Revista de la
Unión Matemática Argentina
Volumen 30, 1981-82.

DENSIDAD DE PARES DE ELEMENTOS EN $P_3(C)$

Graciela S. Birman

RESUMEN. En $P_3(C)$ con la geometría hermitiana elíptica, se obtienen las densidades invariantes respecto del grupo hermitiano, de pares de subespacios lineales, pares de cadenas normales y pares entre cadenas normales y subespacios lineales.

1. INTRODUCCION.

Sea K_n un fibrado de n-esferas sobre $P_n(C)$ y en él cadenas normales n-dimensionales y r-dimensionales definidas originalmente por Blaschke, [1], en espacios hermitianos elípticos.

De [1] y [5] es bien conocida la densidad invariante de estas cadenas normales y subespacios lineales.

El objetivo de esta nota es generalizar a $P_3(C)$ el trabajo de H.Rohde, [4], de densidad de pares de subespacios lineales, de pares de cadenas normales y de pares entre cadenas normales y subespacios lineales.

La notación será: A(B) = A en el elemento B fijo, A[B] = A que pasa por B fijo; Ejemplos: P(E), G[P] serán punto P en el plano E fijo, recta G que pasa por P fijo, respectivamente.

2. DEFINICIONES.

Sea $P_n(C)$ el espacio proyectivo complejo de dimensión n con la geometría hermitiana elíptica, donde si $x = (x_0,\dots,x_n)$ e $y = (y_0,\dots,y_n)$ se define

$$(x,y) = \sum_{j=0}^{n} x_j.\overline{y}_j \qquad \text{siendo } \overline{y} \text{ complejo conjugado de } y.$$

La distancia d entre dos puntos x,y se define

$$\cos\frac{d}{2} = |(x,y)|$$

y el elemento de arco

$$ds^2 = 4\,\{(dx,dx) - (dx,x)(x,dx)\}.$$

Sobre $P_n(C)$ consideremos la variedad $F(C^{n+1})$ de las referencias ortonormales $(z^0,\dots,z^n)$, [3], es decir, que satisfacen $(z^j,z^k) = \delta_{jk}$ e indiquemos por π_1 la proyección

$$\begin{aligned} \pi_1 : F(C^{n+1}) &\longrightarrow P_n(C) \\ (z^0,\dots,z^n) &\longrightarrow z^0 \end{aligned}$$

Sobre $F(C^{n+1})$ valen las ecuaciones de estructura

$$(1) \qquad \begin{cases} dz^j = \sum_{k=0}^{n} w_{jk}\, z^k & \qquad w_{jk} + \overline{w}_{kj} = 0 \\ \\ dw_{jk} = \sum_{h=0}^{n} w_{jh}\, w_{hk} \end{cases}$$

donde w_{jk} son formas diferenciales lineales complejas en $P_n(C)$.

Sea, ahora, K_n un fibrado de n-esferas sobre la variedad $F(C^{n+1})$, es decir,

$$\begin{aligned} \pi_2 : K_n &\longrightarrow F(C^{n+1}) \\ C_n[z^0] &\longrightarrow (z^0,\dots,z^n) \end{aligned}$$

donde $C_n[z^0] = \sum_{j=0}^{n} a_j\, z^j \;,\; \sum_{j=0}^{n} a_j^2 = 1 \;,\; a_j \in R \;,\; (z^0,\dots,z^n) = \pi_1^{-1}(z^0)$

o sea, la fibra es el conjunto de n-esferas que pasan por z^0.

Recalcamos: $C_n[z^0]$ = es una esfera respecto de la referencia $(z^0,\dots,z^n)$; variando $(z^0,\dots,z^n)$ en la fibra $\pi_1^{-1}(z^0)$, es el conjunto de esferas que pasan por el punto fijo z^0.

DEFINICION 1. Llamamos cadena n-dimensional C_n a una sección del fibrado

$$\pi_1 \circ \pi_2 : K_n \longrightarrow P_n(C)$$

es decir al conjunto de puntos

$\sum_{j=0}^{n} a_j\, z^j \;,\; \sum_{j=0}^{n} a_j^2 = 1 \;,\; a_j \in R$ y $(z^0,\dots,z^n)$ referencia ortonormal fija.

DEFINICION 2. Si en la definición 1, $a_{r+1} = \dots = a_n = 0$ se obtiene una cadena normal r-dimensional C_r^n en $P_n(C)$.

3. DENSIDADES.

De las ecuaciones de estructura (1) se tiene que

$$w_{jk} = (dz^j, z^k) = \sum_{h=0}^{n} dz_h^j \, \bar{z}_h^k \tag{2}$$

$$w_{jk} = \alpha_{jk} + i\, \beta_{jk}$$

Si llamamos L_r a un subespacio lineal de dimensión r, es bien sabido de [5], que su densidad en $P_n(C)$ es

$$dL_r = \bigwedge_{\substack{0 \le j \le r \\ r+1 \le k \le n}} w_{jk} \wedge \bar{w}_{jk} \tag{3}$$

En [1] se estableció que la densidad para cadenas normales n-dimensionales en $P_n(C)$ es

$$dC_n = \bigwedge_{0 \le j < k \le n} \beta_{jk} \bigwedge_{h=1}^{n} \beta_{hh} \tag{4}$$

y que la densidad para cadenas normales r-dimensionales en $P_n(C)$ es

$$dC_r^n = dC_r^r \wedge dL_r^n \tag{5}$$

donde el subíndice, como antes, indica la dimensión del elemento considerado y el superíndice la dimensión del espacio al cual es referido.

4. DENSIDAD DE PARES DE ELEMENTOS EN $P_3(C)$

a) *Subespacios lineales.*

1) *Par de puntos.*

Sean P_1 y P_2 dos puntos dados. Supongámoslos referidos a las referencias (x^0,x^1,x^2,x^3) e (y^0,y^1,y^2,y^3) respectivamente, con $(x^k,x^j) = \delta_{kj}$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer $P_1 = x^0$, $P_2 = y^0$; x^0,x^1,y^0,y^1 colineales, $x^2 = y^2$, $x^3 = y^3$.

Así, de (3), para n=3 se obtiene, salvo un factor constante,

$$\begin{aligned} dP_1 \wedge dP_2 = {} & (dx^0,x^1) \wedge (dx^0,x^2) \wedge (dx^0,x^3) \wedge (x^1,dx^0) \wedge (x^2,dx^0) \wedge \\ & \wedge (x^3,dx^0) \wedge (dy^0,y^1) \wedge (dy^0,y^2) \wedge (dy^0,y^3) \wedge (y^1,dy^0) \wedge (y^2,dy^0) \wedge (y^3,dy^0) \end{aligned} \tag{6}$$

Teniendo en cuenta la linealidad mencionada hacemos

$$y^0 = \lambda\, x^1 + \mu\, x^0 \quad , \quad \text{de donde}$$

$$(dy^0,x^2) = \lambda\, (dx^1,x^2) + \mu\, (dx^0,x^2)$$

$$(dy^0,x^3) = \lambda\, (dx^1,x^3) + \mu\, (dx^0,x^3)$$

Sea $r = \text{dist}\,(P_1,P_2) = \text{dist}(x^0,y^0)$ entonces $\lambda\bar{\lambda} = 1 - \mu\bar{\mu} = \text{sen}^2 \frac{r}{2}$ reemplazando en (6) y llamando G a la recta que pasa por P_1, P_2

(7) $$dP_1 \wedge dP_2 = \operatorname{sen}^4 \frac{r}{2}\, dG \wedge dP_1(G) \wedge dP_2(G).$$

2) *Punto y recta.*

Sean respectivamente, P y G punto y recta dados. Llamemos E al plano que ellos determinan y Q al polo de dicho plano. Como antes $P = x^0$ y consideremos las referencias ortonormales (x^0,x^1,x^2,x^3), (y^0,y^1,y^2,y^3) donde, sin pérdida de generalidad, $x^2 = y^2 = Q$, $x^1 = y^1$ y los puntos y^0, y^1 en G.

De (3)

$dP = (dx^0,x^1) \wedge (dx^0,x^2) \wedge (dx^0,x^3) \wedge (x^1,dx^0) \wedge (x^2,dx^0) \wedge (x^3,dx^0)$ y

$dG = (dy^0,y^2) \wedge (dy^0,y^3) \wedge (y^2,dy^0) \wedge (y^3,dy^0) \wedge (dy^1,y^2) \wedge (dy^1,y^3) \wedge (y^2,dy^1) \wedge (y^3,dy^1)$

Como en 1) por la colinealidad

$P = \lambda\, y^0 + \mu\, y^3$, si $r = \operatorname{dist}(P,y^0)$ se obtiene $\mu\bar{\mu} = \operatorname{sen}^2 \frac{r}{2}$

De Rohde [4], y (3), salvo un factor constante, queda

$$dP \wedge dG = \mu\bar{\mu}\, dE \wedge dG(E) \wedge dP(E)\ ,\ \text{equivalentemente},$$

(8) $$dP \wedge dG = \operatorname{sen}^2 \frac{r}{2}\, dE \wedge dG(E) \wedge dP(E).$$

3) *Punto y plano.*

Sean P y E punto y plano dados, respectivamente; llamemos Q al polo de E y H al pie de la normal G a E por P.

Entonces P, H, Q son colineales. Tomemos como referencias ortonormales (P,H,x^2,x^3) y (Q,h,y^2,y^3) con y^2,y^3,x^2,x^3 colineales.

Para ser consecuentes con la notación anterior llamaremos $P = x^0$, $H = x^1$, $Q = y^0$, $d = \operatorname{dist}(Q,H)$.

Ahora,

$$dP(G) = (dx^1,x^0) \wedge (x^0,dx^1)$$
$$dH(G) = (dx^1,y^0) \wedge (y^0,dx^1)$$

$$dP \wedge dE = (dx^0,x^1) \wedge (x^1,dx^0) \wedge (dx^0,x^2) \wedge (x^2,dx^0) \wedge (dx^0,x^3) \wedge (x^3,dx^0) \wedge$$
$$\wedge (y^0,dx^1) \wedge (dx^1,y^0) \wedge (dx^2,y^0) \wedge (y^0,dx^2) \wedge (y^0,dx^3)$$

Tomando $y^0 = \lambda\, x^0 + \mu\, x^1$, $\mu\bar{\mu} = \cos^2 \frac{d}{2}$

reemplazando queda

$$dP \wedge dE = (\mu\bar{\mu})^2\, dP(G) \wedge dH(G) \wedge (dx^0,x^2) \wedge (x^2,dx^0) \wedge (dx^0,x^3) \wedge (x^3,dx^0) \wedge$$
$$\wedge (dx^2,x^1) \wedge (x^1,dx^2) \wedge (dx^3,x^1) \wedge (x^1,dx^3).$$

De (3) obtenemos

(9) $$dP \wedge dE = \cos^4 \frac{d}{2}\, dP(G) \wedge dH(G) \wedge dG.$$

4) *Par de rectas.*

Sean G_1, y G_2 las rectas dadas, llamemos N a la recta normal a G_1 y G_2 en P y Q respectivamente; E_1 el plano determinado por G_1 y Q ; E_2 el plano determinado por G_2 y P. Tomemos las referencias ortonormales (P,x^1,x^2,x^3) y (Q,y^1,y^2,y^3).

A partir de la noción de polaridad se obtiene que x^3,y^3,x^1,y^1 son colineales. De (3),

$$dG_1 = (dP,x^2)\wedge(x^2,dP)\wedge(dP,x^3)\wedge(x^3,dP)\wedge(dx^1,x^2)\wedge(dx^1,x^3)\wedge(x^2,dx^1)\wedge(x^3,dx^1)$$

$$dG_2 = (dQ,y^2)\wedge(y^2,dQ)\wedge(dQ,y^3)\wedge(y^3,dQ)\wedge(dy^1,y^2)\wedge(y^2,dy^1)\wedge(dy^1,y^3)\wedge(y^3,dy^1)$$

Es conveniente tener presente la expresión de dN y por colinealidad

$$x^1 = ay^3 + by^2 \quad , \quad x^2 = \lambda y^2 + \mu Q$$

$$P = ry^2 + sQ \quad , \quad x^3 = \alpha y^3 + \beta y^1$$

Considerando sólo los factores que intervendrán en $dG_1 \wedge dG_2$ se tiene

$$(dx^1,x^2)\wedge(x^2,dx^1)\wedge(dP,x^3)\wedge(x^3,dP) = (\lambda\bar{\lambda}a\bar{a}\beta\bar{\beta}s\bar{s} - \mu\bar{\mu}b\bar{b}\alpha\bar{\alpha}r\bar{r})(dy^3,y^2)\wedge$$
$$\wedge(y^2,dy^3)\wedge(dQ,y^1)\wedge(y^1,dQ)$$

Reemplazando con estos datos, salvo signo,

$$dG_1\wedge dG_2 = (\lambda\bar{\lambda}a\bar{a}\beta\bar{\beta}s\bar{s} - \mu\bar{\mu}b\bar{b}\alpha\bar{\alpha}r\bar{r})dP(N)\wedge dQ(N)\wedge dN\wedge dG_1[P]\wedge dG_2[Q]$$

donde $dG_1[P]$ es la densidad de las rectas G_1 que pasan por P fijo, análogamente, $dG_2[Q]$.

Llamando d: dist(P,Q) y θ: ángulo de los planos E_1 , E_2 se obtiene

$$a\bar{a} = \operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2} \quad , \quad \beta\bar{\beta} = \operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2} \quad , \quad \alpha\bar{\alpha} = \cos^2\frac{\theta}{2} \quad , \quad s\bar{s} = \cos^2\frac{d}{2}$$

$$\lambda\bar{\lambda} = \cos^2\frac{d}{2} \quad , \quad r\bar{r} = \operatorname{sen}^2\frac{d}{2} \quad , \quad b\bar{b} = \cos^2\frac{\theta}{2} \quad , \quad \mu\bar{\mu} = \operatorname{sen}^2\frac{d}{2}\,.$$

Ahora, reemplazando queda

$$(10)\qquad dG_1\wedge dG_2 = (\cos^4\frac{d}{2}\operatorname{sen}^4\frac{\theta}{2} - \operatorname{sen}^4\frac{d}{2}\cos^4\frac{\theta}{2})\, dP(N)\wedge dQ(N)\wedge dN\wedge$$
$$\wedge\, dG_1[P]\wedge dG_2[Q]\,.$$

5) *Recta y plano.*

El resultado deberá ser dual del caso 2).

Si G y E son la recta y plano dados, P el polo de dicho plano y se toma la perpendicular a G porP, sea T el pie de dicha perpendicular.

Llamando d: dist(T,P) se obtiene

$$(11)\qquad dG\wedge dE = \cos^2\frac{d}{2}\, dG[R]\wedge dE[R]\wedge dR$$

donde R: $G\cap E$.

6) *Par de planos.*

Al igual que en los casos anteriores puede obtenerse la expresión de densidad de par de planos eligiendo convenientemente las referencias ortonormales a que están referidos.

Pero este resultado debe ser dual de par de puntos, de donde, si E_1 y E_2 son los planos dados y P_1 y P_2 los polos de dichos planos y G la recta de intersección de E_1 y E_2, $r = \text{dist}(P_1,P_2)$ se obtiene:

(12) $$dE_1 \wedge dE_2 = \text{sen}^2 \frac{r}{2}\, dG \wedge dE_1[G] \wedge dE_2[G]$$

donde $dE_k[G]$ es la densidad de E_k que pasa por G fija, según [2].

b) *Cadenas normales.*

1) *Par de 1-cadenas.*

Sean las 1-cadenas normales C_1 y $C_1^{\#}$ respecto de las referencias (x^0,x^1,x^2,x^3) , (y^0,y^1,y^2,y^3) respectivamente. Siempre pueden elegirse de modo que x^0,x^3,y^2,y^3 al igual que y^1,y^2,x^1,x^2 sean colineales, como en pares de rectas. Llamando G a la recta que pasa por x^0,x^1, $G^{\#}$ a la que pasa por y^0,y^1 , de (5) y (10) queda, según la notación de a) 4)

(13) $$dC_1 \wedge dC_1^{\#} = \left(\cos^4 \frac{d}{2}\, \text{sen}^4 \frac{\theta}{2} - \cos^4 \frac{\theta}{2}\, \text{sen}^4 \frac{d}{2}\right) dC_1(G) \wedge dC_1^{\#}(G^{\#}) \wedge$$
$$\wedge\, dP(N) \wedge dQ(N) \wedge dN \wedge dE_1[N] \wedge dE_2[N].$$

2) *Cadena unidimensional y bidimensional.*

Sean, ahora, C_1 y C_2 las cadenas normales referidas a los tetraedros $(x^0,x^1,x^2.x^3)$, (x^0,x^1,y^0,y^1) donde x^2,y^0,x^3,y^1 son colineales.

De (5) vemos que ahora aparecerán densidad de rectas y densidad de planos en donde se determinan C_1 y C_2 respectivamente.

Luego de (5) y (11), con la notación del caso a) 5) queda

(14) $$dC_1 \wedge dC_2 = \cos^2 \frac{d}{2}\, dG[x^2] \wedge dE[x^2] \wedge dx^2 \wedge dC_1(G) \wedge dC_2(E)$$

3) *Par de 2-cadenas normales.*

Sean C_2, $C_2^{\#}$ dos cadenas normales bidimensionales, de (5) y [4] se tiene

$$dC_2 \wedge dC_2^{\#} = dC_2(E) \wedge dE \wedge dC_2^{\#}(E^{\#}) \wedge dE^{\#}$$

con la notación de a) 6) y (12)

(15) $$dC_2 \wedge dC_2^{\#} = \text{sen}^4 \frac{r}{2}\, dG \wedge dE[G] \wedge dE^{\#}[G] \wedge dC_2(E) \wedge dC_2(E^{\#}).$$

c) *Subespacios lineales y cadenas normales.*

1) *Punto y cadena normal unidimensional.*

De (5) y (8), con la notación de a) 2)

$$(16) \qquad dP \wedge dC_1 = \operatorname{sen}^2 \frac{r}{2}\, dE \wedge dG(E) \wedge dP(E) \wedge dC_1(G).$$

2) *Punto y cadena normal bidimensional.*

Nuevamente, de (5) y (9) con la notación de a) 3)

$$(17) \qquad dP \wedge dC_2 = \cos^2 \frac{d}{2}\, dP(G) \wedge dH(G) \wedge dG \wedge dC_2(E).$$

3) *Recta y cadena normal unidimensional.*

Según (5) y par de rectas, con la notación de este caso queda

$$(18) \qquad dG \wedge dC_1 = (\cos^4 \frac{d}{2} \operatorname{sen}^4 \frac{\theta}{2} - \cos^4 \frac{\theta}{2} \operatorname{sen}^4 \frac{d}{2})\, dP(N) \wedge dQ(N) \wedge dN$$

$$dG[P] \wedge dG[Q] \wedge dC_1(G).$$

4) *Recta y 2-cadena normal.*

De (5) y (11) con la notación de a) 5)

$$(19) \qquad dG \wedge dC_2 = \cos^2 \frac{d}{2}\, dE[R] \wedge dG[R] \wedge dR \wedge dC_2(E).$$

5) *Plano y 1-cadena normal.*

Como en los casos anteriores, de (5) y (11) con la notación de a) 5) queda

$$(20) \qquad dE \wedge dC_1 = \cos^2 \frac{d}{2}\, dE[R] \wedge dG[R] \wedge dR \wedge dC_1[G]$$

Finalmente,

6) *Plano y 2-cadena normal.*

De (5) y par de planos, con la notación de a) 6) y [4], se obtiene

$$(21) \qquad dE \wedge dC_2 = \operatorname{sen}^4 \frac{r}{2}\, dG \wedge dE[G] \wedge dE^{\#}[G] \wedge dC_2(E^{\#}).$$

AGRADECIMIENTOS. Este trabajo es parte de mi Tesis doctoral realizada en la Universidad de Buenos Aires, bajo la dirección del Dr. Luis A. Santaló, a quien deseo expresar mi más profundo agradecimiento.

BIBLIOGRAFIA

[1] BLASCHKE, W., *Densità negli spazi di Hermite*, Rendiconti dell'Accademie dei Lincei, vol.29, 105-108, 1939.

[2] BIRMAN, G., *Comunicación "Sobre densidad de pares de elementos"*, XXVIII Reunión Anual de la Unión Matemática Argentina.

[3] GRIFFITHS, P., *Complex differential and integral geometry and curvature integrals associated to singularities of complex analytic varieties*, Duke Math. Journal, vol.45, N°3, 1978.

[4] ROHDE, H., *Unitäre Integralgeometrie*, Hamburg Abhandlungen, 13, 295-318, 1940.

[5] SANTALO, L.A., *Integral geometry in Hermitian spaces*, American J. Math., vol.74.N°2, 1952.

Universidad de Buenos Aires
Argentina.

Recibido en diciembre de 1980.