\theta\, d\varphi\, d\theta =$$

$$= \frac{i}{16\pi}\int_{\theta=0}^{\pi}(\frac{1+\cos\theta}{2})^n\,\frac{d\bar h}{d\theta}\,d\theta\int_{\varphi=0}^{2\pi}\frac{\partial f}{\partial\varphi}\,d\varphi +$$

$$+ \frac{1}{16\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi}(\frac{1+\cos\theta}{2})^n \operatorname{sen}\theta\,\frac{\partial f}{\partial\theta}\,\frac{d\bar h}{d\theta}\,d\varphi\, d\theta$$

El primer término es nulo pues $\int_{\varphi=0}^{2\pi}\frac{\partial f}{\partial\varphi}\,d\varphi = 0$, al segundo término lo integramos por partes

$$\langle \partial f,\partial h\rangle = -\frac{1}{16\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi}(\frac{1+\cos\theta}{2})^n\,[\frac{d^2\bar h}{d\theta^2} + \frac{(n+1)\cos\theta - n}{\operatorname{sen}\theta}\,\frac{d\bar h}{d\theta}] .$$

$$.\ f(\varphi,\theta)\operatorname{sen}\theta\, d\varphi\, d\theta = \langle f,\delta\partial h\rangle .$$

Entonces $\delta\partial h = -\frac{1}{4}\,(\frac{d^2 h}{d\theta^2} + \frac{(n+1)\cos\theta - n}{\operatorname{sen}\theta}\,\frac{dh}{d\theta}) = \gamma h$, y queda planteada la ecuación diferencial $\frac{d^2h}{d\theta^2} + \frac{(n+1)\cos\theta - n}{\operatorname{sen}\theta}\,\frac{dh}{d\theta} + 4\,h = 0$,

$0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, $h(0) = 1$.

Haciendo el cambio $x = \cos\theta$, resulta la ecuación diferencial $(1-x^2)\,\frac{d^2h}{dx^2} + [n-(n+2)x]\frac{dh}{dx} + 4\gamma h = 0$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$, con la condición $h(1) = 1$ cuyas soluciones para $4\gamma = k(k+n+1)$, $k \in N$, son los polinomios de Jacobi $P_k^{(0,n)}$ (Szegö pág. 60-61).

$$P_k^{(0,n)}(x) = 1 + \sum_{\nu=1}^{k}(-1)^\nu\binom{k}{\nu}\binom{k+n+\nu}{\nu}(\frac{1-x}{2})^\nu$$

PROPIEDADES DE $P_k^{(0,n)}$.

I) $P_k^{(0,n)}(1) = 1$; II) $P_k^{(0,n)}(x) \in C^\infty([-1,1],R)$, más aún es un polinomio.

III) $P_k^{(0,n)}(\cos\theta) = 1 + \sum_{\nu=1}^{k}(-1)^\nu\binom{k}{\nu}\binom{k+n+\nu}{\nu}(\frac{1-\cos\theta}{2})$ es par como función de θ. $(-\pi \leqslant \theta \leqslant \pi)$.

IV) Para cada $n \in N$ $\{P_k^{(0,n)}\}_{k \in N}$ forman un sistema ortogonal completo de polinomios en el intervalo $[-1,1]$ con la medida $(1+x)^n dx$ (Erdélyi cap. 10).

Las funciones $h_{n,k}$, $n,k \in N$, definidas por

$$h_{n,k}(\varphi,\theta) = P_k^{(0,n)}(\cos\theta)$$

se extienden a funciones C^∞ sobre todo el S^2, por ser constantes sobre los paralelos y por la propiedad III que nos dice que $h_{n,k}$ son C^∞ sobre los meridianos.

Por lo tanto las funciones $h_{n,k}$ son todas las soluciones de $\delta\partial h = \gamma h$ con $4\gamma = k(k+n+1)$, $h(N) = 1$, $h \in C^\infty(S^2,C)$; $k \in N$.

Luego todas las funciones $\Phi_{n,k}$: $SU(2) \longrightarrow C$ definidas por $\Phi_{n,k} = \Phi_n.(h_{n,k}\circ\alpha\circ\pi), k \in N$, son esféricas asociadas al carácter χ_n.

TEOREMA. *Las funciones $\Phi_{n,k}$ son todas las funciones esféricas asociadas a χ_n.*

Demostración. Supongamos que Φ'_n es una función esférica asociada al carácter χ_n distinta de $\Phi_{n,k}$ para todo k. Sea $\lambda \in R$ tal que $\Delta\Phi'_n = \lambda\Phi'_n$. Por TEOREMA 3 $\lambda \neq \lambda_{n,k}$ si $\lambda_{n,k}$ es el autovalor de $\Phi_{n,k}$ y como Δ es autoadjunto resulta

$$0 = \int_{SU(2)} \Phi'_n(g)\, \overline{\Phi_{n,k}(g)}\, dg = \int_{SU(2)} \Phi'_n(g)\, \overline{\Phi_n(g)}.\overline{h_{n,k}\circ\alpha\circ\pi(g)}\, dg =$$

$$= \int_{SU(2)/T} \left[\int_T \Phi'_n(gt)\, \overline{\Phi_n(gt)}.\overline{h_{n,k}\circ\alpha\circ\pi(gt)}\, dt\right] dg_T =$$

$$= \int_{SU(2)/T} \Phi'_n(g)\, \overline{\Phi_n(g)}.\overline{h_{n,k}\circ\alpha\circ\pi(g)}\, dg_T = \int_{S^2} \Phi'_n(g)\, \Phi_n(g).h_{n,k}(m)\,dm =$$

g es tal que $\alpha\circ\pi(g) = m$

$$= \frac{1}{4\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi} \Phi'_n(g(\theta))\, \overline{\Phi_n(g(\theta))}\, P_k^{(0,n)}(\cos\theta)\, \operatorname{sen}\theta\, d\varphi\, d\theta =$$

$$g(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) & -\operatorname{sen}(\theta/2) \\ \operatorname{sen}(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\theta=0}^{\pi} \Phi'_n(g(\theta))\, (\cos\tfrac{\theta}{2})^n\, P_k^{(0,n)}(\cos\theta)\, \operatorname{sen}\theta\, d\theta =$$

poniendo $x = \cos\theta$ obtenemos

$$= -\frac{1}{2}\int_{x=-1}^{1} \frac{\Phi'_n(g(\theta(x)))}{(\frac{1+x}{2})^{\frac{n}{2}}}\, (\tfrac{1+x}{2})^n\, P_k^{(0,n)}(x)\, dx = 0 \qquad k \in N$$

Por IV $\dfrac{\Phi_n'(g(\theta(x)))}{(\frac{1+x}{2})^{\frac{n}{2}}} = 0$, para x=1 resulta $\Phi_n'(e) = 0$, lo que contradice que Φ_n' sea esférica.

Hemos obtenido así todas las funciones esféricas del par (SU(2),T) asociadas a los caracteres χ_n, $n \in N$: sea $g \in SU(2)$, $\theta, \theta_1, \theta_2 \in R$ tales que $g = t_1 a_\theta t_2$ donde:

$$t_j = \begin{pmatrix} e^{i\theta_j} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta_j} \end{pmatrix} \quad j=1,2 \quad \text{y} \quad a_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) & -\operatorname{sen}(\theta/2) \\ \operatorname{sen}(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{pmatrix}$$

entonces

$$\Phi_{n,k}(g) = e^{in(\theta_1+\theta_2)} \left[1 + \sum_{\nu=1}^{k} (-1)^\nu \binom{k}{\nu} \binom{k+n+\nu}{\nu} \left(\frac{1-\cos\theta}{2}\right)\right] (\cos\frac{\theta}{2})$$

$n,k \in N$.

Conjugando las $\Phi_{n,k}$ obtenemos todas las funciones esféricas asociadas a los caracteres χ_{-n}, $n \in N$ y las notamos con $\Phi_{-n,k} = \overline{\Phi_{n,k}}$.

$$\Phi_{-n,k}(g) = e^{-in(\theta_1+\theta_2)} \left[1 + \sum_{\nu=1}^{k} (-1)^\nu \binom{k}{\nu} \binom{k+n+\nu}{\nu} \left(\frac{1-\cos\theta}{2}\right)\right] (\cos\frac{\theta}{2})^n,$$

$n,k \in N$.

Para conocer todas las funciones esféricas del par (SU(2),SO(2)) observemos que: Si K y K' son toros maximales en SU(2), χ y χ' caracteres irreducibles de K y K' respectivamente tales que $K' = gKg^{-1} = I_g K$, $\chi' = \chi \circ I_{g^{-1}}$, entonces:

TEOREMA. Φ *es una función esférica del par* (SU(2),K) *asociada al carácter* χ *sii* $\Phi \circ I_{g^{-1}}$ *es una función esférica del par* (SU(2),K') *asociada a* χ'.

Demostración. Condición suficiente.

$$\Phi \circ I_{g^{-1}}(x) . \Phi \circ I_{g^{-1}}(y) = \int_K \chi(k^{-1}) \, \Phi(g^{-1}xgkg^{-1}yg) \, dk =$$

$$= \int_{K'} \chi((I_{g^{-1}}k')^{-1}) \, \Phi(g^{-1}xg(I_{g^{-1}}k')g^{-1}yg) \, dk' =$$

$$= \int_{K'} \chi'(k'^{-1}) \, \Phi \circ I_{g^{-1}}(xk'y) \, dk'$$

Condición necasaria. Resulta de la primera parte de la demostración pues

$$\Phi = (\Phi \circ I_{g^{-1}}) \circ I_g \ , \ K = g^{-1}k'g \ \text{ y } \ \chi = \chi' \circ I_g .$$

En consecuencia como $g_o T g_o^{-1} = SO(2)$ con $g_o = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$, resulta que $\Phi_{n,k} \circ I_{g_o^{-1}}$ $n \in Z$, $k \in N$, son *todas* las funciones esféricas irreducibles del par $(SU(2), SO(2))$.

BIBLIOGRAFIA

BISHOP - CRITTENDEN, *Geometry of manifolds*, Academic Press. 1964.

ERDELYI - MAGNUS - OBERHETTINGER - TRICOMI, *Higher trascendental functions*, Vol.2 Mc.Graw-Hill 1953.

SIGURDUR HELGASON, *Differential Geometry and symetric spaces*, 1962.

JAMES MORROW - KUNIHIKO KODAIRA, *Complex manifolds*, Holt, Rinehart and Winston, Inc. 1971.

GABOR SZEGÖ, *Orthogonal polynomials*, American Mathematical Society, 1959.

Instituto de Matemática Astronomía y Física (IMAF)
Universidad Nacional de Córdoba.

Recibido en mayo de 1976.