Revista de la
Unión Matemática Argentina
Volumen 29, 1980

SOPRA UNA GENERALIZZAZIONE D'UNA FORMOLA DI RAPPRESENTAZZIONE DI BOGOLIUBOV-PARASIUK

Susana Elena Trione

Dedicado al Profesor Luis A. Santaló

SUMMARY. We give a representation of the (causal, anticausal) elementary solutions of the n-dimensional Klein-Gordon operator, iterated k times, $G_{\alpha=2k}(P \pm io,m,n)$ (cfr. formula (I,1;1) by means of a simple (symbolic) Fourier integral (cfr. formula (I,2;5)). The particular case n=4, k=1, which is important in the quantum theory of fields, since $G_2(P \pm io,m,4)$ embodies a useful expression of the causal propagator of Feynman, was established by Bogoliubov and Parasiuk (cf. [1], specially p. 233), and plays an essential role in the theory of the multiplication of causal distributions, due to these authors.

We evaluate also some "heterodox" products as $\{G_0\}^2$, $\{G_{-2k}\}.\{G_{-2\ell}\}$, $k, \ell = 0,1,2,\ldots$, and $\{\Box\, G_2\}^2$, where $\Box$ is the lorentzian (cf. formula (II,3;1)).

I.1. Consideriamo le distribuzioni

$$G_\alpha(P \pm io,m,n) = A_\alpha(m,n)(P \pm io)^{\frac{1}{2}(\frac{\alpha-n}{2})} . K_{\frac{n-\alpha}{2}}\{\sqrt{m^2(P \pm io)}\} , \qquad (I,1;1)$$

dove

$$P = P(x) = x_1^2 + \ldots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \ldots - x_{p+q}^2 , \qquad (I,1;2)$$

p,q, intieri > 0, $p+q = n$, $\alpha \in C$, $m > 0$, $x = (x_1,x_2,\ldots,x_n) \in R^n$, $n \geqslant 2$.

Abbiamo inoltre posto

$$A_\alpha(m,n) = \frac{e^{\frac{\pi i\alpha}{2}} (2\Pi)^{-\frac{n}{2}} 2^{1-\frac{\alpha}{2}} e^{\pm\frac{\pi}{2}iq} (m^2)^{\frac{1}{2}(\frac{\alpha-n}{2})}}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})} , \qquad (I,1;3)$$

$$(P \pm io)^\lambda \stackrel{def}{=} \lim_{\varepsilon\to 0} \{P \pm i\varepsilon\, |x|^2\}^\lambda , \qquad (I,1;4)$$

ove $\varepsilon > 0$, $\lambda \in C$, $|x|^2 = x_1^2 + \ldots + x_n^2$, e K é la funzione modificata di Bessel di terza specie (cf. [2], formole (6) e (7), p. 78).

La distribuzione G_α, che é un análogo (causale, anticausale) del nucleo (ellittico) di Calderón-Aronszajn-Smith ha le seguenti interessanti propietá (cf. [3], formule (7), (8) e (10)).

i) $G_0 = \delta$, (I,1;5)

ii) $G_\alpha * G_\beta = G_{\alpha+\beta}$; $\alpha,\beta \in C$, (I,1;6)

iii) $G_{-2\ell} = K^\ell(\delta)$, $\ell = 0,1,2, \ldots$, (I,1;7)

dove

$$K^\ell(u) \overset{\text{def}}{=\!=\!=} \left\{\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_p^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_{p+1}^2} \ldots - \frac{\partial^2}{\partial x_{p+q}^2} - m^2\right\}^\ell u \quad , \qquad (I,1;8)$$

$m > 0$.

Il seguente teorema é valido,

TEOREMA 1. *Le distribuzioni* G_{2k} $(P \pm io,m,n)$, $k=1,2,\ldots$, $n > 2$ *sono soluzioni elementari (anticausali, causali) dell'operatore* n-*dimensionale di Klein-Gordon iterato* k-*volte:*

$$K^k\{G_{2k}\} = \delta \ . \qquad (I,1;9)$$

Nel caso particolare n=4, k=1, queste soluzioni si scrivono

$$G_2(P+io,m,4) = -\frac{mi}{4\pi^2}\,\frac{K_1\{\sqrt{m^2(P+io)}\}}{(P+io)^{\frac{1}{2}}} \qquad (I,1;10)$$

$$G_2(P-io,m,4) = \frac{mi}{4\pi^2}\,\frac{K\ \{\sqrt{m^2(P-io)}\}}{(P-io)^{\frac{1}{2}}} \qquad (I,1;11)$$

La (I,1;11) é un'utile espressione della famosa "funzione magica" o propagatore causale del Feynman (cf. [4], p. 757; formola (3)).

I.2. Scopo di questa Nota é ottenere una rappresentazione delle soluzione elementari $G_{2k}(P \pm io,m,n)$ mediante un'integrale semplice di Fourier simbolica.

Partiremo dalla relazione conosciuta (cf.[2], p. 183, formola (15)),

$$\int_0^\infty e^{-pt}\,\frac{1}{2}\,t^{-\nu-1}\,e^{-\frac{\alpha}{t}}\,dt \overset{\text{def}}{=\!=\!=} f(p,\alpha,\nu) = \alpha^{-\frac{\nu}{2}}\,p^{\frac{\nu}{2}}\,K_\nu(2\,\alpha^{\frac{1}{2}}\,p^{\frac{1}{2}}) \ , \qquad (I,2;1)$$

valida per Re $p > 0$ e Re $\alpha > 0$.

Ponendo nella (I,2;1)

$$p = \pm i\,(m \mp i\varepsilon)\ ,$$

$$\alpha = \mp \frac{i}{4}\,(P \pm i\varepsilon|x|^2)\ ,$$

ove $\varepsilon > 0$, $m > 0$ e P é definita dalla formola (I,1;2).

La formola (I,2;1) si scrive, con queste sostituzioni,

$$f(\pm i(m \mp i\varepsilon),\ \mp\frac{i}{4}\,(P \pm i\varepsilon|x|^2),\nu) =$$

$$= 2^{\nu} e^{\pm\frac{\pi i\nu}{2}}\,(m^2 \mp i\varepsilon)^{\frac{\nu}{2}}(P \pm i\varepsilon|x|^2)^{-\frac{\nu}{2}}.K_{\nu}(\sqrt{(m^2 \pm i\varepsilon)(P \pm i\varepsilon|x|^2)})\ . \qquad \text{(I,2;2)}$$

Se prendiamo limiti nei due membri della formola (I,2;2), per $\varepsilon \to 0$, il secondo membro tende alla distribuzione

$$2^{\nu}\ e^{\pm\frac{\pi}{2}i\nu}\ m^{\nu}(P \pm io)^{-\frac{\nu}{2}}\ K_{\nu}(\sqrt{m^2(P \pm io)})\ ,$$

ed anche tende a un limite il primo membro. Si ottiene

$$2^{\nu+1}\ e^{\pm i\frac{\pi}{2}\nu}\ m^{\nu}(P \pm io)^{-\frac{\nu}{2}}\ K_{\nu}(\sqrt{m^2(P \pm io)}) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{\infty} e^{\pm i(m^2 \mp i\varepsilon)t}\ t^{-\nu-1}\ e^{-\frac{i}{4t}(P \pm i\varepsilon|x|^2)}\ dt.$$

Se poniamo in questa formola $\nu = \frac{n}{2} - k$, k intiero $\geqslant 1$, si ricava,

$$2^{\frac{n}{2}-k+1}\ e^{\pm\frac{\pi}{2}i(\frac{n}{2}-k)}\ m^{\frac{n}{2}-k}\ (P \pm io)^{-\frac{1}{2}(\frac{n}{2}-k)}\ K_{\frac{n}{2}-k}\ (\sqrt{m^2(P \pm io)}) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{\infty} e^{\pm i(m^2 \mp i\varepsilon)t}\ t^{k-\frac{n}{2}-1}\ e^{\mp\frac{i}{4t}(P \pm i\varepsilon|x|^2)}\ dt\ . \qquad \text{(I,2;3)}$$

La formola (I,2;3) púo scriversi, se si moltiplicano i due membri per costanti appropiate, nella forma

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\ \frac{(-1)^k\ 2^{-\frac{n}{2}}}{\Gamma(k)}\ e^{\pm i\frac{\pi}{2}q}\ e^{\mp i\frac{\pi}{2}(\frac{n}{2}-k)}\ .$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{\infty} e^{\pm i(m^2 \mp i\varepsilon)t}\ t^{k-\frac{n}{2}-1}\ e^{\mp\frac{i}{4t}(P \pm i\varepsilon|x|^2)}\ dt =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\ (-1)^k\ \frac{1}{\Gamma(k)}\ e^{\pm\frac{\pi}{2}iq}\ 2^{1-k}\ (m\ )^{\frac{1}{2}(\frac{n}{2}-k)}\ .$$

$$(P \pm io)^{-\frac{1}{2}(\frac{n}{2}-k)} \cdot K_{\frac{n}{2}+k}\left(\sqrt{m^2(P \pm io)}\right) \qquad (I,2;4)$$

Dalla definizione della distribuzione $G_\alpha(P \pm io,m,n)$ (cf. formola (I,1;1)), il secondo membro di (I,2;4) risulta, precisamente $G_{2k}(P \pm io,m,n)$.

Quindi abbiamo dimostrato il seguente

TEOREMA 2. *Le soluzioni elementari (anticausali, causali)* $G_{2k}(P \pm io,m,n)$ *ammetono la rappresentazione*

$$G_{2k}(P \pm io,m,n) = C_{\pm}(n,k,q) . \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^\infty e^{\pm i(m^2 \mp i\varepsilon)t}\, t^{k-\frac{n}{2}-1}\, e^{\mp\frac{i}{4t}(P \pm i\varepsilon|x|^2)}\, dt$$

(I,2;5)

dove

$$C_{\pm}(n,k,q) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\, 2^{-\frac{n}{2}}\, e^{\pm\frac{\pi}{2}iq}\, e^{\mp\frac{\pi}{2}i(\frac{n}{2}-k)}\, \frac{1}{\Gamma(k)} .$$

In particolare, per n=4, k=1, q=1, risulta il

TEOREMA 3. *Le soluzioni* $G_2(P \pm io,m,4)$ *dell'operatore di Klein-Gordon ammetono la rappresentazione*

$$G_2(P \pm io,m,4) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{16\pi^2}\cdot\int_0^\infty e^{\pm\pi i(m^2 \mp i\varepsilon)t}\,\frac{1}{t^2}\, e^{\mp\frac{i}{4t}(x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_4^2 \pm i\varepsilon|x|^2)}\, dt.$$

(I,2;6)

Questa formola (ove nel primo membro si scega il segno positivo) coincide con la formola di Bogoliubov e Parasiuk (cf. [1]) e disimpegna un ruolo essenziale nella teoria, dovuta a questi autori, della moltiplicazzione di distribuzioni causali.

II.1. E ben noto che l'espressione δ^2 non ha senso (essa corrisponderebbe, a una masa infinita nel origine). Consegniamo una relazione fra la distribuzione G_α, e l'espressione della δ^2 o, piú generalmente, della δ^n, che é utile nella teoria quantica dei campi.

Se si tiene conto della (I,1;5) púo scriversi, per definizione,

$$\lim_{\alpha\to 0}\{G_\alpha(P \pm io,m,n)\}^2 \stackrel{\text{def}}{=\!=\!=} \delta^2 . \qquad (II,1;1)$$

Da ció scende immediatamente la formola

$$\lim_{\alpha\to 0}\{G_\alpha\}^2 = 0 \ ,$$

ossia, equivalentemente,

$$\delta^2 = 0 \ , \qquad (II,1;2)$$

e piú generalmente

$$\delta^n = 0 \qquad (II,1;3)$$

II.2. Ora calcoleremo il prodotto $\{G_{-2k}\}.\{G_{-2\ell}\}$, $k, \ell = 0,1,2,\ldots$. Tenendo presenta la definizione di $G_\alpha(P \pm io,m,n)$ (cf. formola (I,1;1) noi stimaremo i seguenti limiti:

$$\lim_{\alpha\to -2k}\{G_\alpha\} . \lim_{\alpha\to -2\ell}\{G_\alpha\} =$$

$$= \lim_{\alpha\to -2k}\left\{\frac{e^{\frac{\pi i\alpha}{2}}(2\pi)^{-\frac{n}{2}}2^{1-\frac{\alpha}{2}}e^{\pm\frac{\pi}{2}qi}}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})}.(m^2)^{\frac{1}{2}(\frac{\alpha-n}{2})}(P\pm io)^{\frac{1}{2}(\frac{\alpha-n}{2})}K_{\frac{n-\alpha}{2}}(\sqrt{m^2(P\pm io)})\right\}$$

$$\lim_{\alpha\to -2\ell}\left\{\frac{e^{\frac{\pi}{2}i\alpha}(2\pi)^{-\frac{n}{2}}2^{1-\frac{\alpha}{2}}e^{\pm\frac{\pi}{2}qi}}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})}.(m^2)^{\frac{1}{2}(\frac{\alpha-n}{2})}(P\pm io)^{\frac{1}{2}(\frac{\alpha-n}{2})}K_{\frac{n-\alpha}{2}}(\sqrt{m^2(P\pm io)})\right\}$$

$k, \ell = 0,1,2,\ldots \qquad$ (II,2;1)

Ci conviene osservare che le $(P \pm io)^\lambda$, sono distribuzioni olomorfe di λ, salvo nei punti $\lambda = -\frac{n}{2} - k$, $k = 0,1,2,\ldots$, ove queste distribuzioni hanno poli semplici (cf. [5], p. 275). Da questo segue che le distribuzioni $(P\pm io)^{\frac{1}{2}(-\frac{2k-n}{2})}$ e $(P\pm io)^{\frac{1}{2}(-\frac{2\ell-n}{2})}$ esistono.

Pertanto, si vede senza difficoltá che, a cagione delle Γ che appaiono nei denominatori dei prodotti de (II,2;1), risulta

$$\lim_{\alpha\to -2k}\{G_\alpha\} . \lim_{\alpha\to -2\ell}\{G_\alpha\} = 0 \ , \qquad (II,2;2)$$

$k, \ell = 0,1,2,\ldots$, ove K é definito dalla formola (I,1;8).

Notiamo finalmente che la (II,2;2), tenendo conto della (I,1;7), prende la forma

$$\{K^k(\delta)\} . \{K^\ell(\delta)\} = 0 \qquad (II,2;3)$$

$k, \ell = 0,1,2,\ldots$

II.3. Denotiamo, come di consueto con $\Box$ il lorentziano nel caso n=3,

$$\Box \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_4^2} . \qquad (II,3;1)$$

La distribuzione $G_\alpha(P \pm io,m,n)$ nel caso particolare m=0, dopo calcoli lunghi ma elementari, che omettiamo, risulta

$$G_\alpha(P \pm io,m=0,n) \stackrel{\text{def}}{=} H_\alpha(P \pm io,n) = \frac{e^{\frac{\pi}{2}i}\, e^{\pm\frac{\pi}{2}iq}\, \Gamma(\frac{n-\alpha}{2})}{2^\alpha\, \Gamma(\frac{\alpha}{2})\, \pi^{\frac{n}{2}}} (P \pm io)^{\frac{\alpha-n}{2}} \qquad (II,3;2)$$

ove q é il numero di termini negativi di P.

Le distribuzioni H_α che sonno un analogo (causale, anticausale) del nucleo ellittico di Marcel Riesz (cf. [6], p. 16), hanno similari proprietá interessanti (cf. [7], p. 323).

Nel caso particolare n=4, $\alpha=2$, q=1 la (II,3;2) prende la forma

$$H_2(P \pm io,n = 4) = \frac{e^{\pi i}\, e^{\pm\frac{\pi}{2}i}}{4\,\pi^2} (P \pm io)^{-1} . \qquad (II,3;3)$$

Ora calcoleremo $\{\Box\, H_2(P \pm io,\ n = 4)\}^2$.

Partiremo dalla relazione ben nota

$$\Box\ H_2 = \Box\, \delta * H_2 .$$

Ricordando (I,1;7) e tenendo conto delle (II,1;8) e (II,1;9), pp. 323-324, da [7], risulta

$$\Box\, H_2 = H_{-2} * H_2 = H_0 = \delta . \qquad (II,3;4)$$

Infine, dalle (II,1;2) e (II,3;4) si ricava

$$\{\Box\, H_2\}^2 = \delta^2 = 0 . \qquad (II,3;5)$$

NOTA. E possibile calcolare altri prodotti eterodossi, per esempio, $\{\Box\, G_2(P \pm io,m,n = 4,\ q = 1)\}^2$. In questo caso é un strumento essenziale la formola per la parte finita di $(P \pm io)^\lambda$, per $\lambda = -\frac{n}{2} - k$, $k = 0,1,2,\ldots$ (cf. [8], formola (1,7), p. 252).

BIBLIOGRAFIA

[1] N.N. BOGOLIUBOV e O.S. PARASIUK (1957), *Uber die Multiplication der Kausalfunktionen in der Quanten-theorie der Felder*, Acta Mathematica, 97, 227-266.

[2] G.N. WATSON (1944), *A treatise on the theory of Bessel functions*, Second edition. Cambridge, University Press.

[3] S.E. TRIONE (1972), *Soluzioni elementari causali dell'operatore di Klein-Gordon iterato*, Rend. Accad. Naz. Lincei, ser. VIII, vol. LII, fasc. 5, 607-610.

[4] R.P. FEYNMAN (1949), *The theory of positrons*, Phys. Rev., 16, 749-759.

[5] I.M. GELFAND e G.E. SHILOV (1964), *Generalized Functions*, Vol. I, Academic Press, New York.

[6] M. RIESZ (1949), *L'intégrale de Riemann-Liouville et le problème de Cauchy*, Acta Mathematica, 81, 1-223.

[7] S.E. TRIONE (1976), *On the Fourier Transform of Causal Distributions*, Studies in Applied Mathematics (55), 315-326.

[8] S.E. TRIONE (1973), *Sobre una fórmula de L. Schwartz*, Revista de la Unión Matemática Argentina, Vol. 26, 250-254.

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales,
Universidad de Buenos Aires.
Consejo Nacional de Investigaciones
Científicas y Técnicas.

Recibido en febrero de 1979.