

APROXIMACION DE CONJUNTOS ESTRELLADOS COMPACTOS POR FAMILIAS ESPECIALES

Fausto A. Toranzos

Dedicado al Profesor Luis A. Santaló

ABSTRACT. It is well known that every convex compact set of R^n can be approximated, in the sense of Hausdorff-Blaschke, by members of two particular families, that of convex polytopes, and that of smooth and rotund convex bodies. The aim of this note is to generalize those results to compact starshaped sets of R^n .

1. INTRODUCCION Y DEFINICIONES BASICAS.

Una técnica de uso general en la teoría de conjuntos convexos de dimensión finita es la aproximación de un convexo compacto por miembros de una familia particular, densa en la métrica de Hausdorff-Blaschke. De tal forma, resultados fáciles de obtener para los miembros de dicha familia pueden ser extendidos "por continuidad" para cualquier convexo compacto. Esta técnica se aplica usando como familia especial la de los polítopos convexos, que tienen una estructura facial sencilla, o bien la familia de los "convexos regulares", es decir convexos compactos, suaves y rotundos. Estos últimos conjuntos tienen la particularidad de que la correspondencia (hiperplano de apoyo) $\leftrightarrow$ (punto frontera) es biyectiva. Para los correspondientes teoremas de densidad nos remitimos a los textos generales de Convexidad, por ejemplo [2], [8] ó [9].

En esta nota trataremos de generalizar tales resultados sustituyendo la convexidad del conjunto a aproximar por la condición de ser estrellado. Por supuesto, las familias aproximantes serán "polítopos estrellados" y "estrellados suaves", respectivamente. La primera de estas generalizaciones había sido enunciada en [5] para R^3 , aunque no se daba allí ninguna demostración. Un esbozo de demostración para el caso de polítopos estrellados aparece en el párrafo V.4 de [8].

Sea $A \subset R^n$, x e y dos puntos de A . Diremos que x ve a y vía A si el segmento $[x;y]$ está incluido en A . La estrella de x en A es el conjunto $st(x;A)$ de todos los puntos de A que ven a x vía A . Diremos que x es un punto radiante de A si $st(x;A) = A$, es decir si x ve a todo A . El mirador de A es el conjunto $mir A$ de todos los puntos radiantes de A . Diremos que A es estrellado si $mir A \neq \emptyset$, es decir, si A tiene al

menos un punto radiante.

Una componente convexa de A es un subconjunto convexo maximal. Diremos que una familia de componentes convexas de A es cobertora si la unión de dicha familia es A . Es conocido que $\text{mir } A$ es la intersección de cualquier familia cobertora de componentes convexas de A . La primera demostración de este resultado es el lema que precede al teorema 2 de [6]. Un conjunto estrellado es simple si admite una familia cobertora finita de componentes convexas. Un polígono estrellado es un conjunto estrellado simple cuya familia cobertora finita está integrada por polígonos convexas. En otras palabras, un polígono estrellado es la unión de una familia finita de polígonos convexas, cuya intersección sea no vacía.

Indicaremos con $\mathcal{E}_n$ a la familia de todos los conjuntos estrellados compactos de $\mathbb{R}^n$ que tengan al origen de coordenadas θ como punto interior de su mirador. Entonces, si $A \in \mathcal{E}_n$ cualquier semirrecta que parta del origen intersecará a A en un segmento cerrado. Si denotamos con S la superficie esférica unitaria, podemos definir la función radial de A como la función $\rho_A: S \rightarrow \mathbb{R}^+$ tal que $\rho_A(x)$ es la longitud de la intersección de A con la semirrecta que parte de θ y pasa por x . Diremos que el conjunto estrellado A es suave si su función radial es diferenciable. Cuando tratemos convergencia de funciones continuas emplearemos la llamada "norma del supremo" o "norma de la convergencia uniforme" definida así:

$$\|f\| = \sup \{|f(x)| \mid x \in D\}$$

donde D representa el dominio de f . En particular, si dicho dominio es compacto, como en el caso de las funciones radiales, corresponde tomar máximo en lugar de supremo.

El entorno de radio ϵ del conjunto A es el conjunto

$$B(A; \epsilon) = \{x \mid \text{existe } y \in A \text{ con } d(x, y) \leq \epsilon\}$$

Si C y D son conjuntos compactos de $\mathbb{R}^n$, la distancia de Hausdorff entre C y D es el número

$$d(C, D) = \inf \{\epsilon > 0 \mid D \subset B(C; \epsilon) \text{ y } C \subset B(D; \epsilon)\}$$

Es bien conocido que la familia de los conjuntos compactos de $\mathbb{R}^n$ con la distancia de Hausdorff forma un espacio métrico que goza de la propiedad de Borel-Lebesgue. Más aún, la subfamilia de los convexos compactos es cerrada en este espacio (Blaschke). Recientemente, Hirose [4] ha demostrado que lo mismo vale para la subfamilia de los estrellados compactos.

2. APROXIMACION POR POLITOPOS ESTRELLADOS.

Comenzaremos demostrando dos lemas que aclaran los conceptos de "polígono estrellado" y "estrellado simple" respectivamente.

LEMA 2.1.: Sea P un polígono estrellado en R^n . Entonces $\text{mir } P$ y $\text{conv } P$ son polígonos convexos.

Demostración. Sea $\{K_i \mid i = 1, 2, \dots, j\}$ una familia cobertora de componentes convexas de P constituida por polígonos convexos. Entonces $\text{mir } P = \bigcap_{i=1}^j K_i$ es un polígono convexo. Por otra parte, sea $E_i = \text{ex } K_i$ el conjunto de puntos extremales de K_i , y sea E la unión de los j conjuntos E_i . Es claro que E es un conjunto finito, y que además $\text{conv } P = \text{conv } E$. Luego $\text{conv } P$ es un polígono convexo.

LEMA 2.2. Sea L un conjunto estrellado y cerrado en R^n . Entonces existe una sucesión $\{L_k \mid k \in N\}$ de estrellados simples y cerrados que converge a L en la métrica de Hausdorff. Más aun, L_k converge a L en forma monótona creciente, mientras que $\text{mir } L_k$ converge a $\text{mir } L$ en forma monótona decreciente.

Demostración. Sea $A = \{a_1; a_2; a_3; \dots\}$ un subconjunto numerable y denso en L . Para cada $k \in N$ sea K_k una componente convexa de L que contenga al punto a_k . Una aplicación rutinaria del lema de Zorn asegura la existencia de dicha componente convexa. Entonces definamos

$L_k = \bigcup_{i=1}^k K_i$. Es fácil verificar que la sucesión $\{L_k \mid k \in N\}$ cumple todas las conclusiones del lema.

Veamos ahora la posibilidad de aproximar estrellados simples por polígonos estrellados.

LEMA 2.3. Sea L un conjunto estrellado simple y compacto en R^n y sea $\epsilon > 0$. Entonces existe un polígono estrellado P que verifica $P \subset L \subset B(P; \epsilon)$.

Demostración. Sea $\{K_i \mid i = 1; 2; \dots; j\}$ una familia cobertora finita de componentes convexas de L . Por un bien conocido teorema de aproximación (ver, por ejemplo, el teorema 12.3 de [9], o bien el teorema V.1.6 de [8]) para cada i existe un polígono convexo P_i tal que $P_i \subset K_i \subset B(P_i; \epsilon)$. Entonces, si definimos a P como la unión de estos j polígonos, resulta que tal P satisface la tesis.

TEOREMA 2.4. Sea L un conjunto estrellado compacto en R^n , y sea $\epsilon > 0$. Existe un polígono estrellado P tal que $P \subset L \subset B(P; \epsilon)$.

Demostración. Por el lema 2.2, existe L_0 estrellado simple y compacto tal que $L_0 \subset L \subset B(L_0; \epsilon/2)$. Pero entonces, por el lema 2.3 existe un polígono estrellado P tal que $P \subset L_0 \subset B(P; \epsilon/2)$. De ambas aproximaciones, y gracias a propiedades elementales de la métrica de Hausdorff (ver, por ejemplo, el lema V.1.1 de [8]), resulta:

$$P \subset L_0 \subset L \subset B(L_0; \varepsilon/2) \subset B(B(P; \varepsilon/2); \varepsilon/2) = B(P; \varepsilon)$$

En el caso especial en que $\text{mir } L$ tuviera interior no vacío es posible mejorar el teorema anterior para obtener simultáneamente aproximaciones de L "desde adentro" y "desde afuera" por polítopos estrellados homotéticos.

TEOREMA 2.5. *Sea $L \in \mathcal{E}_n$ y $\gamma > 1$. Entonces existe un polítopo estrellado P tal que $P \subset L \subset \gamma P$, donde γP es la imagen de P por una homotecia de razón γ .*

Demostración. Sea $\alpha > 0$ tal que $B(\theta; \alpha) \subset \text{mir } L$. Elegimos ε tal que $0 < \varepsilon < \alpha(\gamma-1)$. Por el teorema 2.4 existe un polítopo estrellado P tal que $P \subset L \subset B(P; \varepsilon)$. Si definimos $\gamma P = \{\gamma x \mid x \in P\}$ es fácil verificar, siguiendo las líneas del teorema 12.4 de [9], o bien del teorema V.1.9 de [8], que vale $B(P, \varepsilon) \subset \gamma P$. Es claro que γP es un polítopo estrellado, y que $\theta \in \text{mir } \gamma P$.

3. APROXIMACION POR ESTRELLADOS SUAVES.

La necesidad de aproximación de estrellados por polítopos se justifica fácilmente, ya que es claro que para estos últimos resulta más sencillo introducir conceptos métricos como volumen, superficie, etc. No es tan inmediato entender la necesidad de teoremas de aproximación por conjuntos estrellados suaves. Sin embargo, la geometría de conjuntos estrellados emplea frecuentemente conceptos locales, en particular la diferenciabilidad de su frontera. Por ejemplo, en [3] se obtiene una descripción del mirador de un conjunto estrellado plano cuya frontera sea diferenciable, a partir de sus puntos de inflexión, es decir de aquellos puntos en que la curvatura de la frontera cambia de sentido. En [7] se utiliza la suavidad de una figura estrellada para resolver un problema extremal sobre su perímetro.

Es bien conocido que si $A \in \mathcal{E}_n$ su función radial es lipschitziana. En [6] se calcula la constante de Lipschitz óptima para las funciones radiales de los conjuntos de $\mathcal{E}_n$ contenidos en la bola B_1 y tales que su mirador contiene otra bola concéntrica B_2 . Recíprocamente, toda función lipschitziana $f: S \rightarrow \mathbb{R}^+$ da origen a un estrellado de $\mathcal{E}_n$, como veremos en el lema siguiente.

LEMA 3.1. *Sean A_1 y A_2 elementos de $\mathcal{E}_n$ con funciones radiales ρ_1 y ρ_2 respectivamente. Entonces $d(A_1, A_2) \leq \|\rho_1 - \rho_2\|$.*

Demostración. Para cada $x \in S$ sea $x_1 = \rho_1(x) \cdot x$; $x_2 = \rho_2(x) \cdot x$. Entonces, por la definición de función radial resulta que

$$A_1 = \bigcup_{x \in S} [\theta; x_1] \quad ; \quad A_2 = \bigcup_{x \in S} [\theta; x_2]$$

Supongamos entonces que $\|\rho_1 - \rho_2\| = \alpha$, y sea $t \in A_1$, $t \neq \theta$ y denotemos con I_1 la intersección de A_1 con la semirrecta que sale del origen y pasa por t . Análogamente I_2 será la intersección de A_2 con dicha semirrecta. La diferencia entre estos dos intervalos será un segmento de longitud menor o igual a α . Entonces existe $t' \in A_2$ tal que $d(t, t') \leq \alpha$. Como esto vale para todo $t \in A_1$ resulta $A_1 \subset B(A_2; \alpha)$. Análogamente $A_2 \subset B(A_1; \alpha)$. Por lo tanto, $d(A_1, A_2) \leq \alpha$.

TEOREMA 3.2. *Para todo $A \in \mathcal{E}_n$ existe una sucesión de estrellados suaves $\{A_j | j \in \mathbb{N}\}$ que converge a A en la métrica de Hausdorff.*

Demostración. Sea ρ la función radial de A . Entonces, por el clásico teorema de aproximación de Weierstrass en $\mathbb{R}^n$ (ver, por ejemplo, [1] teorema 7.4.1) existe una sucesión $\{p_j | j \in \mathbb{N}\}$ de polinomios en n variables, tales que $\lim \| \rho - p_j \| = 0$. Para cada $j \in \mathbb{N}$ sea A_j el conjunto estrellado suave que tiene a p_j como función radial y que se construye de la manera indicada en el lema anterior. Entonces resulta, precisamente por el lema 3.1., $\lim d(A, A_j) = 0$.

BIBLIOGRAFIA

- [1] DIEUDONNE, J., *Foundations of Modern Analysis*, Academic Press, New York, 1960.
- [2] EGGLESTON, H.G., *Convexity*, Cambridge University Press, Cambridge, 1958.
- [3] HALPERN, B., *The kernel of a starshaped subset of the plane*, Proc. Amer. Math. Soc. 23 (1969) 692-696.
- [4] HIROSE, T., *On the convergence theorem for starshaped sets in E^n* , Nagoya Math. Journal 41 (1969) 209-211.
- [5] MELZAK, Z.A., *A class of star-shaped bodies*, Can. Math. Bull. 2 (1959) 175-180.
- [6] TORANZOS, F.A., *Radial functions of convex and starshaped bodies*, Amer. Math. Monthly 74 (1967) 278-280.
- [7] TORANZOS, F.A., *Perímetro de figuras estrelladas*, a aparecer.
- [8] TORANZOS, F.A. y NANCLARES, J.H., *Convexidad*, Colección Cursos, Seminarios y Tesis del Programa de Estudios Avanzados en Matemática, Universidad del Zulia, Maracaibo, 1978.
- [9] VALENTINE, F.A., *Convex sets*, McGraw-Hill, New York, 1964.

Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias
 Universidad del Zulia
 Maracaibo, Venezuela

Recibido en mayo de 1978.