SOBRE MULTIPLICADORES EN ESPACIOS DE HÖLDER GLOBALES

N. E. Aguilera y E. O. Harboure

Dedicado al Profesor Luis A. Santaló

RESUMEN. Se consideran operadores invariantes por traslaciones entre clases L^p_α de Hölder globales como las tratadas por N. M. Rivière. Se dan condiciones bajo las cuales estos operadores son continuos entre las clases L^p de Lebesgue.

Damos primeramente un resumen de las definiciones y resultados que usaremos, contenidos en el trabajo "Classes of Smoothness, The Fourier Method" de N.M. Rivière, el cual, creemos, no ha sido publicado.

LEMA 1 . Existe $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ con soporte en $\{x: 1/4 \leq |x| \leq 2\}$ tal que $\phi(x) \geq 0$ y

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \phi(2^m x) = 1 \text{ para } x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$$

Diremos en este caso que ϕ es una "función de Hörmander" (cf. [1]).

NOTACION. Dado $a > 0$ y f una función definida sobre $\mathbb{R}^n$, denotamos por f_a la función $f_a(x) = f(ax)$.

DEFINICION . Dada ϕ como en el lema 1, $1 \leq p \leq \infty$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, definimos el espacio:

$$H^p_\alpha(\mathbb{R}^n) = H^p_{\alpha, \phi}(\mathbb{R}^n) = \{f \in L^p(\mathbb{R}^n) : \sup_{a>0} \|f * \phi_a^\vee\|_{L^p} a^{-\alpha} < \infty\}$$

donde $g^\vee$ denota la antitransformada de Fourier de g .

Observamos que $\sup_{a>0} \|f * \phi_a^\vee\|_{L^p} a^{-\alpha} = \|f\|_{H^p_\alpha}$ no constituye una norma si $p = \infty$.

Los resultados siguientes prueban que en la definición de $H^p_\alpha(\mathbb{R}^n)$ podemos reemplazar a ϕ por otras funciones. Denotaremos por $M(\mathbb{R}^n)$ el espacio de medidas de Borel sobre $\mathbb{R}^n$ de variación total finita y por $\hat{M}(\mathbb{R}^n)$ el espacio de sus transformadas de Fourier. (cf. [3]).

TEOREMA 1. Sea $\eta \in \hat{M}(\mathbb{R}^n)$, $x \in \mathbb{R}$, satisfaciendo alguna de las condiciones:

- a) $\eta(x)|x|^{-r} \in \hat{M}(\mathbb{R}^n)$ si $0 < \alpha < r$
 b) $\eta(x)|x|^r \in \hat{M}(\mathbb{R}^n)$ si $-r < \alpha < 0$
 c) $\eta(x)\{|x|^r + |x|^{-r}\} \in \hat{M}(\mathbb{R}^n)$ si $\alpha = 0, r > 0$

Entonces existe una constante $C = C(\eta, r)$ tal que para toda $f \in H_\alpha^p(\mathbb{R}^n)$,

$$1 \leq p \leq \infty, \quad \|\eta_a^\vee * f\|_{L^p} \leq C \|f\|_{H_\alpha^p} a^\alpha.$$

DEFINICION. $\phi \in C(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ se dice tauberiana si dado $x \neq 0$ existe $\lambda = \lambda(x) > 0$ tal que $\phi(\lambda x) \neq 0$.

TEOREMA 2. Si $\eta \in M(\mathbb{R}^n)$ es una función tauberiana y para toda $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$ vale $\|\eta_a^\vee * f\|_{L^p} \leq C_1 a^\alpha$, entonces $f \in H_\alpha^p(\mathbb{R}^n)$ y $\|f\|_{H_\alpha^p} \leq C_0 \cdot C_1$ donde $C_0 = C_0(\eta)$.

Para eliminar el problema de la norma en $H_\alpha^\infty(\mathbb{R}^n)$, así como para completarlos, independizándonos de la condición $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, consideramos el espacio $S(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ definido como aquellas funciones de $S(\mathbb{R}^n)$ que se anulan junto con todas sus derivadas en el origen. El dual de este espacio se denota por $S'(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ y se puede identificar con el espacio $S'(\mathbb{R}^n)/\Delta$ donde Δ indica el conjunto de distribuciones con soporte en el origen. Cabe observar que con esta identificación tiene sentido la transformada de Fourier para elementos en este espacio y da un isomorfismo con $S'(\mathbb{R}^n)/P$, donde P es el conjunto de polinomios en n variables.

DEFINICION. Sea $1 \leq p \leq \infty, \alpha \in \mathbb{R}$. Dada una función de Hörmander definimos

$$L_\alpha^p(\mathbb{R}^n) = L_{\alpha, \phi}^p(\mathbb{R}^n) = \{f \in S'(\mathbb{R}^n)/P : \|f * \phi_a^\vee\|_{L^p} \leq C a^\alpha\}$$

y denotamos por $\|f\|_{L_\alpha^p} = \sup_{a>0} a^{-\alpha} \|f * \phi_a^\vee\|_{L^p}$.

Dando un sentido preciso a $f * \eta_a^\vee$, para una $\eta \in \hat{M}(\mathbb{R}^n)$ y $f \in S'(\mathbb{R}^n)/P$, podemos obtener los análogos de los teoremas 1 y 2, con lo que se ve que la definición de $L_\alpha^p(\mathbb{R}^n)$ no depende esencialmente de ϕ .

Enunciamos a continuación algunas propiedades básicas de estos espacios:

TEOREMA 3. $L^p_\alpha(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$ es un espacio de Banach y

a) $L^p_\alpha(\mathbb{R}^n) \subset L^r_\beta(\mathbb{R}^n)$ si $\beta = \alpha + n(\frac{1}{r} - \frac{1}{p})$ si $p \leq r \leq \infty$

b) $L^p(\mathbb{R}^n) \subset L^p_0(\mathbb{R}^n)$. En lo que sigue denotaremos por $L^p(\mathbb{R}^n)$ al espacio $L^p_0(\mathbb{R}^n)$.

c) Si $p = \infty, \alpha > 0$, $L^\infty_\alpha(\mathbb{R}^n)$ coincide con el espacio de funciones f que satisfacen, para $k < \alpha < k + 1$

i) $f \in C^k(\mathbb{R}^n)$ y $(\frac{\partial}{\partial x})^\gamma f(0) = 0$ para todo $|\gamma| \leq k$

ii) $\sup_{x, h, |\gamma|=k} |h|^{k-\alpha} |(\frac{\partial}{\partial x})^\gamma f(x+h) - (\frac{\partial}{\partial x})^\gamma f(x)| < \infty$

y si $\alpha = k + 1$,

i') $f \in C^k(\mathbb{R}^n)$, $(\frac{\partial}{\partial x})^\gamma f(0) = 0$ para todo $|\gamma| \leq k$ y para

$|\gamma| = k$, $(\frac{\partial}{\partial x})^\gamma f(e_j) = 0$ donde $\{e_j\}_{j=1}^n$ es la base canónica de $\mathbb{R}^n$.

ii') $\sup_{x, h, |\gamma|=k} |h|^{-1} |\Delta_h^2 (\frac{\partial}{\partial x})^\gamma f(x)| < \infty$

donde $\Delta_h^2 f(x) = f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)$.

Los supremos en ii) y ii') dan cantidades equivalentes a $\|f\|_{L^\infty_\alpha}$.

DEFINICION. Un operador T se dice un operador multiplicador si existe $m \in S'(\mathbb{R}^n/\Delta)$ (el multiplicador) tal que $(Tf)^\wedge = m \hat{f}$ para toda f tal que $f \in S(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$. Denotamos esta relación escribiendo $T = T_m$.

Enunciamos ahora algunas propiedades básicas de estos operadores:

LEMA 2. Sea T_m un operador con multiplicador m , tal que

$T_m: L^p_\alpha(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^q_\beta(\mathbb{R}^n)$. Entonces

a) $T_m: L^p_{\alpha+\delta}(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^q_{\beta+\delta}(\mathbb{R}^n)$ si $\delta \in \mathbb{R}$.

b) $T_m: L^q_\alpha(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^p_\beta(\mathbb{R}^n)$.

Estamos en condiciones ahora de enunciar el Teorema fundamental de este trabajo, el cual da para el caso $p = \infty$ un resultado análogo al

obtenido en [4].

TEOREMA 4. Supongamos que T_m es un operador con multiplicador m ,
 $T_m: L^p(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^p_\alpha(\mathbb{R}^n)$, donde $0 < \frac{\alpha}{n} < \frac{1}{p}$, $p \geq 2$. Entonces

$$a) T_m: L^r(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^s(\mathbb{R}^n) \text{ si } \max\left\{\frac{1}{p}, \frac{\alpha}{n}\right\} < \frac{1}{r} < \min\left\{1, \frac{1}{p} + \frac{\alpha}{n}\right\}$$

$$\text{y } \frac{1}{s} = \frac{1}{r} - \frac{\alpha}{n}.$$

$$b) T_m \text{ es de tipo débil } (L^p, L^s) \text{ si } \frac{1}{p} > \frac{\alpha}{n} \text{ y } \frac{1}{s} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}.$$

$$c) T_m: L^{n/\alpha} \rightarrow BMO \text{ si } \frac{1}{p} < \frac{\alpha}{n}.$$

Necesitaremos algunos lemas previos:

LEMA 3. Si T_m como en el Teorema 4, dado $t > 0$ podemos escribir

$$m = m_t + m^t \text{ donde}$$

$$i) m_t^v \in L^q(\mathbb{R}^n) \text{ para } q > \frac{n}{n-\alpha}, q \geq p' \text{ y } \|m_t^v\|_{L^q} \leq C t^{n-\frac{\alpha}{q}},$$

ii) m^t es un multiplicador en $L^p(\mathbb{R}^n)$ con norma (como operador) acotada por $C t^\alpha$.

Demostración. Sea k_0 tal que $t \in [2^{k_0}, 2^{k_0+1})$. Definimos:

$$m_t = \sum_{k=k_0+1}^{\infty} m \phi_{2^k} \quad ; \quad m^t = \sum_{k=-\infty}^{k_0} m \phi_{2^k}$$

Ahora bien, siendo ϕ una función de Hörmander se tiene

$$\begin{aligned} \phi_{2^k} &= \phi_{2^k} \left(\sum_{i=-\infty}^{\infty} \phi_{2^{k+i}} \right)^2 = \sum_{i,j=-\infty}^{\infty} \phi_{2^k} \phi_{2^{k+i}} \phi_{2^{k+j}} = \\ &= \sum_{i,j=-2}^2 \phi_{2^k} \phi_{2^{k+i}} \phi_{2^{k+j}}. \end{aligned}$$

Por lo tanto si $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{r} - 1$

$$\begin{aligned} \|m_t^v\|_{L^q} &= \left\| \sum_{k=k_0+1}^{\infty} (m \phi_{2^k})^v \right\|_{L^q} \leq \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \sum_{i,j=-2}^2 \| (m \phi_{2^k} \phi_{2^{k+i}} \phi_{2^{k+j}})^v \|_{L^q} \leq \\ &\leq \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \sum_{i,j=-2}^2 \| T_m(\phi_{2^{k+i}}^v) * \phi_{2^k}^v * \phi_{2^{k+j}}^v \|_{L^q} \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \sum_{i,j=-2}^2 \|T_m(\phi_{2^{k+i}}^v) * \phi_{2^k}^v\|_{L^p} \|\phi_{2^{k+j}}^v\|_{L^r} \leq \\ &\leq \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \sum_{i,j=-2}^2 2^{k\alpha} \|\phi_{2^{k+i}}^v\|_{L^p} \|\phi_{2^{k+j}}^v\|_{L^r} \end{aligned}$$

ya que $q \geq p'$ y por dualidad $T_m: L^p(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^p_\alpha(\mathbb{R}^n)$.

Además

$$\begin{aligned} \|\phi_{2^\ell}^v\|_{L^s} &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\phi_{2^\ell}^v(x)|^s dx \right)^{1/s} = \frac{1}{2^{n\ell}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\phi_{2^\ell}^v\left(\frac{x}{2^\ell}\right)|^s dx \right)^{1/s} = \\ &= 2^{-\frac{n\ell}{s'}} \|\phi\|_{L^s}^v = C_s 2^{-\frac{n\ell}{s'}} \end{aligned}$$

De este modo se obtiene

$$\begin{aligned} \|m_t^v\|_{L^q} &\leq C \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \sum_{i,j=-2}^2 2^{k\alpha} 2^{-\frac{n}{p}(k+i)} 2^{-\frac{n}{r}(k+j)} \leq \\ &\leq C \sum_{k=k_0+1}^{\infty} 2^{k(\alpha - \frac{n}{p} - \frac{n}{r})} = C \sum_{k=k_0+1}^{\infty} 2^{k(\alpha - \frac{n}{q})} \end{aligned}$$

Siendo $q > \frac{n}{n-\alpha}$, $\alpha - \frac{n}{q} < 0$ y entonces

$$\|m_t^v\|_{L^q} \leq C 2^{k_0(\alpha - \frac{n}{q})} \leq C t^{\alpha - \frac{n}{q}}$$

lo cual prueba i).

Para demostrar (ii) consideremos $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, entonces

$$\begin{aligned} \|T_m^t f\|_{L^p} &= \left\| \sum_{k=-\infty}^{k_0} (m \phi_{2^k} \hat{f})^v \right\|_{L^p} \leq \sum_{k=-\infty}^{k_0} \|t_m(f) * \phi_{2^k}^v\|_{L^p} \leq \\ &\leq C \sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\alpha} \|f\|_{L^p} \leq C 2^{k_0\alpha} \|f\|_{L^p} \leq C t^\alpha \|f\|_{L^p} \end{aligned}$$

puesto que $\alpha > 0$.

LEMA 4. Sea T_m un operador con multiplicador m tal que $T_m: L^p \longrightarrow L^p_\alpha$ entonces para $r \leq p$, $T_m: L^r \longrightarrow L^r_{\alpha - \frac{n}{r}}$.

Demostración del lema 4. Supongamos $a \in [2^k, 2^{k+1})$, entonces

$$\begin{aligned} \phi_a &= \phi_a \left(\sum_{i=-\infty}^{\infty} \phi_{2^{k+i}} \right)^2 = \sum_{i,j=-\infty}^{\infty} \phi_a \phi_{2^{k+i}} \phi_{2^{k+j}} = \\ &= \sum_{i,j=-2}^3 \phi_a \phi_{2^{k+i}} \phi_{2^{k+j}}. \end{aligned}$$

Sea ahora $f \in L^r(\mathbb{R}^n)$ y q tal que $1 \leq q \leq \infty$ y $\frac{1}{p} = \frac{1}{r} + \frac{1}{q} - 1$.

Entonces se tiene

$$\begin{aligned} \|T_m f * \phi_a^v\|_{L^\infty} &\leq \sum_{i,j=-2}^3 \|T_m f * \phi_a^v * \phi_{2^{k+i}}^v * \phi_{2^{k+j}}^v\|_{L^\infty} \leq \\ &\leq \sum_{i,j=-2}^3 \|T_m(f * \phi_{2^{k+i}}^v) * \phi_a^v\|_{L^p} \|\phi_{2^{k+j}}^v\|_{L^{p'}} \leq \\ &\leq C a^\alpha \sum_{i,j=-2}^3 \|f * \phi_{2^{k+i}}^v\|_{L^p} \|\phi_{2^{k+j}}^v\|_{L^{p'}} \leq \\ &\leq C a^\alpha \sum_{i,j=-2}^3 \|f\|_{L^r} \|\phi_{2^{k+i}}^v\|_{L^q} \|\phi_{2^{k+j}}^v\|_{L^{p'}} \leq \\ &\leq C a^\alpha \|f\|_{L^r} \sum_{i,j=-2}^3 2^{-(k+i)\frac{n}{q}} 2^{-\frac{(k+j)n}{p}} \\ &\leq C a^{\alpha-n(\frac{1}{q}+\frac{1}{p})} \|f\|_{L^r} = C a^{\alpha-\frac{n}{r}} \|f\|_{L^r}. \end{aligned}$$

Demostración del teorema 4. Primero demostraremos que el operador T es tipo débil (L^r, L^s) para r y s tales que

$$p' \leq r \leq p, \quad r < \frac{n}{\alpha} \quad \text{y} \quad \frac{1}{s} = \frac{1}{r} - \frac{\alpha}{n}.$$

Para ello descomponemos el multiplicador m en m_λ y m^λ como en el lema 3) donde λ será elegido convenientemente.

Sea entonces $f \in L^r$,

$$|\{x/|T_m f(x)| \geq t\}| \leq |\{x/|T_{m_\lambda} f(x)| \geq t/2\}| + |\{x/|T_{m^\lambda} f(x)| > t/2\}|$$

Como $r' > \frac{n}{n-\alpha}$ y $r' \geq p$ usando la parte i) del lema 3) obtenemos:

$$|T_{m_\lambda} f(x)| \leq \|m_\lambda^v\|_{L^{r'}} \|f\|_{L^r} \leq C \lambda^{\alpha-\frac{n}{r}} \|f\|_{L^r}$$

Eligiendo entonces $\frac{t}{4} = C \lambda^{\alpha-\frac{n}{r}} \|f\|_{L^r}$ tendremos

$$|\{x/|T_{m_\lambda} f(x)| > \frac{t}{2}\}| = 0.$$

Por la parte ii) del lema 1) sabemos que T_m^λ es un multiplicador acotado de $L^p(\mathbb{R}^n)$ en $L^p(\mathbb{R}^n)$ con norma acotada por $C \lambda^\alpha$, por lo tanto las mismas conclusiones valen para r , si $p' \leq r \leq p$. En particular es tipo débil (L^r, L^r) obteniendo así

$$\begin{aligned} |\{x/ T_m^\alpha f(x) | \geq \frac{t}{2}\}| &\leq \frac{C}{t^r} \lambda^{\alpha r} \|f\|_{L^r}^r = \\ &= \frac{C}{t^r} \left(\frac{t}{\|f\|_{L^r}}\right)^{\alpha - \frac{n}{r}} \|f\|_{L^r}^r = \\ &= C \left(\frac{\|f\|_{L^r}}{t}\right)^{r(1 - \frac{r\alpha}{r\alpha - n})} = C \left(\frac{\|f\|_{L^r}}{t}\right)^s. \end{aligned}$$

Usando ahora el teorema de interpolación de Marcinkiewicz concluimos que

T_m es un operador de tipo fuerte (L^r, L^s) para $\max\{\frac{1}{p}, \frac{\alpha}{n}\} < \frac{1}{r} < \frac{1}{p'}$, $\frac{1}{s} = \frac{1}{r} - \frac{\alpha}{n}$ y que T_m es tipo débil (L^p, L^s) con $\frac{1}{s} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$ si $p < \frac{n}{\alpha}$.

Aplicando un argumento de dualidad a los resultados fuertes se obtiene que $T_m: L^r \rightarrow L^s$ para

$$\frac{1}{p} + \frac{\alpha}{n} < \frac{1}{r} < \min\{\frac{1}{p}, \frac{\alpha}{n}, 1\}$$

Interpolando nuevamente se obtiene el tipo fuerte en el intervalo deseado.

Resta entonces probar que si $\frac{1}{p} < \frac{\alpha}{n}$, $T_m: L^{n/\alpha} \rightarrow BMO$ es decir que $f \in L^{n/\alpha}$, para cada cubo Q existe una constante C_Q tal que

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q |T_m f - C_Q| (x) dx \leq C \|f\|_{n/\alpha}$$

C independiente de Q y de f .

Podemos suponer que $\|f\|_{n/\alpha} = 1$.

Descomponemos ahora $f = f_1 + f_2$ donde

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } |f(x)| \geq \lambda \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

De esta manera $f_i \in L^{r_i}$, $i=1,2$ para $r_1 \leq \frac{n}{\alpha} \leq r_2$.

Eligiendo entonces $C_Q = T_m f_2(x_0)$ donde x_0 es el centro de Q , se obtiene

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q |T_m f - C_Q| (x) dx \leq$$

$$\leq \frac{1}{|Q|} \int_Q |T_m f_1(x)| dx + \frac{1}{|Q|} \int_Q |T_m f_2(x) - T_m f_2(x_0)| dx .$$

Para estimar la primera integral haremos uso de la primera parte de este teorema.

Sea r_1 tal que $\frac{\alpha}{n} < \frac{1}{r_1} < \min \left\{ \frac{\alpha}{n} + \frac{1}{p}, 1 \right\}$. Como en este caso

$\frac{1}{p} < \frac{\alpha}{n}$, por lo ya demostrado T_m es de tipo fuerte (L^{r_1}, L^{s_1}) con

$$\frac{1}{s_1} = \frac{1}{r_1} - \frac{\alpha}{n} .$$

Aplicando Hölder el 1er. sumando se acota por

$$\frac{1}{|Q|^{1/s_1}} \|T_m f_1\|_{s_1} \leq \frac{C}{|Q|^{1/s_1}} \|f_1\|_{L^{r_1}}$$

Ahora bien

$$\|f_1\|_{L^{r_1}} = \lambda \left[\int_{\{x: |f(x)| \geq \lambda\}} \left| \frac{f(x)}{\lambda} \right|^{r_1} \right]^{1/r_1} \leq \lambda \left[\int_{R_n} \left| \frac{f(x)}{\lambda} \right|^{n/\alpha} \right]^{1/r_1} =$$

$$= \lambda^{1 - \frac{n}{\alpha r_1}} \|f\|_{L^{n/\alpha}}^{\frac{n}{\alpha r_1}} = \lambda^{n/\alpha \left(\frac{\alpha}{n} - \frac{1}{r_1} \right)} = \lambda^{-\frac{n}{\alpha s_1}} .$$

Por lo tanto será suficiente elegir λ tal que

$$\lambda^{-\frac{n}{\alpha}} = |Q|$$

Para acotar el segundo sumando elegimos r_2 tal que $\frac{n}{\alpha} < r_2 \leq p$ y de modo que si $\beta = \alpha - \frac{n}{r_2}$ se tenga $0 < \beta < 1$.

Para un tal r_2 sabemos por el lema 2 que

$$T_m : L^{r_2} \rightarrow L^{\infty} \alpha^{-\frac{n}{r_2}} .$$

Ahora bien, $f_2 \in L^{r_2}$ y entonces $T_m f_2 \in L^{\infty} \alpha^{-\frac{n}{r_2}}$.

Usando entonces la caracterización mencionada para los espacios L_p^∞ en el lema 2, se tiene que si llamamos

$$h = \frac{x-x_0}{|x-x_0|} \quad y \quad a = |x-x_0|$$

$$\begin{aligned} |T_m f_2(x) - T_m f_2(x_0)| &= |T_m f_2(x_0 + ah) - T_m f_2(x_0)| \leq \\ &\leq C a^{\alpha - \frac{n}{r_2}} \|T_m f_2\|_{L^{\alpha - \frac{n}{r_2}}} \leq C a^{\alpha - \frac{n}{r_2}} \|f_2\|_{L^{r_2}}. \end{aligned}$$

Pero, como antes,

$$\begin{aligned} \|f_2\|_{L^{r_2}} &= \lambda \left(\int_{\{x/|f(x)| < \lambda\}} \left| \frac{f(x)}{\lambda} \right|^{r_2} \right)^{1/r_2} \leq \lambda \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{f(x)}{\lambda} \right|^{n/\alpha} \right)^{1/r_2} = \\ &= \lambda^{1 - \frac{n}{\alpha r_2}} \|f\|_{L^{n/\alpha}}^{\frac{n}{\alpha r_2}} = \lambda^{1 - \frac{n}{\alpha r_2}} = |Q|^{-\frac{\alpha(1 - \frac{n}{\alpha r_2})}{n}} = |Q|^{\frac{1}{r_2} \frac{\alpha}{n}}. \end{aligned}$$

Con estas estimaciones se obtiene entonces

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q |T_m f_2(x) - T_m f_2(x_0)| dx \leq \frac{C}{|Q|^{1 - \frac{1}{r_2} + \frac{\alpha}{n}}} \int_Q |x-x_0|^{n(\frac{\alpha}{n} - \frac{1}{r_2})} dx \leq C,$$

lo cual completa la demostración del teorema.

El siguiente Teorema, cuya demostración omitimos por ser análoga a la anterior, generaliza los resultados del Teorema 4 al caso en que

$$T_m : L_\alpha^p(\mathbb{R}^n) \rightarrow L_\beta^q(\mathbb{R}^n).$$

TEOREMA 5. Sea T_m un operador multiplicador, $T_m : L_\alpha^p(\mathbb{R}^n) \rightarrow L_\beta^q(\mathbb{R}^n)$, con $q \geq p$ (de otro modo $T_m \equiv 0$). Por el lema 2, podemos suponer que $q' \leq p$ y $q \geq 2$. Entonces si $0 < \frac{\beta-\alpha}{n} < \frac{1}{p'}$, el operador T_m es

a) acotado de $L^r(\mathbb{R}^n)$ en $L^s(\mathbb{R}^n)$ para

$$\max \left\{ \frac{1}{p}, \frac{1}{p} + \frac{\beta-\alpha}{n} - \frac{1}{q} \right\} < \frac{1}{r} < \min \left\{ 1, \frac{1}{q'} + \frac{\beta-\alpha}{n} \right\}$$

$$y \quad \frac{1}{s} = \frac{1}{r} - \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{\beta-\alpha}{n}.$$

b) de tipo débil (L^p, L^s) si $\frac{1}{q} > \frac{\beta-\alpha}{n}$ y $\frac{1}{s} = \frac{1}{q} - \frac{\beta-\alpha}{n}$.

c) acotado de $L^\mu(\mathbb{R}^n)$ en BMO si $\frac{1}{q} < \frac{\beta-\alpha}{n}$ para $\frac{1}{\mu} = \frac{\beta-\alpha}{n} + \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$.

BIBLIOGRAFIA

- [1] HÖRMANDER, L. , *Estimates for translations invariant operators in L^p spaces*. Acta Math., 104 (1960), 93-139.
- [2] RIVIÈRE, N.M. , *Classes of smoothness: The Fourier method, a aprecer*.
- [3] SHAPIRO, H.S. , *A Tauberian theorem related to approximation theory* , Acta Math., 120 (1968), 279-292.
- [4] STEIN, E.M. and ZYGMUND, A. , *Boundedness of translation invariant operators on Hölder and L^p spaces*. Ann. of Math., 85 (1967), 337-349.

Instituto de Desarrollo Tecnológico
para la Industria Química.
Universidad Nacional del Litoral-CONICET.

Recibido en febrero de 1979.