Revista de la
Unión Matemática Argentina
Volumen 29, 1979.

EL MODELO DE CRECIMIENTO DE VON NEUMANN PARA UN CONJUNTO ARBITRARIO DE NACIONES O ECONOMIAS

Ezio Marchi

Dedicado al Profesor Luis A. Santaló

INTRODUCCION. El modelo de crecimiento de von Neumann [9], en el cual se estudia la existencia de factores y equilibrio de expansión en una economía cerrada, o de una sola economía, ha sido en los últimos años la base de muchos estudios y publicaciones. Primeramente Kemeny - Morgenstern y Thompson en [4] han removido una condición no deseable del punto de vista económico. Posteriormente muchos autores han extendido el modelo primitivo de von Neumann, por ejemplo Thompson [11] y Gale [3].

Muy recientemente se han publicado un considerable número de trabajos en esta área de la economía matemática, por ejemplo [1]. En tal publicación hay un trabajo de Morgenstern y Thompson [8], el cual es una continuación de varios otros estudios [6] y [7], realizados por los mismos autores incluyendo consumo privado y público, sobre todo para economías abiertas. Aquí se considera la existencia de un mercado internacional.

Nosotros en el presente trabajo generalizaremos el modelo de crecimiento de von Neumann para un número arbitrario de economías, sin que haga falta la existencia de un mercado internacional. El comercio se considera entre todas las respectivas naciones entre sí. Esto resulta más natural desde el punto de vista económico.

Se mostrará que la existencia de un equilibrio de expansión es equivalente a la existencia de un punto de equilibrio de un juego con funciones de pago racionales, el cual está estrechamente ligado al modelo económico. Ahora, bien, la existencia de un punto de equilibrio de un juego con funciones racionales ha sido ya investigada por el autor en [5].

Aquí en la primera parte del trabajo presentaremos otra demostración de tal existencia. En la segunda parte expondremos como hemos mencionado anteriormente el modelo de expansión para un número arbitrario de economías.

1. PUNTOS DE EQUILIBRIC PARA JUEGOS CON FUNCIONES DE PAGO RACIONALES.

En este parágrafo, introduciremos juegos con funciones de pago racionales y estudiaremos la existencia de sus puntos de equilibrio. Este estudio servirá de base para la generalización del modelo de crecimiento de von Neumann para un número arbitrario de economías o países.

Dado un juego n-personal $\Gamma = \{\Sigma_i, F_i;\ i \in N\}$ donde $N = \{1,\dots,n\}$ es el conjunto de jugadores, Σ_i sus conjuntos de estrategias no vacías. Sus funciones de pago son F_i. Diremos que Γ es un juego racional si las funciones de pago F_i son de la forma G_i/H_i con $H_i > 0$. Dado un tal juego racional Γ, diremos que un punto $(\bar\sigma_1,\dots,\bar\sigma_n) \in \underset{j\in N}{\times} \Sigma_j$ es punto de equilibrio de Γ, si se cumple:

$$(\bar\sigma_1,\dots,\bar\sigma_n) \in \underset{j\in N}{\times} \Sigma_j : \quad \frac{G_i(\bar\sigma_1,\dots,\bar\sigma_n)}{H_i(\bar\sigma_1,\dots,\bar\sigma_n)} \geqslant \frac{G_i(\bar\sigma_1,\dots,\bar\sigma_{i-1},\sigma_i,\bar\sigma_{i+1},\dots,\bar\sigma_n)}{H_i(\bar\sigma_1,\dots,\bar\sigma_{i-1},\sigma_i,\bar\sigma_{i+1},\dots,\bar\sigma_n)}$$

para todo $i \in N$ y todo $\sigma_i \in \Sigma_i$.

Ahora introduciremos el teorema principal sobre la existencia de puntos de equilibrio para juegos racionales, el cual ya ha sido considerado por el autor en el trabajo [5]. Aquí presentaremos el mismo resultado pero con una demostración distinta.

TEOREMA 1. *Todo juego racional* $\Gamma = \{\Sigma_i, G_i/H_i, i \in N\}$ *donde los* Σ_i *son compactos y convexos en un espacio euclidiano, con funciones continuas* G_i *cóncavas y* H_i *convexas en* $\sigma_i \in \Sigma_i$ *para cada* $(\sigma_1,\dots,\sigma_{i-1},\sigma_{i+1},\dots,\sigma_n) \in \underset{j\neq i}{\times} \Sigma_i$ *respectivamente, tiene un punto de equilibrio.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad, podemos considerar que para $i \in N : F_i = G_i/H_i \geqslant h_i > 0$, ya que sumando una constante positiva a las funciones de pago, no se altera el conjunto de puntos de equilibrio.

Dado $(\sigma_1,\dots,\sigma_{i-1},\sigma_{i+1},\dots,\sigma_n)$ y un número real $c > 0$, sea

$$L_i^c(\sigma_1,\dots,\sigma_{i-1},\sigma_{i+1},\dots,\sigma_n) = \{\sigma_i \in \Sigma_i : \frac{G_i(\sigma_1,\dots,\sigma_{i-1},\sigma_i,\sigma_{i+1},\dots,\sigma_n)}{H_i(\sigma_1,\dots,\sigma_{i-1},\sigma_i,\sigma_{i+1},\dots,\sigma_n)} \geqslant c\}$$

$$= \{\sigma_i \in \Sigma_i \ : \ G_i(\sigma_1,\dots,\sigma_n) - c\,H_i(\sigma_1,\dots,\sigma_n) \geqslant 0\}$$

Este conjunto para cada c es convexo y cerrado por ser G_i cóncava y H_i convexa en $\sigma_i \in \Sigma_i$ respectivamente y ambas continuas.

Definamos para cada $(\sigma_1,\dots,\sigma_{i-1},\sigma_{i+1},\dots,\sigma_n)$ y cada $i \in N$ el conjunto:

$$\phi_i(\sigma_1,\ldots,\sigma_{i-1},\sigma_{i+1},\ldots,\sigma_n) = \{\sigma_i \in \Sigma_i : F_i(\sigma_1,\ldots,\sigma_n) =$$

$$= \max_{\zeta_i \varepsilon \Sigma_i} F_i(\sigma_1,\ldots,\sigma_{i-1},\zeta_i,\sigma_{i+1},\ldots,\sigma_n)\}$$

el cual es no vacío, convexo y cerrado, ya que los L_i^c lo son. Entonces el conjunto

$$\phi(\sigma_1,\ldots,\sigma_n) = \underset{i\varepsilon N}{X} \phi_i(\sigma_1,\ldots,\sigma_{i-1},\sigma_{i+1},\ldots,\sigma_n) \subset \underset{i\varepsilon N}{X} \Sigma_i$$

determina una función multivaluada $\phi\colon \underset{i\varepsilon N}{X} \Sigma_i \longrightarrow \underset{i\varepsilon N}{X} \Sigma_i$ tal que cada imagen es no vacía, convexa y cerrada. Además el gráfico de ϕ es cerrado por ser las funciones de pago continuas. Por lo tanto el teorema de puntos fijos de Kakutani asegura la existencia de un punto fijo: $\bar{\sigma} \in \phi(\bar{\sigma})$. Un tal punto es un punto de equilibrio del juego Γ. (CQD).

Dado un juego racional finito $\Gamma = \{\Sigma_i, A_i/B_i;\ i \in N\}$ con $B_i > 0$, donde el número de estrategias $|\Sigma_i|$ para cada jugador es finito, podemos definir su extensión $\bar{\Gamma} = \{\tilde{\Sigma}_i, D_i/E_i,\ i \in N\}$ donde $\tilde{\Sigma}_i$ es el conjunto de todas las probabilidades definidas sobre Σ_i . D_i y E_i son las esperanzas matemáticas de A_i y B_i respectivamente.

Por lo tanto la extensión $\bar{\Gamma}$ es un juego racional. Entonces del Teorema anterior se obtiene inmediatamente el siguiente resultado:

COROLARIO 2. *La extensión* $\bar{\Gamma} = \{\tilde{\Sigma}_i, D_i/E_i;\ i \in N\}$ *de un juego racional finito* $\Gamma = \{\Sigma_i, A_i/B_i;\ i \in N\}$, *donde* $B_i > 0$, *posee un punto de equilibrio.*

Demostración. Como las funciones D_i y E_i son multilineales y $E_i > 0$, entonces aplicando el Teorema anterior al juego $\bar{\Gamma}$, el resultado resulta claro. (CQD).

Queremos mencionar que un punto de equilibrio de un juego racional $\Gamma = \{\Sigma_i, G_i/H_i;\ i \in N\}$ es un punto $\bar{\sigma} = (\bar{\sigma}_1,\ldots,\bar{\sigma}_n)$ tal que cumple si y sólo si:

$$\emptyset_\Gamma(\bar{\sigma},\bar{\sigma}) = \max_{\substack{\sigma\varepsilon X\Sigma_i \\ i\varepsilon N}} \emptyset_\Gamma(\sigma,\bar{\sigma})$$

donde

$$\emptyset_\Gamma(\sigma,\zeta) = \sum_{i\varepsilon N} J_i^\Gamma(\sigma_i,\zeta)$$

con

$$J_i^\Gamma(\sigma_i,\zeta) = H_i(\zeta)\, G_i(\zeta_1,\ldots,\zeta_{i-1},\sigma_i,\zeta_{i+1},\ldots,\zeta_n) -$$

$$- G_i(\zeta)\, H_i(\zeta_1,\ldots,\zeta_{i-1},\sigma_i,\zeta_{i+1},\ldots,\zeta_n)$$

Este resultado puede verse en la demostración de la existencia de puntos de equilibrio dada por el autor [5].

Usando estos resultados, tenemos que

PROPOSICION 3. *Dados los juegos racionales*

$$\Gamma = \{\Sigma_i, G_i/H_i;\ i \in N\}, \quad \Gamma^* = \{\Sigma_i, G_i/(H_i \pm G_i);\ i \in N\}$$

bajo las condiciones $H_i > 0$, $H_i \pm G_i > 0$, *poseen los mismos puntos de equilibrio.*

Demostración. Nos hace falta ver que $\emptyset_\Gamma = \emptyset^*_\Gamma$. Consideremos

$$J_i^{\Gamma^*} = [H_i(\zeta) \pm G_i(\zeta)]\, G_i(\zeta_1,\dots,\zeta_{i-1},\sigma_i,\zeta_{i+1},\dots,\zeta_n) -$$

$$- G_i(\zeta)[H_i(\zeta_1,\dots,\zeta_{i-1},\sigma_i,\zeta_{i+1},\dots,\zeta_n) \pm G_i(\zeta_1,\dots,\zeta_{i-1},\sigma_i,\zeta_{i+1},\dots,\zeta_n)]$$

y simplificando tenemos

$$J_i^{\Gamma^*}(\sigma_i,\zeta) = H_i(\zeta) G_i(\zeta_1,\dots,\zeta_{i-1},\sigma_i,\zeta_{i+1},\dots,\zeta_n) -$$

$$- G_i(\zeta) H_i(\zeta_1,\dots,\zeta_{i-1},\sigma_i,\zeta_{i+1},\dots,\zeta_n) = J_i^{\Gamma}(\sigma_i,\zeta)$$

Por lo tanto $\emptyset_\Gamma = \emptyset^*_\Gamma$ (CQD).

Queremos hacer notar que este mismo resultado vale también si solamente para algunos k se tiene $G_i/H_i \pm G_i$ como función de pago.

2. GENERALIZACION DEL MODELO DE CRECIMIENTO DE VON NEUMANN.

Nosotros al generalizar el famoso modelo de expansión económica de von Neumann, supondremos que el lector conozca tal modelo. Como referencias para este modelo damos los excelentes libros de Burger [2] y el de Nikaido [10].

Ahora presentaremos una tal generalización. Sea $K = \{1,\dots,m\}$ el conjunto de naciones o economías, las cuales, sin perder generalidad asúmimos que poseen un número igual de procesos o actividades económicas $I = \{1,\dots,n\}$. Además se tiene el conjunto total de bienes de consumo $J = \{1,\dots,q\}$.

Los insumos del bien j que vienen del país k del proceso $i \in I$ al país ℓ está determinado por la matriz n x m: $A^{k\ell}(i,j)$. Todas estas matrices son non-negativas. Similarmente $B^{k\ell}(i,j) \geqslant 0$ es el producto del país k que va al país ℓ del proceso i del bien j. Llamaremos a las matrices $A^{k\ell}$ y $B^{k\ell}$, insumo y productos respectivamente.

Como es usual, adoptaremos la normalización de las intensidades, es decir que para el país k: $x^k = (x_1^k,\dots,x_n^k)$ está en el simplex unitario, o sea $$x^k \in \{z \in R^n\colon z_i \geqslant 0,\ \sum_{i=1}^{n} z_i = 1\}$$

Similarmente, el vector precio para la nación k será $p^k = (p_1^k,\ldots,p_q^k)$, el cual es normalizado.

Si cada nación k opera con la intensidad x^k, entonces $x_i^\ell\ A^{\ell k}(i,j)$ representa el porcentaje del proceso i de la nación ℓ que va a la nación k del bien j. Luego

$$\sum_{i=1} \sum_{\ell=1} x_i^\ell\ A^{k\ell}(i,j)$$

representa el total del insumo o demanda sobre todas las naciones y bienes. Por lo tanto si α_k es el coeficiente de expansión, la cantidad

$$\alpha_k \sum_{i=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{m} x_i^\ell\ A^{\ell k}(i,j)$$

es la oferta total de lo exportado e interno en la nación k, lo cual debe cubrir por lo menos la demanda para la próxima etapa. De aquí, tenemos una primera desigualdad de las cantidades

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^k \sum_{\ell=1}^{m} B^{k\ell}(i,j) \geqslant \alpha_k \sum_{i=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{m} x_i^\ell\ A^{\ell k}(i,j) \qquad (1)$$

para cada j y cada k. Esto tiene en cuenta el balance de cantidades internas, de importación y externas.

Para considerar la parte financiera se tiene que

$$\sum_{j=1}^{q} p_j^k \sum_{\ell=1}^{m} B^{k\ell}(i,j)$$

es el precio total del producto interno y exportado del proceso i en la nación k. Por otro lado

$$\sum_{j=1}^{q} \sum_{\ell=1}^{m} p_j^\ell\ A^{\ell k}(i,j)$$

es el precio pagado por el proceso i por la nación k. Luego si β_k es el factor de interés en la nación k, se tiene que tener, por un análogo argumento que en el modelo de von Neumann

$$\sum_{j=1}^{q} p_j^k \sum_{\ell=1}^{m} B^{k\ell}(i,j) \leqslant \beta_k\Big(\sum_{j=1}^{q} \sum_{\ell=1}^{m} p_j^\ell\ A^{\ell k}(i,j) + \varepsilon\Big) \qquad (2)$$

para todo proceso i y nación k, donde $\varepsilon > 0$ es pequeño. La introducción del ε es debido a cuestiones técnicas las cuales resultarán claras más adelante.

En el precedente modelo, con matrices insumo $A^{k\ell} \geqslant 0$ y de producto $B^{k\ell} \geqslant 0$, un ε-equilibrio de expansión consiste por los vectores $\bar{x}^k, \bar{p}^k$,

$k \in K$ y coeficientes $0 < \bar{\alpha}_k < \infty$, $0 < \bar{\beta}_k < \infty$ los cuales cumplen

$$\alpha) \quad \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i^k \sum_{\ell=1}^{m} B^{k\ell}(i,j) \geq \bar{\alpha}_k \sum_{i=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{m} \bar{x}_j^\ell A^{\ell k}(i,j) \text{ para todo } j \text{ y cada } k.$$

$$\beta) \quad \sum_{j=1}^{q} \bar{p}_j^k \sum_{\ell=1}^{m} B^{k\ell}(i,j) \leq \bar{\beta}_k \left(\sum_{j=1}^{q} \sum_{\ell=1}^{m} \bar{p}_j^\ell A^{\ell k}(i,j) + \varepsilon \right)$$

$$\gamma) \quad \bar{p}_j^k = 0 \text{ si } \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i^k \sum_{\ell=1}^{m} B^{k\ell}(i,j) > \bar{\alpha}_k \sum_{i=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{m} \bar{x}_i^\ell A^{\ell k}(i,j)$$

$$\delta) \quad \bar{x}_i^k = 0 \text{ si } \sum_{j=1}^{q} \bar{p}_j^k \sum_{\ell=1}^{m} B^{k\ell}(i,j) < \bar{\beta}_k \left(\sum_{j=1}^{q} \sum_{\ell=1}^{m} \bar{p}_j^\ell A^{\ell k}(i,j) + \varepsilon \right)$$

La tercera condición expresa el hecho que si la producción de un bien excede al consumo, entonces su correspondiente precio es cero. Analogamente para la última desigualdad, si un bien no es ganancial entonces $\bar{x}_i^k = 0$.

Ahora veremos como un tal modelo de expansión y sus ε-equilibrios poseen una vinculación íntima con los juegos racionales entre n personas. Con tal motivo sea X el simplex unitario para los x y P el simplex unitario para los precios p.

Definamos las siguientes funciones

$$M^k(x^k,p^k) = \sum_i \sum_j p_j^k x_i^k \sum_\ell B^{k\ell}(i,j)$$

$$N^k(x^1,\ldots,x^m,p^k) = \sum_i \sum_j \sum_\ell x_i^\ell p_j^k A^{\ell k}(i,j)$$

y finalmente

$$O_\varepsilon^k(x^k,p^1,\ldots,p^m) = \sum_i \sum_j \sum_\ell x_i^k p_j^\ell A^{\ell k}(i,j) + \varepsilon = O^k(x^k,p^1,\ldots,p^m) + \varepsilon.$$

Teniendo estas funciones, introduciremos un juego racional ficticio de 2 m personas:

$$\Gamma_\varepsilon = \{P,\ldots,P,X,\ldots X;\ -M^1/_{N^1+M^1},\ldots,-M^m/_{N^m+M^m};M^1/_{O_\varepsilon^1+M^1},\ldots,M^m/_{O_\varepsilon^m+M^m}\}$$

el cual está definido si se cumple la condición

$$a) \quad A^{\ell k}(i,j) + \sum_{\ell=1}^{m} B^{k\ell}(i,j) > 0$$

para todos ℓ, k, i, y j.

Con una tal condición todos los denominadores son positivos. La última condición es una generalización de la condición $a_{ij} + b_{ij} > 0$ en el mo delo de von Neumann. Como es sabido tal condición ha sido cambiada por otra, por ejemplo por Kemeny-Morgenstern y Thompson en [6], Thompson [11], Gale en [3], y otros. Pero por brevedad y simplicidad, nosotros usaremos la condición ya mencionada.

Por otro lado, es claro que cada proceso consuma algún bien; es decir: para cada k hay un ℓ tal que para cada i hay un j: $A^{\ell k}(i,j) > 0$. Condición que llamaremos b). Finalmente cada bien es producido por algún proceso: para cada k y j hay un i y un ℓ tal que $B^{k\ell}(i,j) > 0$, la cual designamos como condición c).

Ahora introduciremos el resultado principal de este trabajo.

TEOREMA 4. *Dado el modelo de expansión cumpliéndose las condiciones adicionales* a), b), y c), *entonces* $\bar{x}^k$, $\bar{p}^k$, $0 < \bar{\alpha}_k < \infty$, $0 < \bar{\beta}_k < \infty$ *es un* ε*-equilibrio de expansión si y sólo si* $(\bar{x}^1,\ldots,\bar{x}^m,\bar{p}^1,\ldots,\bar{p}^m)$ *es un punto de equilibrio del juego asociado* Γ_ε, *con*

$$\bar{\alpha}_k\ N^k(\bar{x}^1,\ldots,\bar{x}^m,\bar{p}^k) = M^k(\bar{x}^k,\bar{p}^k)$$

y

$$\bar{\beta}_k\ O^k_\varepsilon(\bar{x}^k,\bar{p}^1,\ldots,\bar{p}^m) = M^k(\bar{x}^k,\bar{p}^k).$$

Demostración. Tomemos la desigualdad α) que multiplicaremos por p^k_j y sumamos sobre j. De aquí

$$M^k(\bar{x}^k,p^k) \geqslant \bar{\alpha}_k\ N^k(\bar{x}^1,\ldots,\bar{x}^m,p^k).$$

En virtud de γ), para $p^k = \bar{p}^k$ tenemos una igualdad. Llamemos

$$\bar{\alpha}_k = \frac{\bar{\gamma}_k}{1-\bar{\gamma}_k}$$

consecuentemente $0 < \bar{\gamma}_k < 1$. Reemplazando en la desigualdad anterior este coeficiente y multiplicando la correspondiente ecuación, se tiene

$$\frac{-M^k(\bar{x}^k,p^k)}{N^k(\bar{x}^1,\ldots,\bar{x}^m,p^k) + M^k(\bar{x}^k,p^k)} \leqslant -\bar{\gamma}_k$$

la cual está bien definida por la propiedad a) que asegura que el denominador es siempre positivo. De nuevo, en virtud de la condición γ), se tiene

$$\frac{-M^k(\bar{x}^k,p^k)}{N^k(\bar{x}^1,\ldots,\bar{x}^m,p^k)+M^k(\bar{x}^k,p^k)} \leqslant \frac{-M^k(\bar{x}^k,\bar{p}^k)}{N^k(\bar{x}^1,\ldots,\bar{x}^m,\bar{p}^k)+M^k(\bar{x}^k,\bar{p}^k)} = \bar{\gamma}_k$$

Analogamente teniendo en cuenta las desigualdades β), δ) y a), se obtiene

$$\frac{M^k(x^k,\bar{p}^k)}{O^k_\varepsilon(x^k,\bar{p}^1,\ldots,\bar{p}^m) + M^k(x^k,\bar{p}^k)} \leqslant \frac{M^k(\bar{x}^k,\bar{p}^k)}{O^k_\varepsilon(\bar{x}^k,\bar{p}^1,\ldots,\bar{p}^m) + M^k(\bar{x}^k,\bar{p}^k)} = \bar{\delta}_k$$

donde $\bar{\beta}_k = \dfrac{\bar{\delta}_k}{1-\bar{\delta}_k}$ y $0 < \bar{\delta}_k < 1$. Por lo tanto un ε-equilibrio de expansión es un punto de equilibrio de Γ_ε.

Inversamente, sea $(\bar{x}^1,\ldots,\bar{x}^m,\bar{p}^1,\ldots,\bar{p}^m)$ un punto de equilibrio del juego Γ_ε, cuyas funciones de pago son no negativas con denominador positivo, debido a la condición a). Un tal punto de equilibrio existe por el teorema 1, ya que nuestras funciones son multilineales y suma de ellas son también multilineales. Entonces, por una parte tenemos

$$\frac{-M^k(\bar{x}^k,p^k)}{N^k(\bar{x}^1,\ldots,\bar{x}^m,p^k) + M^k(\bar{x}^k,p^k)} \leqslant \frac{-M^k(\bar{x}^k,\bar{p}^k)}{N^k(\bar{x}^1,\ldots,\bar{x}^m,\bar{p}^k) + M^k(\bar{x}^k,\bar{p}^k)}$$

Llamando $\bar{\gamma}_k$ al segundo término multiplicado por menos uno, se tiene

$$\frac{M^k(\bar{x}^k,p^k)}{N^k(\bar{x}^1,\ldots,\bar{x}^m,p^k) + M^k(\bar{x}^k,p^k)} \geqslant \bar{\gamma}_k \qquad (*)$$

para todo p^k.

Queremos ver que $0 < \bar{\gamma}_k < 1$. Claramente $0 \leqslant \gamma_k \leqslant 1$. Si fuese $\bar{\gamma}_k = 1$ entonces de la última desigualdad, tendríamos

$$N^k(\bar{x}^1,\ldots,\bar{x}^m,\ p^k) \leqslant 0$$

para todo p^k. Por lo tanto

$$\sum_i \sum_\ell \bar{x}^\ell_i\ A^{\ell k}(i,j) \leqslant 0$$

para cada j. Sea $\bar{x}^{\bar{\ell}}_{\bar{i}} > 0$ donde $\bar{\ell}$ es el de la condición b) entonces por ella existe un $\bar{j}$ tal que $A^{\bar{\ell}k}(\bar{i},\bar{j}) > 0$. De aquí

$$0 < \bar{x}^{\bar{\ell}}_{\bar{i}}\ A^{\bar{\ell}k}(\bar{i},\bar{j}) \leqslant \sum_i \sum_\ell \bar{x}^\ell_i\ A^{\ell k}(i,j)$$

lo que es absurdo.

Queremos ver que $\bar{\gamma}_k \neq 0$. Para ello consideramos las otras desigualdades del punto de equilibrio de Γ_ε que están dadas por:

$$\frac{M^k(x^k,\bar{p}^k)}{O^k_\varepsilon(x^k,\bar{p}^1,\ldots,\bar{p}^m) + M^k(x^k,\bar{p}^k)} \leqslant \frac{M^k(\bar{x}^k,\bar{p}^k)}{O^k_\varepsilon(\bar{x}^k,\bar{p}^1,\ldots,\bar{p}^m) + M^k(\bar{x}^k,\bar{p}^k)} = \bar{\delta}_k$$

Inmediatamente se ve que $0 \leqslant \bar{\delta}_k \leqslant 1$. Es claro que $\bar{\delta}_k \neq 0$, ya que si fuera $\bar{\delta}_k = 0$ entonces $M^k(x^k,\bar{p}^k) \leqslant 0$ para cada x^k. Pero similarmente como en el caso $\bar{\gamma}_k \neq 1$ la condición c) prohibe esto. En consecuencia

$0 < \bar{\delta}_k$. Ahora tenemos que

$$\bar{\gamma}_k = \frac{M^k(\bar{x}^k,\bar{p}^k)}{N^k(\bar{x}^1,\ldots,\bar{x}^m,\bar{p}^k) + M^k(\bar{x}^k,\bar{p}^k)}$$

y si $\bar{\gamma}_k = 0$ entonces $M^k(\bar{x}^k,\bar{p}^k) = 0$. Pero si vale esto último tendríamos $\bar{\delta}_k = 0$, lo cual es imposible. Entonces $\bar{\gamma}_k > 0$.

Supongamos ahora que $\bar{\delta}_k = 1$ entonces

$$O^k_\varepsilon(x^k,\bar{p}^1,\ldots,\bar{p}^m) \leqslant 0$$

lo cual es imposible porque

$$O^k_\varepsilon(x^k,\bar{p}^1,\ldots,\bar{p}^m) \geqslant \varepsilon > 0.$$

Entonces $0 < \delta_k < 1$ y por lo tanto

$$M^k(x^k,\bar{p}^k) \leqslant \bar{\beta}_k \; O^k_\varepsilon(x^k,\bar{p}^1,\ldots,\bar{p}^m)$$

donde $0 < \bar{\beta}_k = \dfrac{\bar{\delta}_k}{1-\bar{\delta}_k} < \infty$.

De aquí se tiene

$$\sum_j \bar{p}^k_j \sum_\ell B^{k\ell}(i,j) \leqslant \bar{\beta}_k \left[\sum_j \sum_\ell \bar{p}^\ell_j A^{\ell k}(i,j) + \varepsilon\right]$$

para cada i y k, lo cual es β). El cumplimiento de δ) es claro. Si no fuese cierto, entonces tampoco (*) no sería cierto.

Finalmente, como se tiene $0 < \bar{\alpha}_k = \dfrac{\bar{\delta}_k}{1-\bar{\delta}_k} < \infty$, entonces (*) se puede escribir de la siguiente forma:

$$M^k(\bar{x}^k,p^k) \geqslant \bar{\alpha}_k \; N^k(\bar{x}^1,\ldots,\bar{x}^m,p^k)$$

para todo k y p^k, y de aquí

$$\sum_i \bar{x}^k_i \sum_\ell B^{k\ell}(i,j) \geqslant \bar{\alpha}_k \sum_i \sum_\ell \bar{x}^\ell_i A^{\ell k}(i,j)$$

para todo j y k, lo cual es α). La condición γ) se obtiene análogamente como δ).

De aquí un punto de equilibrio es un ε-equilibrio de expansión. (CQD).

Es interesante notar que para cada ε, uno posee un ε-equilibrio de expansión o un punto de equilibrio del juego asociado Γ_ε. Uno está tentado de hacer $\varepsilon \longrightarrow 0$, pero en tal caso aparecerá por lo menos un punto de

BIBLIOGRAFIA

[1] BRUCKMANN G. y WEBER W. Ed., *Contributions to the von Neumann Growth Model*, Springer Verlag 1971.

[2] BURGER E., *Introduction to the Theory of Game*, Prentice Hall 1963.

[3] GALE D., *The Closed Linear Model Introduction in Linear Inequalites and Related Systems*, (Eds. H.W. Kunh and A.W. Tucker) Princeton 1956.

[4] KEMENY, J.G., O. MORGENSTERN y G.L. THOMPSON, *A generalization of the von Neumann Model of a expanding economy*, Econométrica 24, 115-135 (1956).

[5] MARCHI E., *Equilibrium points of rational n-person games*, Journal Math. Anal. and Appl. vol. 54 n° 1, 1-4 (1976).

[6] MORGENSTERN O. y G.L. THOMPSON, *Private and public consumption and savings in the von Neumann model of an expanding economy*, Kyklos 20, 387-409, 1967.

[7] MORGENSTERN O. y G.L. THOMPSON, *An open expanding economy model*, Naval Res. Log. Quart. 16 443-457, 1969.

[8] MORGENSTERN O. y G.L. THOMPSON, *Further consideration of an open expanding economy model*, en [1].

[9] v. NEUMANN, *A model of general economic equilibrium*, Rev. of Econ. Studies 12, 1-9, 1945-1946.

[10] NIKAIDO H., *Convex structures and economic theory*, Acad. Press. (1968).

[11] THOMPSON G.L., *On the solution of a game theoretic problem. In Linear Inequalities and Related Systems*, (Eds. H.W. Kuhn y A.W. Tucker) Princeton pp. 275-284, 1956.

IMECC, UNICAMP , Campinas, S.P.
Brasil.

y Universidad Nacional de San Luis
Argentina.

Recibido en abril de 1978.