Revista de la
Unión Matemática Argentina
Volumen 30, 1981-82.

TRUNCACIONES DE INTEGRALES SINGULARES POR FAMILIAS DE RECTANGULOS

H.A. Aimar

INTRODUCCION. El objeto del presente trabajo es estudiar la convergencia de las integrales singulares de Calderón y Zygmund, cuando éstas son truncadas por familias de rectángulos.

Resultados en este sentido fueron obtenidos en [2] asumiendo suavidad en el núcleo sobre la esfera unitaria. Aquí sólo se supondrá que la parte par del núcleo pertenece a la clase $L \log^+ L(\Sigma)$ y se probará la acotación en L^p, $1 < p < \infty$, del operador maximal asociado a las truncaciones por rectángulos de lados paralelos a los ejes. (1. y 2.)

En 3. se obtiene la existencia de límite para funciones buenas y en 4. se derivan los correspondientes teoremas sobre convergencia.

En 5. se consideran posibles extensiones al caso en que los rectángulos pueden tener cualquier dirección.

Es interesante destacar que estas técnicas pueden aplicarse a familias de conjuntos simétricos que, en cierto sentido, sean equivalentes a rectángulos, como es el caso de las familias de elipsoides que corresponden a métricas parabólicas.

1. R^n denota el espacio euclideo n-dimensional, Σ es la esfera unitaria de R^n. Sea $K(x)$ un núcleo de Calderón-Zygmund en R^n, $K(x) = \frac{\Omega(x)}{|x|^n}$ con Ω una función homogénea de grado cero, par y perteneciente a la clase $L \log^+ L(\Sigma)$ con la propiedad $\int_\Sigma \Omega(x')dx' = 0$.

Sea F la familia de todos los rectángulos centrados en el origen de R^n con lados paralelos a los ejes. Para R en F se define

$$T_R f(x) = \int_{y \notin R} K(y).f(x-y).dy$$

con f en $L^p(R^n)$ y $1 < p < \infty$.

Que la integral que define $T_R f(x)$ es finita para casi todo x de R^n, se deduce del resultado análogo para la truncación por bolas (Ver [1]).

TEOREMA 1. *Si* $T^*(f)(x) = \sup_{R \in F} |T_R f(x)|$ *es el operador maximal asociado* *a la familia* $\{T_R\}_{R\varepsilon F}$.

Entonces T^* *es de tipo fuerte sobre* L^p *para* $1 < p < \infty$.

Demostración. Para k un número natural entre 1 y n, definir F_k como la familia de rectángulos R centrados en el origen y lados paralelos a los ejes tales que, si los lados de R tienen longitud $a_1,\dots,a_n$, se verifica que $a_k \leqslant a_j \quad \forall j$.

Como $F = \bigcup_{k=1}^{n} F_k$ se tiene $T^*(f)(x) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \sup_{R\varepsilon F_k} |T_R f(x)|$ por lo tanto es suficiente probar que cada uno de los operadores $T_k^*(f)(x) = \sup_{R\varepsilon F_k} |T_R f(x)|$ satisface la tesis.

El núcleo K^j que se obtiene de K intercambiando la primera y j-ésima variables, tiene las mismas propiedades que K, por lo tanto es suficiente probar el resultado para la familia F_1.

Sea R un rectángulo con lado menor 2a en la dirección del eje coordenado x_1 y B(0,a) la bola de centro en 0 y radio a

$$T_R f(x) = \int_{y\notin B(0,a)} K(y).f(x-y)\,dy - \int_{y\varepsilon R-B(0,a)} K(y).f(x-y)dy$$

de donde

$$T_1^*(f)(x) \leqslant T_0^*(f)(x) + \sup_{R\varepsilon F_1} \int_{y\varepsilon R-B(0,a)} |K(y)||f(x-y)|dy \qquad (1)$$

con $T_0^*(f)(x)$ el operador maximal de las truncaciones por bolas de la integral singular, que, bajo las presentes hipótesis para Ω, es de tipo fuerte sobre $L^p(R^n)$ para $1 < p < \infty$ (Ver [1]).

Para el segundo término del miembro derecho de (1) es conveniente usar coordenadas polares en R^n. Θ_1 designará el ángulo entre el radio vector del punto y el eje de la coordenada x_1. Se designará con Θ la parte angular del Jacobiano de esta transformación.

Si para cada k entero no negativo, se considera el conjunto $R_k = \{y \in R^n: |y_1| \leqslant a;\ |y| \leqslant a\, 2^k\}$ es claro que la unión de todos los R_k cubre R y que R_0 es B(0,a).

Con la notación

$$\int_{R-B(0,a)} |K(y)||f(x-y)|dy \leqslant \int_{R_1-B(0,a)} |K(y)||f(x-y)|dy +$$

$$+ \sum_{k=2}^{\infty} \int_{R_k-R_{k-1}} |K(y)||f(x-y)|dy \leqslant$$

$$\leqslant \int_{R_1-B(0,a)} |K(y)||f(x-y)|dy +$$

$$+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{a^n\ 2^{n(k-1)}}\int_{R_k-R_{k-1}}|\Omega(y)||f(x-y)|\ dy \qquad (2)$$

El primer término en el miembro derecho de (2), se acota superiormente por

$$\frac{1}{a^n}\cdot\int_{R_1}|\Omega(y)||f(x-y)|\ dy$$

que a su vez está dominado, salvo factor constante, por

$$\frac{1}{|B(0,2a)|}\int_{B(0,2a)}|\Omega(x)||f(x-y)|\ dy$$

como la función maximal para estos promedios con "peso" $|\Omega(y)|$ es de tipo fuerte sobre L^p (Ver [1]), resta estudiar el segundo término en el miembro derecho de (2).

Observando que $R_k - R_{k-1}$ está incluído en el conjunto

$$\{y\in R^n:\ \frac{\pi}{2}-\text{arc sen}\,\frac{1}{2^{k-1}}<\Theta_1<\frac{\pi}{2}+\text{arc sen}\,\frac{1}{2^{k-1}}\ ,\ a2^{k-1}<\rho\leqslant a2^k\}$$

e introduciendo la notación siguiente

$$y'=\frac{y}{|y|}=(\cos\Theta_1,\ \text{sen}\,\Theta_1\cos\Theta_2,\ \dots\ ,\ \text{sen}\,\Theta_1\dots\text{sen}\,\Theta_{n-1})\ ,$$

$$dy'=\Theta\ d\Theta_{n-1}\dots d\Theta_2\ d\Theta_1\ ,\quad \alpha_x=\frac{\pi}{2}-\text{arc sen}\,\frac{1}{2^{x-1}}\ ,$$

$$\beta_x=\frac{\pi}{2}+\text{arc sen}\,\frac{1}{2^{x-1}}\quad y\quad O_x=\{y'\in\textstyle\sum\ :\ \alpha_x<\Theta_1<\beta_x\}\quad (x\geqslant 1)$$

la k-ésima integral en la serie del miembro derecho de (2) puede mayorarse por

$$\int_{O_k}|\Omega(y')|\int_{a2^{k-1}}^{a2^k}|f(x-\rho y')|.\rho^{n-1}\ d\rho\ dy'\ \leqslant$$

$$\int_{O_k}|\Omega(y')|\ a^{n-1}\ 2^{k(n-1)}\int_0^{a2^k}|f(x-\rho y')|d\rho\ dy'$$

De todo lo anterior, se concluye que

$$\int_{R-R_1}|K(y)||f(x-y)|dy\leqslant 2^n\sum_{k=2}^{\infty}\int_{O_k}|\Omega(y')|(\frac{1}{a2^k}\int_0^{a2^k}|f(x-\rho y')|d\rho)dy' \quad (3)$$

Si $M_{y'}(f)(x)=\sup\limits_{h>0}\frac{1}{h}\int_0^h|f(x-\rho y')|d\rho$ es la función maximal de Hardy-Littlewood en la dirección de y', de (3) se obtiene:

$$\sup_{R\in F_1}\int_{R-R_1}|K(y)||f(x-y)|dy\leqslant C\sum_{k=2}^{\infty}\int_{O_k}|\Omega(y')|M_{y'}(f)(x)dy' \qquad (4)$$

Aplicando la desigualdad de Minkowski para series y para integrales al miembro derecho de (4), y como la función maximal $M_{y'}(f)(x)$ es de tipo fuerte en L^p con constante C_p que no depende de y', resulta:

$$\| \sup_{R\varepsilon F_1} \int_{R-R_1} |K(y)|\,|f(x-y)|\,dy \|_p \leqslant$$

$$\leqslant C \sum_{k=2}^{\infty} \int_{O_k} |\Omega(y')| \; \|M_{y'}(f)(x)\|_p \; dy' \leqslant$$

$$\leqslant C_p \Big(\sum_{k=2}^{\infty} \int_{O_k} |\Omega(y')| \; dy' \Big) . \|f\|_p$$

Para obtener el teorema es, por tanto, suficiente demostrar que la serie $\sum_{k=2}^{\infty} \int_{O_k} |\Omega(y')|dy'$ es convergente.

La función I de la variable real $x \geqslant 1$, que se obtiene integrando $|\Omega|$ sobre la banda esférica O_x es no creciente. De aquí que $I(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} I(x)\,dx$ y en consecuencia:

$$\sum_{k=2}^{\infty} \int_{O_k} |\Omega(y')|dy' \leqslant \sum_{k=2}^{\infty} \int_{k-1}^{k} I(x)dx = \int_{1}^{\infty} I(x)\,dx =$$

$$= \int_{1}^{\infty} \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \int_{0}^{\pi} \cdots \int_{0}^{\pi} \int_{0}^{2\pi} |\Omega(\cos\theta_1,\ldots,\mathrm{sen}\theta_1\ldots\mathrm{sen}\theta_{n-1})|\,|\Theta|\,d\theta_{n-1}\ldots d\theta_1 dx$$

Cambiando el orden de integración en las variables Θ_1 y x, efectuando la integración en esta última y denominando $g(\Theta_1)$ a la integral múltiple interior respecto de las variables angulares $\Theta_2,\ldots,\Theta_{n-1}$ se tiene:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{O_k} |\Omega(y')|dy' \leqslant C \int_{0}^{\pi} g(\Theta_1) \ln \frac{1}{|\mathrm{sen}(\Theta_1 - \frac{\pi}{2})|} d\Theta_1 \leqslant$$

$$\leqslant C \int_{0}^{\pi} g(\Theta_1) \ln \frac{2}{|\Theta_1 - \frac{\pi}{2}|} d\Theta_1 \qquad (5)$$

Para acotar el último miembro de (5), partir la esfera unitaria Σ como unión de los conjuntos

$$A_1 = \{y' \in \Sigma \;/\; |\Omega(y')| \geqslant \Big(\frac{2}{|\Theta_1 - \frac{\pi}{2}|}\Big)^{1/2}\}$$

$$A_2 = \{y' \in \Sigma \;/\; |\Omega(y')| < \Big(\frac{2}{|\Theta_1 - \frac{\pi}{2}|}\Big)^{1/2}\}$$

y volviendo a la definición de g, es

$$\int_{0}^{\pi} g(\Theta_1) \ln \frac{2}{|\Theta_1 - \frac{\pi}{2}|} d\Theta_1 = \int_{\Sigma} |\Omega(y')| \ln \frac{2}{|\Theta_1 - \frac{\pi}{2}|} dy' \leqslant$$

$$\leqslant 2 \int_{A_1} |\Omega(y')| \ln |\Omega(y')| dy' + \int_{A_2} \left(\frac{2}{|\Theta_1 - \frac{\pi}{2}|}\right)^{1/2} \ln \frac{2}{|\Theta_1 - \frac{\pi}{2}|} dy'$$

donde las dos últimas integrales son finitas.

2. Si ahora el núcleo $K(x)$ es tal que su restricción a la esfera unitaria Ω está en la clase $L^1(\Sigma)$ y es impar. Y si F denota la familia de todos los rectángulos centrados en el origen (o aún familias de conjuntos más generales con simetría respecto del origen), adaptando, con ligeras modificaciones, el método de las rotaciones de [1] , se obtiene que:

$$T^*(f)(x) = \sup_{R\varepsilon F} \left| \int_{y \notin R} K(y).f(x-y)dy \right|$$

es de tipo fuerte sobre L^p para $1 < p < \infty$.

3. Se probará en esta sección, que las familias monoparamétricas de rectángulos introducidas en [2], para las cuales existe el límite de las truncaciones, puntual y en $L^p(R^n)$ y para funciones de $C_0^1(R^n)$, siguen teniendo esta propiedad aún con las condiciones débiles sobre K. Se supone, entonces, que K satisface las propiedades de la sección 1. y que F es una familia a un parámetro $(t > 0)$ de rectángulos del tipo:

$$R_t = \{y \in R^n : |Y_i| < t \ ; \ |Y_j| < \phi_j(t) \quad j \neq i\}$$

donde i es un índice fijo y $\phi_j : R^+ \longrightarrow R^+$ son funciones con las propiedades $\lim_{t\to 0^+} \phi_j(t) = 0$; $\phi_j(t) \geqslant t$ y $\frac{\phi_j(t)}{t}$ tiene límite (posiblemente infinito) para $t \longrightarrow 0^+$. Suponiendo que $i=1$, que $f \in C_0^1(R^n)$ y denotando por Q_t el cubo de arista t con centro en el origen y lados paralelos a los ejes, la truncación de la integral singular por el rectángulo R_t valuada en el punto x, puede escribirse así:

$$\int_{Q_1-R_t} K(y)[f(x-y)-f(x)]dy + \int_{y\notin Q_1} K(y)f(x-y)dy + f(x) \int_{Q_1-R_t} K(y)\, dy$$

La convergencia del primer término se obtiene de la manera habitual (ver [2]). El segundo sumando está en $L^p(R^n)$, pues, es una truncación de la integral singular para $f \in L^p(R^n)$.

Observando que $\int_{Q_1-R_t} K(y)dy = \int_{Q_1-Q_t} K(y)dy - \int_{R_t-Q_t} K(y)dy$ y que

$\int_{Q_1-Q_t} K(y)dy = 0$, se concluye que es necesario y suficiente que exista y sea finito el límite $\lim_{t\to 0^+}\int_{R_t-Q_t} K(y)dy$, para que exista límite puntual y en $L^p(R^n)$ de las truncaciones por la familia F, aplicadas a $f \in C_0^1(R^n)$.

Si P denota el conjunto de las partes no vacías de $\{2,3,\ldots,n\}$, es

$$\int_{R_t-Q_t} K(y)dy = \sum_{J\varepsilon P} \int_{|y_1|<t} \{\int_{A_J(t)} K(y)dy_2 \ldots dy_n\}\, dy_1 \qquad (6)$$

donde $A_J(t) = \{(y_2,\ldots,y_n) \;/\; t < |y_j| < \phi_j(t) \text{ si } j \in J \;;\; |y_j| < t \text{ si } j \notin J\}$

Por un cambio de variables, el segundo miembro puede llevarse a la forma:

$$\sum_{J\varepsilon P} \int_0^1 \frac{1}{u} \{\int_{B_J(t,u)} [K(1,V_2,\ldots,V_n) + K(-1,V_2,\ldots,V_n)]\, dV_2,\ldots,dV_n\} du \quad (7)$$

con $B_J(t,u) = \{(V_2,\ldots,V_n) \;/\; \frac{1}{u} < |V_j| < \frac{\phi_j(t)}{t} \cdot \frac{1}{u}$ si $j \in J$; $|V_j| < \frac{1}{u}$ si $j \notin J\}$.

Como por hipótesis el límite de $\frac{\phi_j(t)}{t}$ existe, es suficiente probar la finitud de

$$\int_0^1 \frac{1}{u} \{\int_{\sqrt{V_2^2+\ldots+V_n^2} > \frac{1}{u}} |K(1,V_2,\ldots,V_n) + K(-1,V_2,\ldots,V_n)|\, dV_2 \ldots dV_n\} du \quad (8)$$

que acota a cada sumando de (7).

Se introducen coordenadas polares en R^{n-1} o, más geométricamente, en el hiperplano $H = \{(1,V_2,\ldots,V_n):(V_2,\ldots,V_n) \in R^{n-1}\}$, llamando $\theta_2,\ldots,\theta_{n-1}$ a los ángulos polares, Δ a su dominio de variación y $r^2 = V_2^2 + \ldots + V_n^2$. Θ' denota la parte angular del Jacobiano de este cambio de coordenadas. Θ, θ_1 y ρ significan lo que en el teorema 1.

La integral (8) está mayorada por la suma de las integrales

$$I_i = \int_0^1 \int_{\frac{1}{u}}^{\infty} \int_{\Delta} \frac{|\Omega((-1)^i, r\cos\theta_2, r\operatorname{sen}\theta_2\cos\theta_3,\ldots, r\operatorname{sen}\theta_2\ldots\operatorname{sen}\theta_{n-1})|}{1+r^2} \cdot$$

$$\cdot|\Theta'|\, d\theta_{n-1}\ldots d\theta_2 dr\}\, du \;;\; i = 1,2. \qquad (9)$$

Invirtiendo el orden en las integrales respecto de u y de r, efectuando la integración respecto de u, e invirtiendo nuevamente el orden entre r y las variables angulares, se obtiene

$$I_i = \int_\Delta \int_1^\infty \frac{|\Omega((-1)^i, r\cos\theta_2, r\,\mathrm{sen}\theta_2\cos\theta_3,\dots, r\,\mathrm{sen}\theta_2\dots\mathrm{sen}\theta_{n-1})|}{1+r^2}\,.$$

$$.\ln r\, dr|\Theta'|d\theta_{n-1}\dots d\theta_2 \quad ; \quad i = 1,2.$$

Para I_2, es natural el cambio de variables $r = tg\theta_1$ y por la homogeneidad de Ω está mayorado por

$$\int_\Delta \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} |\Omega(\cos\theta_1, \mathrm{sen}\theta_1\cos\theta_2,\dots,\mathrm{sen}\theta_1\dots\mathrm{sen}\theta_{n-1})| \ln \frac{1}{\cos\theta_1}\ |\Theta'|\ d\theta_1 \dots$$

$$\dots d\theta_{n-1} \leq C(n) \int_\Delta \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} |\Omega(\cos\theta_1,\dots,\mathrm{sen}\theta_1\dots\mathrm{sen}\theta_{n-1})| \ln \frac{1}{\cos\theta_1} |\Theta| d\theta_1\dots d\theta_{n-1}$$

cuya finitud se comprueba de manera análoga a la de (5).

Para I_1 puede procederse de un modo similar.

OBSERVACION 1. Si K está en las hipótesis de 2. es claro que $\int_{Q_1 - R_t} K(y)dy = 0$, luego también en este caso existe límite puntual y en $L^p(R^n)$ de las truncaciones aplicadas a $f \in C_0^1(R^n)$.

4. Los resultados 1., 2. y 3. conducen, procediendo del modo habitual al teorema de convergencia puntual y en $L^p(R^n)$:

TEOREMA 2. *Sea* K *un núcleo tal que la parte par de* Ω *está en la clase* $L \log^+ L(\Sigma)$ *y tiene media nula, y su parte impar es integrable sobre* Σ. $F = \{R_t\}_{t>0}$ *como en* 3.

Entonces

a) $\lim_{t\to 0^+} T_{R_t} f(x)$ *existe para casi todo* x *y para* $f \in L^p(R^n)$ *con* $1<p<\infty$.

b) $\lim_{t\to 0^+} T_{R_t} f$ *existe en el sentido de* $L^p(R^n)$ *para* $f \in L^p(R^n)$ *con* $1<p<\infty$.

5. Cuando se trunca la integral singular por la familia $\tilde{F}$ de todos los rectángulos con centro en el origen, puede obtenerse un análogo del teorema 1 si se exige que $\Omega \in L^r(\Sigma)$ para algún $r > 1$.

TEOREMA 3. *Si* $\Omega \in L^r(\Sigma)$ *para algún* $r > 1$, *tiene media nula y es par.*

Entonces:

$\tilde{T}(f)(x) = \sup_{R\in\tilde{F}} |T_R f(x)|$ *es de tipo fuerte sobre* $L^p(R^n)$ *con* $1 < p < \infty$.

Demostración. Dado $R \in \tilde{F}$, sea ρ_R una rotación de R^n que lleva R a un rectángulo R' de lados paralelos a los ejes y con el lado de longitud mínima 2a en la dirección de x_1.

Con esta notación $T_R f(x) = \int_{y\notin R'} K(\rho_R^{-1}\, y) f(x-\rho_R^{-1} y)\,dy$

Procediendo como en el teorema 1, se advierte que sólo requiere un tratamiento diferente el término general de la serie

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{a^n 2^{(k-1)n}} \int_{R'_k - R'_{k-1}} |\Omega(\rho_R^{-1} y)|\,|f(x-\rho_R^{-1} y)|\,dy$$

Con tal objeto, se consideran los operadores

$$L_k^*(f)(x) = \sup_{R\in\tilde{F}} \frac{1}{a^n 2^{(k-1)n}} \int_{R'_k - R'_{k-1}} |\Omega(\rho_R^{-1} y)|\,|f(x-\rho_R^{-1} y)|\,dy$$

que están mayorados salvo factor constante por

$$\sup_{R\in\tilde{F}} \int_{0_k} |\Omega(\rho_R^{-1} y')|\, M_{\rho_R^{-1} y'}(f)(x)\,dy'$$

usando esta acotación y la desigualdad de Hölder, para $f \in L^{\infty}(R^n)$ se tiene $\|L_k^* f\|_{\infty} \leqslant C\, \|\Omega\|_r \dfrac{1}{2^{k\frac{1}{r'}}} \|f\|_{\infty}$ donde r' es tal que $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$.

Dado p tal que $1 < p < \infty$, se elige q con $1 < q < p$. Sea $f \in L^q(R^n)$.
Es claro que

$$L_k(f)(x) \leqslant C. \sup_{a>0} \frac{1}{|B(0,a2^k)|} \int_{B(0,a2^k)} |\Omega(y)|\,|f(x-y)|\,dy$$

luego

$\|L_k^* f\|_q \leqslant C\, \|f\|_q$ para alguna constante $C > 0$ independiente de k.

La norma L^p de estos operadores puede acotarse, entonces, por el teorema de Marcinkiewicz:

$$\|L_k^* f\|_p \leqslant K \frac{1}{2^{k\frac{1}{r'}(1-\frac{q}{p})}} \cdot \|f\|_p$$

el resultado sigue de la convergencia de la serie $\displaystyle\sum_k \frac{1}{2^{k\frac{1}{r'}(1-\frac{q}{p})}}$.

OBSERVACION 2. Con el método del teorema 3 pueden obtenerse resultados, que son parciales en cuanto al rango de variación de p, pero con condiciones más débiles sobre Ω. Por ejemplo, si $\Omega \in L(\log^+ L)^{\alpha}\,(\Sigma)$ para algún $\alpha > 1$, la serie es convergente para $p > \frac{1}{1-\frac{1}{\alpha}}$ y por lo tanto el resultado se obtiene sólo para estos valores de p.

OBSERVACION 3. El teorema 3 permite obtener resultados de convergencia puntual para familias de rectángulos del tipo $R_t = \rho_t(R'_t)$, donde R'_t son rectángulos como los de 3. y ρ_t son rotaciones de R^n que, cuando $t \to 0^+$, tienden a una rotación fija ρ.

En cuanto a la convergencia en norma p, es claro que se obtiene aún en el caso general $\Omega \in L \log^+ L(\Sigma)$.

OBSERVACION 4. Las mismas técnicas se aplican si en lugar de rectángulos se tienen otros conjuntos simétricos, con la propiedad de contener una bola y estar contenidos en una banda de ancho equivalente al diámetro de dicha bola. Así, podrían elegirse las familias de elipsoides correspondientes a métricas parabólicas y obtener también convergencia de las integrales singulares elípticas consideradas aquí.

BIBLIOGRAFIA

[1] CALDERON,A.P., *On Singular Integrals*, American Journal of Mathematics. V. 78 (1956) 289-309.

[2] HARBOURE,E.O., *Multipliers and Pointwise Convergence*, Tesis Universidad de Minnesota (1978).

Instituto de Desarrollo Tecnológico
para la Industria Química.
Universidad Nacional del Litoral
CONICET.

Recibido en noviembre de 1980.