Revista de la
Unión Matemática Argentina
Volumen 29, 1984.

PREFERENCIAS SUBDIFERENCIABLES

J.H.G. Olivera

Dedicado al Profesor Luis A. Santaló

SUMMARY. Under the assumption of monotone and convex preferences, compensated demand correspondences are singled-valued on a dense, full subset of the price domain, and the Slutsky equation holds for a dense, full subset of price variations.

La presente nota, que dedico afectuosa y respetuosamente al profesor doctor Luis A. Santaló, se propone aclarar un aspecto de las correspondencias de demanda que no ha sido dilucidado en la literatura sobre el tema.

Partimos de supuestos normales en la teoría económica del consumo:

HIPOTESIS. *El conjunto de consumo es* $\overline{R}^n_+$. *Las preferencias del consumidor están representadas por un preorden completo y son continuas, convexas y estrictamente monótonas. El ingreso del consumidor y los precios de los* n *bienes son positivos.*

Procedemos del siguiente modo. Tomamos cualquier variedad de indiferencia

$$\{x \in \overline{R}^n_+ \mid U(x) = c\}$$

donde c es un número real. En virtud de la Hipótesis expresada obtenemos una función explícita

$$x_1 = F(x_2,\ldots,x_n) ,$$

que extendemos a todo R^{n-1} atribuyéndole el valor $+\infty$ en los demás puntos.

Elegimos el bien 1 como numerario ($p_1 \equiv 1$) y llamamos q al vector $(p_2,\ldots,p_n)$, donde p_i es el precio del bien i en unidades del bien 1. Las propiedades de F, de su conjugada F* y de sus respectivos mapas subdiferenciales ∂F y ∂F^* se describen en la siguiente proposición.

LEMA. (a) F *es convexa propia y cerrada*;

(b) $-q \in \partial F(x_2,\ldots,x_n)$ *si y solo si* $(x_2,\ldots,x_n) \in \partial F^*(-q)$;

(c) $(x_2,\ldots,x_n) = \partial F^*(-q)$ *si y solo si* F* *es diferenciable en* -q.

Demostración. Resulta inmediatamente de los hechos postulados en la Hipótesis por aplicación de proposiciones de análisis convexo (cf. Rockafellar, [5], Teorema 12.2, Corolario 23.5.1 y Teorema 25.1).

Pasamos ahora a las correspondencias de demanda. Agregamos los siguientes símbolos: I, ingreso del consumidor; φ, correspondencia de demanda individual no compensada; σ, correspondencia de demanda individual compensada.

TEOREMA 1. *Con* x *fija, los vectores de precios en los cuales* $\sigma(p;x)$ *contiene un solo punto forman un subconjunto denso del conjunto de todos los vectores de precios. El complemento de dicho subconjunto es de medida nula.*

Demostración. $\sigma(p;x)$ consta de un único elemento si y solo si la respectiva F^* es diferenciable en $-q$, de acuerdo con el Lema anterior.

De este hecho se desprende lo afirmado por el Teorema, teniendo en cuenta las propiedades generales de diferenciabilidad de funciones convexas propias (v. Rockafellar, [5], Teorema 25.5).

Una manera alternativa de probar el Teorema consiste en deducirlo de la semicontinuidad superior del mapa subgradiente, propiedad estudiada por Moreau [2].

TEOREMA 2. *Los pares* $(p,p+\Delta p)$ *que satisfacen la ecuación de Slutsky constituyen un subconjunto denso del conjunto de todos los pares de vectores de precios. El complemento de dicho subconjunto es de medida nula* (cf. [4]).

Demostración. Dado el ingreso I y los precios iniciales p, sea un incremento Δp. Introducimos un selector arbitrario

$$s\colon \varphi(p,I) \longmapsto s\varphi(p,I) \in \varphi(p,I) \ ,$$

y consideramos la descomposición:

$$\varphi(p+\Delta p,I) - \varphi(p,I) = \varphi(p+\Delta p,I) - \sigma(p+\Delta p,s\varphi(p,I)) + \\ + \sigma(p+\Delta p,s\varphi(p,I)) - \varphi(p,I) \ ,$$

que equivale a la ecuación de Slutsky en la forma de incrementos finitos (Nikaido, [3], capítulo VI; Ellis, [1]).

La descomposición indicada es posible si y solo si $\sigma(p+\Delta p,s\varphi(p,I))$ contiene un único elemento. Basta entonces aplicar el Teorema 1 para concluir la demostración.

BIBLIOGRAFIA

[1] ELLIS,D.F., *A Slutsky Equation for Demand Correspondences*, Econometrica, 44 (1976), 825-828.

[2] MOREAU,J.J., *Semi-continuité du sous-gradient d'une fonctionelle*, Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences (Paris), t.260 (25 de enero de 1965), 1067-1070.

[3] NIKAIDO, H., *Convex Structures and Economic Theory*, Nueva York, Academic Press, 1968.

[4] OLIVERA,J.H.G., *Ecuación de Slutsky para correspondencias de demanda*, Seminario Interno del Centro de Investigaciones Económicas, Instituto Torcuato Di Tella, 13 de julio de 1979.

[5] ROCKAFELLAR,R.T., *Convex Analysis*, Princeton, N.J., Princeton University Press, 1970.

Universidad de Buenos Aires
Argentina.

Recibido en febrero de 1980.