Revista de la
Unión Matemática Argentina
Volumen 30, 1981-82.

ELEMENTOS ALGEBRAICOS EN ALGEBRAS TOPOLOGICAS

Gustavo Corach (*)

ABSTRACT. In this note we study algebraic and analytic equations in commutative topological algebras. We present a generalization of a theorem of Shilov concerning idempotents in Banach algebras and, in the same order of ideas, we obtain some results relating different objects, introduced by Novodvorski and Taylor, in the study of homotopical and topological invariants of the spectrum of Banach algebras.

1. El teorema de Shilov sobre idempotentes en álgebras de Banach conmutativas fue quizás el primer resultado profundo relacionando la estructura algebraica con la topología del espectro del álgebra. Si pensamos a un idempotente como cero de un polinomio (a saber, de $p(X) = X^2 - X = X.(X-1)$) el teorema de Shilov nos induce a estudiar el objeto

$$A_p = \{a \in A: p(a) = 0\}$$

siendo p un polinomio complejo; más generalmente, se trata de estudiar

$$A_f = \{a \in A: f(a) = 0\}$$

siendo f una función holomorfa definida en el entorno del espectro de un elemento $a \in A$ y siendo f(a) el elemento de A asociado a f por el morfismo del cálculo funcional holomorfo (véase el parágrafo 2). En esta nota estudiamos los conjuntos A_p y A_f, así como ciertos objetos más generales que permiten plantear mejor los problemas relacionados con las ecuaciones analíticas en las álgebras de Banach y en sus extensiones.

El parágrafo 2 contiene los resultados conocidos de la teoría que utilizaremos. En el parágrafo 3 estudiamos los conjuntos mencionados; demostramos, entre otros, una generalización del teorema de Shilov de los idempotentes. En 4. continuamos ese estudio, aunque utilizando métodos que permiten considerar álgebras no conmutativas; en particular extendemos algunos resultados de Zemanek [18] sobre idempotentes y estudiamos las propiedades que restan invariantes por ciertos morfismos; en [8] se encuentra la "versión idempotente" de un resultado de este parágrafo. Finalmente, en 5. definimos ciertos objetos, de los que A_p y A_f constituyen esencialmente la versión unidimensional, y extendemos a

(*) El autor realizó este trabajo durante su permanencia en Francia, gracias a una beca del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET).

este contexto los resultados del parágrafo 3. Es interesante señalar que ciertos teoremas de Sołtysiak [12] ganan claridad al ser enfocados desde la óptica que proponemos aquí.

2. Salvo mención contraria, todas nuestras álgebras son conmutativas, complejas, con identidad. Para aligerar las hipótesis supondremos que todas son álgebras de Banach, aclarando mediante notas aparte cuáles son los resultados que valen en un contexto más general. El espectro de una tal álgebra A, es decir el espacio de morfismos (continuos) no nulos de A sobre el cuerpo de los complejos C con la topología débil del dual A', será denotado X(A). Es un espacio compacto; C(X(A)) denota el álgebra de las funciones complejas continuas de X(A), con la norma del supremo; C(X(A)) es entonces un álgebra de Banach y la transformación de Gelfand de A

$$g: A \longrightarrow C(X(A)) \qquad g(a) = \hat{a} \ , \quad \hat{a}(h) = h(a) \qquad (h \in X(A))$$

es un morfismo continuo, de norma 1. Por lo tanto, el núcleo de g, que coincide con el radical de Jacobson de A (es decir, con la intersección de los ideales maximales de A), es un ideal cerrado. Diremos que A es semisimple cuando g es inyectiva, o sea cuando rad A = 0. Denotaremos con $A^{\bullet}$ el grupo de elementos inversibles de A; es un subconjunto abierto de A. Definimos el espectro de $a \in A$ como

$$\text{sp } a = \{z \in C: z - a \notin A^{\bullet}\}$$

Es un compacto no vacío del plano que coincide con la imagen de la aplicación a. Más generalmente, si $a = (a_1,\ldots,a_n) \in A^n$ sp a =

$= \{(z_1,\ldots,z_n) \in C^n$: $z_1-a_1,\ldots,z_n-a_n$ pertenecen a un mismo ideal propio de A}

(el espectro simultáneo de a) es un compacto de C^n que coincide con la imagen de $\hat{a} = (\hat{a}_1,\ldots,\hat{a}_n): X(A) \longrightarrow C^n$.

Si U es un abierto de C^n $\mathcal{O}(U)$ es el álgebra de funciones holomorfas sobre U; con la topología de la convergencia uniforme sobre los compactos de U es un álgebra de Fréchet. Dado un compacto K de C^n y abiertos $U \supset V \supset K$ existe naturalmente un morfismo continuo de restricción $r_{UV}: \mathcal{O}(U) \longrightarrow \mathcal{O}(V)$. Esto define un sistema inductivo de álgebras de Fréchet y de morfismos continuos, lo que nos permite definir, algebraica y topológicamente, $\mathcal{O}(K) = \lim\{\mathcal{O}(U), r_{UV}\}$.

En particular, podemos aplicar esta construcción al compacto sp a, para un $a \in A^n$. El teorema fundamental del cálculo funcional holomorfo, obtenido con mejoras sucesivas por Shilov, Arens y Calderón, Waelbroeck y Zame, es el siguiente:

TEOREMA 2.1. *Para cada* $a \in A^n$ *existe un único morfismo continuo*

$$\Theta_a : \mathcal{O}(\text{sp } a) \longrightarrow A$$

que satisface

(i) *si* $\tilde{z}_i$ *es el germen de la i-ésima función coordenada* $\Theta_a(\tilde{z}_i) = a_i$.

(ii) *si* $f \in \mathcal{O}(\mathrm{sp}\ a)$ *y* $f \in \mathcal{O}(U)$ *es un representante de* $\tilde{f}$ $\quad \Theta_a(\hat{f}) = f.\hat{a}$.

Además de estas propiedades características, valen

(iii) $f(\mathrm{sp}\ a) = \mathrm{sp}(\Theta_a(\tilde{f}))$ *si* $f \in \mathcal{O}(U)$ *representa a* $\tilde{f}$.

(iv) *si* $n \leq m$ *y* $p_{mn}: C^m \longrightarrow C^n$ *es la proyección sobre las primeras* n *coordenadas* $\Theta_{a'}(\tilde{f}) = \Theta_a(\widetilde{f.p_{mn}})$ *si* $a' = (a_1,\dots,a_n)$.

(v) *si* $T: A \longrightarrow B$ *es un morfismo continuo*

$$\Theta_{Ta}(f) = T(\Theta_a(f)) \quad si \quad Ta = (Ta_1,\dots,Ta_n).$$

Usualmente se denota $f(a) = f[a] = 0$.

Una demostración completa de este teorema se encuentra, por ejemplo, en Bourbaki [5]; con las modificaciones introducidas por Zame [16] la hipótesis de compatibilidad (iv) resulta ser consecuencia de las dos primeras. Hay versiones "no banachizables" de este teorema, como las de Rosenfeld [11] y Bonnard [3] para álgebras localmente m-convexas, Zelazko [17] para álgebras p-normadas, Allan, Dales y Mc Clure [2] para álgebras pseudo-Banach, Waelbroeck [14], [15] para b-álgebras. Terminamos este parágrafo con un teorema de Craw [6] (siguiendo una idea de Allan [1]) que reune en un único morfismo las propiedades fundamentales de la familia $\{\Theta_a: a \in A^\infty = \bigcup_n A^n\}$.

Dados un abierto V de A' (con la topología débil) y $f: V \longrightarrow C$ diremos que f es holomorfa si para todo subespacio afín S de A' de dimensión finita $f|S \cap V$ es holomorfa y si f es localmente acotada. Denotaremos $\mathcal{O}(V)$ el álgebra de funciones holomorfas sobre V y $H^\infty(V)$ la subálgebra de las funciones acotadas. Diremos que un abierto V de A' es finitamente determinado si existen $a_1,\dots,a_n \in A$ linealmente independientes tales que $V = v^{-1}(v(V))$ si $v: A' \longrightarrow C^n$ está dado por $v(h) = (h(a_1),\dots,h(a_n))$.

Allan prueba que si $f: U \longrightarrow C$ es holomorfa, siendo U un entorno abierto de X(A) en A', existe un entorno abierto V de X(A) finitamente determinado y $f|V \in H^\infty(V)$. Esto permite construir un epimorfismo continuo

$$\Theta: \mathcal{O}(X(A)) = \lim\{\mathcal{O}(U), r_{UV}\} \longrightarrow A \qquad (2.2)$$

tal que para todo $a \in A$ $\Theta(\tilde{a}) = a$; nótese que cada $a \in A$ determina una funcional lineal continua sobre A' con la topología débil y en particular una función holomorfa sobre cada abierto débil.

3. Dados un abierto U de C y $f \in \mathcal{O}(U)$ definimos

$$A_f = \{a \in A: \mathrm{sp}\ a \subset U \text{ y } f[a] = 0\} \quad y \quad Z_f = \{z \in U: f(z) = 0\}.$$

Dado un subconjunto M de C definamos $A_M = \{a \in A: \mathrm{sp}\ a \subset M\}$.

LEMA 3.1. *Si* $f \in \mathcal{O}(U)$, $A_f \subset A_{Z_f}$. *Si* A *es semisimple, vale la igualdad.*

Demostración. Por la definición de sp a resulta claro que si $f[a] = 0$

$f\circ\hat{a} = \widehat{f[a]} = 0$, de donde sp a = im $\hat{a} \subset Z_f$.

Como A es semisimple $\widehat{f[a]} = 0$ implica $f[a] = 0$, de modo que basta probar que sp $a \subset Z_f \Rightarrow \widehat{f[a]} = 0$, lo que es evidente.

Para precisar este resultado, consideremos primero el caso de un polinomio.

PROPOSICION 3.2. *Si* p *es un polinomio la transformación de Gelfand de* A *induce una aplicación continua y suryectiva*

$$g_p\colon A_p \longrightarrow C(X(A))_p$$

Si p *tiene sólo ceros simples* g_p *es biyectiva.*

Demostración. Como g es un morfismo, $p(\hat{a}) = \widehat{p(a)}$, de modo que podemos poner $g_p = g|A_p$. Como $C(X(A))$ es semisimple, por (3.1) vale

$$C(X(A))_p = C(X(A))_{Z_p} = \{f \in C(X(A))\colon \text{ im } f \subset Z_p\}.$$

Sea $f \in C(X(A))_p$, $Z_p = \{z_1,\dots,z_n\}$ y $X_k = f^{-1}(z_k)$. Entonces $X(A)$ es la unión disjunta de los cerrados $X_1,\dots,X_n$, y por lo tanto en A' con la topología débil existen abiertos disjuntos dos a dos $U_k \supset X_k$ $k = 1,\dots,n$. Sea $U = U_1 \cup \dots \cup U_n$ y $\phi\colon U \longrightarrow C$ definida por $\phi|U_k = z_k$. Es evidente probar que, con la definición de holomorfía que dimos en el parágrafo 2., ϕ es una función holomorfa y acotada. Por (2.2) ponemos $a = \Theta(\tilde{\phi})$. Como $p(\tilde{\phi}) = 0$ y como Θ es un morfismo, resulta $p(a) = 0$. Obtenemos así un $a \in A_p$ tal que $\hat{a} = f$, lo que prueba la suryectividad de g_p.

Cuando p tiene sólo ceros de multiplicidad 1, en el álgebra de polinomios p y su derivado p' son coprimos. Existen así polinomios u,v tales que $p.u + p'.v=1$. Aplicando esta identidad al elemento $a \in A_p$, resulta $p'(a).v(a) = 1$, de modo que $p'(a) \in A^{\bullet}$. Ahora, dados a y $r \in A$ el desarrollo

$$p(a+r) = p(a) + p'(a).r + \dots + \frac{1}{m!}\,p^{(m)}(a).r^m \qquad (m \in N)$$

permite deducir que, si a y a+r pertenecen a A_p para un $r \in$ rad A $0 = r.(p'(a)+r_1)$, para un cierto $r_1 \in$ rad A. Como $A^{\bullet}$ + rad A $\subset A^{\bullet}$ debe ser $r=0$, lo que prueba la inyectividad de g_p.

COROLARIO 3.3. *Si* A *es semisimple, cualquiera sea el polinomio* p, *la aplicación* g_p *es biyectiva.*

COROLARIO 3.4. *Dados un álgebra de Banach conmutativa y un polinomio* p *vale*

$$A_p + \text{rad } A = A_{Z_p}$$

Demostración. Si $a \in A_p$ y $r \in$ rad A $h(a+r) = h(a)$ para todo $h \in X(A)$, de modo que sp $(a+r)$ = sp $a \subset A_{Z_p}$ por (3.1). Recíprocamente, si

$a \in A_{Z_p}$ $\hat{a} \in C(X(A))_{Z_p} = C(X(A))_p$ (3.1). Por (3.2) existe $b \in A_p$ tal que $\hat{b} = \hat{a}$ y así $a = b+a-b$, con $b \in A_p$ y $a-b \in \text{rad } A$.

EJEMPLO 3.5. Cuando p admite ceros múltiples g_p puede no ser inyectiva. Por ejemplo se toma un álgebra A con un nilpotente no nulo (A no puede ser semisimple, por 3.3); sea $a \neq 0$ tal que $a^n = 0$; entonces $\hat{a}^n = 0$ y por ser C(X(A)) semisimple resulta $a=0$, de modo que para $p(X) = X^n$ los elementos distintos a y 0 tienen igual transformada de Gelfand, es decir la misma imagen por g_p.

NOTA 3.6. Aunque la existencia del morfismo Θ: $\mathcal{O}(X(A)) \longrightarrow A$ no es inmediata para álgebras no banachizables (Craw prueba su existencia para álgebras de Fréchet), todos los resultados anteriores son válidos para álgebras que admiten cálculo holomorfo, en particular para las localmente m-convexas completas, las p-normadas, las pseudo-Banach, las b-álgebras. La utilización del morfismo Θ simplifica las demostraciones pero no es indispensable.

LEMA 3.7. *Sea* U *un abierto de* **C**, $a \in A_U$, $f \in \mathcal{O}(U)$. *Entonces* $A_f = \cup A_p$ *donde* p *recorre el conjunto de polinomios con ceros comunes a* f, *contados con su multiplicidad.*

Demostración. Si $a \in A_f$, sp $a \subset Z_f$; como sp a es compacto y Z_f es discreto sp a es un conjunto finito $\{z_1,\ldots,z_n\}$. Veamos que existen un entorno abierto D de sp a contenido en U, un polinomio p y una función $g \in \mathcal{O}(D)$ tales que $f = p.g$ en D: para ello, basta tomar D_i bolas disjuntas dos a dos de centros respectivos z_i $(i = 1,\ldots,n)$ y observar que en D_i $f(z) = (z-z_i)^{k_i} g_i(z)$ para una $g \in \mathcal{O}(D_i)$ nunca nula; definiendo $g(z) = (z-z_1)^{-k_1} \ldots \widecheck{(z-z_i)}^{-k_i} \ldots (z-z_n)^{-k_n}.g_i(z)$ si $z \in D_i$ (el signo $\vee$ indica la supresión de ese factor) y $p(z) = (z-z_1)^{k_1} \ldots$ $\ldots (z-z_n)^{k_n}$, es fácil ver que $f = p.g$ en la unión de las bolas D_i. Gracias a esta factorización, como $a \in A_f$, $0 = f[a] = p(a).g[a]$ y como $g[a] \in A^{\cdot}$ (pues g no se anula en ningún punto de sp a), debe ser $p(a) = 0$. Esto prueba una inclusión, la otra es inmediata utilizando la misma factorización.

PROPOSICION 3.8. *Sea* U *un abierto de* **C**, $f \in \mathcal{O}(U)$. *Entonces la transformación de Gelfand induce una suryección* g_f: $A_f \longrightarrow C(X(A))_f$. *Si los ceros de* f *son simples o si* A *es semisimple,* g_f *es una biyección.*

Demostración. La propiedad (v) de (2.1) muestra la existencia de la aplicación; por otra parte, la factorización de (3.7) permite ver fácilmente la suryectividad. Obviamente g_f es inyectiva si A es semisimple; si los ceros de f son simples, el polinomio p de la factorización de

(3.7) también tiene ceros simples, y en consecuencia g_f es inyectiva, como en (3.2).

COROLARIO 3.9. *Si* U *es un abierto de* C *y* $f \in O(U)$ *vale* $A_f + \text{rad } A = A_{Z_f}$.

Demostración. Basta combinar (3.4) y (3.8).

NOTA 3.10. El hecho de que Z_f puede ser infinito puede inducir, erróneamente, que el resultado anterior es falso ya que todo elemento de A_f + rad A tiene espectro finito. Lo que ocurre es que también todo elemento de A_{Z_f} tiene espectro finito: los únicos subconjuntos de Z_f "alcanzables" (como espectros) por elementos de A son sus compactos, es decir, los finitos (recordar que Z_f es discreto).

Esto es, probablemente, el momento apropiado para insistir en la importancia que tienen los elementos del radical en la fórmula (3.9), así como la estructura de los ceros de f. En efecto vale el siguiente resultado:

PROPOSICION 3.11. *Si* A *es semisimple o si* f *tiene sólo ceros simples,* A_f *es un subconjunto discreto de* A.

Demostracion. Sean $a,b \in A_f$, $a \neq b$; con cualquiera de las hipótesis resulta $\hat{a} \neq \hat{b}$ (3.8) y así

$\|a-b\| \geq \|a-b\|_\infty \geq \min_{i \neq k} |z_i - z_k| = C_f > 0$ (donde z_i indican los ceros de f).

NOTA 3.12. Esencialmente es la compacidad de sp a $(a \in A)$ la propiedad que nos ha permitido obtener los resultados posteriores a (3.6). En consecuencia, agregando esta hipótesis, todo lo probado vale para las clases de álgebras mencionadas en (3.6). Sin embargo, debe notarse que las álgebras p-normadas y las pseudo-Banach tienen todos sus elementos con espectro compacto (ver [17] y [2]).

4. La propiedad (v) de (2.1) muestra que todo morfismo $T: A \longrightarrow B$ induce, por restricción, una aplicación continua $T_p: A_p \longrightarrow B_p$.

En este parágrafo estudiaremos esta aplicación cuando T es un morfismo con imagen densa y plena (recordemos que una subálgebra S de A es *plena* cuando $A^\bullet \cap S \subset S^\bullet$).

LEMA 4.1. *Sea* A *un álgebra de Banach no necesariamente conmutativa. Sea* p *un polinomio con ceros simples* $z_1, \ldots, z_n$. *Entonces existen idempotentes no nulos* $e_1, \ldots, e_n$ *tales que*

$$e_1 + \ldots + e_n = 1, \quad e_i.e_k = 0 \text{ si } i \neq k \text{ y } a.e_i = z_i.e_i \quad \forall i .$$

Demostración. Ver [4] Proposición 8.11.

LEMA 4.2. *Sea* A *un álgebra de Banach no necesariamente conmutativa,* p *un polinomio con ceros simples* $z_1,\dots,z_n$. *Entonces* A_p *es retracto (holomorfo) de un abierto de* A *y en consecuencia es localmente conexo por arcos.*

Demostración. Para cada z_i sea D_i una bola que lo contiene de modo tal que $D_i \cap D_k = \emptyset$ si $i \neq k$. Sea D la unión de los D_i y sea $f \in \mathcal{O}(D)$ la función que vale z_i en D_i. Para cada $a \in A_D$ (recordar su definición en el comienzo de 3.) podemos definir f[a]. Esto define una aplicación holomorfa (sobre esta noción de holomorfía, véase por ejemplo [14])
$\bar{f}\colon A_D \longrightarrow A$.
Es fácil ver que para todo abierto U de C, A_U es abierto. Además, como $p(f) = 0$, $p(f[a]) = (pf)[a] = 0$, de modo que la imagen de $\bar{f}$ está contenida en A_p. Tomemos ahora $a \in A_p$; sean $e_1,\dots,e_n$ los idempotentes de (4.1). Entonces (ver [4] Ch.1)

$$f[a] = \sum_{i=1}^{n} z_i e_i = \sum_{i=1}^{n} a.e_i = a$$

Esta última igualdad muestra que $\bar{f}$ es una retracción sobre A_p.

PROPOSICION 4.3. *Sea* $T\colon A \longrightarrow B$ *un morfismo continuo de álgebras de Banach conmutativas. Supongamos que* T *es inyectivo y que su imagen es densa y plena. Entonces la aplicación traspuesta*

$$T'\colon X(B) \longrightarrow X(A) \qquad T'(h) = h\circ T$$

es un homeomorfismo.

Demostración. Siendo X(A) y X(B) compactos basta probar que la aplicación continua T' es biyectiva. La densidad de la imagen de T prueba la inyectividad. Para la suryectividad probaremos un hecho más fuerte: si I es un ideal propio de A, T(I) genera un ideal propio de B. Si no es así, existen $a_i \in A$, $b_i \in B$ tales que $\sum Ta_i.b_i = 1$. Como $B^{\bullet}$ es abierto y la imagen de T es densa existen $c_i \in A$ tales que $\sum Ta_i.Tc_i \in B^{\bullet}$. Por la hipótesis de plenitud $\sum a_i.c_i \in A^{\bullet}$. Pero este elemento pertenece al ideal I lo que contradice la hipótesis de que I es propio. Probado esto, la suryectividad de T' es evidente: si $h \in X(A)$, su núcleo M es un ideal (maximal) propio, por lo tanto h(M) debe estar contenido en un ideal maximal N, que es el núcleo de un cierto $k \in X(B)$. Es claro que $T'(k) = h$.

PROPOSICION 4.4. *Sea* $T\colon A \longrightarrow B$ *como en* (4.3), U *un abierto de* C, $f \in \mathcal{O}(U)$ *con ceros simples. Entonces* $T_f = T|A_f$ *es una biyección de* A_f *sobre* B_f.

Demostración. Por (4.3) $X(A)$ es homeomorfo a $X(B)$ y por (3.8)

$$A_f \approx C(X(A))_f \approx C(X(B))_f \approx B_f.$$

NOTA 4.5. Cuando A y B no son conmutativas, se puede probar que la imagen de T_f es densa en B_f; en efecto, podemos considerar el caso de un polinomio, por (3.7); si $b \in B_p$ existen $a_m \in A$ tales que $Ta_m \longrightarrow b$; sea V un entorno de $\mathrm{sp}\, b = \{z_1,\dots,z_n\}$ como el de (4.2), $f \in \mathcal{O}(V)$ como en (4.2); entonces $f[a_m] \in A_p$, $Tf[a_m] \in B_p$ y $Tf[a_m] \longrightarrow b$.

COROLARIO 4.6. *Sea* $T: A \longrightarrow B$ *un morfismo inyectivo con imagen densa y plena,* A *y* B *no necesariamente conmutativas. Entonces* T *induce isomorfismos* $\pi_n(A_p) \longrightarrow \pi_n(B_p)$ $(n \geq 0)$.

Demostración. Obsérvese que para todo espacio compacto X y toda álgebra de Banach C, $C(X,C)$ = álgebra de funciones continuas sobre X a valores en C, con la topología de la convergencia uniforme, es un álgebra de Banach y $C(X,C)_p = C(X,C_p)$; por lo tanto T induce, como en (4.5) una aplicación continua con imagen densa $C(X,A)_p \longrightarrow C(X,B)_p$. Ahora, para el caso π_0 basta tomar $X = [0,1]$ y observar que las componentes conexas por arcos de A_p coinciden con las componentes conexas, y lo mismo para B_p. Para el caso π_n basta tomar $X = S^n$ $(n \geq 1)$.

5. En este parágrafo estableceremos ciertas relaciones entre algunos objetos, de los que A_p es un caso particular, cuyo estudio ha demostrado ser fructífero en los problemas de ecuaciones analíticas en álgebras de Banach conmutativas ([10]), [9] , [13]).

Dado un subconjunto M de C^n, definimos $A_M = \{a \in A^n: \mathrm{sp}\, a \subset M\}$. Dados un abierto U de C^n y un ideal J de $\mathcal{O}(C^n)$, definimos

$A_J = \{a \in A^n: f[a] = 0 \text{ para toda } f \in J\}$.

Si M es una subvariedad holomorfa de un abierto de C^n podemos hacer una construcción análoga a la descripta en el parágrafo 2 y obtener una aplicación continua $\Theta_M: \mathcal{O}(X(A),M) \longrightarrow A^n$. Llamaremos $\widetilde{A}_M$ a la imagen de esta aplicación.

PROPOSICION 5.1. *Sea* J *un ideal de* $\mathcal{O}(U)$, $M = \{z \in U: f(z) = 0 \ \forall f \in J\}$. *Entonces* $A_J + (\mathrm{rad}\, A)^n \subset A_M$.

Demostración. Sea $a \in A_J$ y $r \in (\mathrm{rad}\, A)^n$; entonces $f[a] = 0 \ \forall f \in J$ y por (2.1) (iii) $f(\mathrm{sp}\, a) = \mathrm{sp}\, f[a] = \{0\} \ \forall f \in J$, de donde $\mathrm{sp}\, a \subset M$; finalmente $\mathrm{sp}\,(a+r) = \mathrm{sp}\, a \subset M$.

PROPOSITION 5.2. *Sea* M *una subvariedad compleja cerrada de un abierto* U *de* C^n. *Entonces* $\tilde{A}_M \subset A_M$.

Demostración. (Ver [13]) Si $a \in A_M$ existe un germen $\tilde{g} \in \mathcal{O}(X(A),M)$ tal que $\Theta_M(\tilde{g}) = a$; basta observar que para todo representante g de $\tilde{g}$, $\mathrm{sp}\, a = g(X(A)) \subset M$.

PROPOSICION 5.3. *Sea* M *una subvariedad compleja cerrada de* U, J *el ideal de* $\mathcal{O}(U)$ *de las funciones nulas sobre* M. *Entonces*

$$\tilde{A}_M \subset A_J \subset A_J + (\mathrm{rad}\ A)^n.$$

Si además M *está definida por ecuaciones globales*

$$\tilde{A}_M \subset A_J \subset A_J + (\mathrm{rad}\ A)^n \subset A_M.$$

Si A *es semisimple* $\qquad \tilde{A}_M = A_J = A_M.$

Demostración. Sea $a = \Theta_M(\tilde{g}) \in \tilde{A}_M$, $f \in J$; entonces $f[a] = \Theta_M(f\circ \hat{a}) = \Theta_M(f\circ\tilde{g}) = 0$ pues $f|M = 0$ y $g(X(A)) \subset M$. Esto prueba que $\tilde{A}_M \subset A_J$.
Si $\mathrm{sp}\, a \subset M$ y $f \in J$ $f(\mathrm{sp}\, a) = \{0\}$ y por lo tanto $\mathrm{sp}\, f[a] = \{0\}$. Cuando A es semisimple esto significa que $f[a] = 0$. Taylor [13] prueba que en este caso $\tilde{A}_M = A_M$.
Supongamos que $M = \{z \in U: f_1(z) = \dots = f_k(z) = 0\}$; entonces $f_i \in J$ y así todo $a \in A^n$ tal que $f_i[a] = 0$ para todo i debe tener espectro simultáneo contenido en M.

OBSERVACIONES 5.4. i) Cuando el ideal J es principal, digamos generado por f, entonces $A_J = A_f$ y, al menos para n=1, podemos aplicar a A_J los resultados de 3.

ii) Cuando J es finitamente generado, A_J es de la forma $\bigcap_{i=1}^{m} A_{f_i}$ y además la matriz jacobiana $(\partial f_i/\partial z_j)$ tiene rango m sobre M = lugar de ceros de $f_1,\dots,f_m$, entonces M es una subvariedad compleja cerrada de U y vale la cadena de inclusiones de (5.3).

iii) Si M es una subvariedad cerrada de un abierto U existe un entorno abierto V de M en U y una retracción holomorfa de V sobre M (véase [7] Ch.VIII Sec. C Th.8) que a su vez permite definir una retracción holomorfa de A_V sobre A_M. Como A_V es un abierto de A^n, resulta fácil de esto probar que A_M es una variedad de Stein modelada en un A-módulo de tipo finito. Consideraciones análogas se pueden hacer sobre $\tilde{A}_M$ aunque las demostraciones son más difíciles.

iv) Como lo hemos destacado antes, no es imprescindible que las álgebras consideradas en los dos últimos parágrafos sean de Banach: alcanza con que tengan, además de cálculo holomorfo, espectro compacto o, en el caso de (4.5) y (4.6), que el grupo de elementos inversibles sea abierto.

BIBLIOGRAFIA

[1] G.R.ALLAN, *A note on the holomorphic functional calculus in Banach algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. 22 (1969) 77-81.

[2] G.R.ALLAN, H.G.DALES, J.Mc CLURE, *Pseudo Banach algebras*, Studia Math. 40 (1971) 55-69.

[3] M.BONNARD, *Sur le calcul fonctionnel holomorphe multiforme dans les algèbres topologiques*, Ann. Sc. Ec. Norm. Sup. (4) 2 (1969) 397-422.

[4] F.BONSALL, J.DUNCAN, *Complete normed algebras*, (Springer-Verlag, Berlin, 1972).

[5] N.BOURBAKI, *Théories spectrales*, (Hermann, Paris, 1967).

[6] I.G.CRAW, *A condition equivalent to the continuity of characters on Fréchet algebras*, Proc. London Math. Soc. (3) 22 (1971) 452-464.

[7] R.C.GUNNING, H.ROSSI, *Analytic functions of several complex variables*, (Prentice Hall, N.J. 1965).

[8] M.KAROUBI, *K-théorie algébrique de certaines algèbres d'opérateurs*, Lecture Notes in Math. 725 (1979) 254-290.

[9] V.YA LIN, *Holomorphic fiberings and multivalued functions of elements of a Banach algebra*, Functional Anal. Appl. 7 (1973) 122-128.

[10] M.E.NOVODVORSKI, *Certain homotopical invariants of spaces of maximal ideals*, Math. Notes 1 (1967).

[11] M.ROSENFELD, *Commutative F-algebras*, Pacific J. Math. 16 (1965) 159-166.

[12] A.SOŁTYSIAK, *On Banach algebras with closed set of algebraic elements*, Commentations Math. 20 (1978) 479-484.

[13] J.L.TAYLOR, *Topological invariants of the maximal ideals space of a Banach algebra*, Advances in Math. 19 (1976) 149-206.

[14] L.WAELBROEK, *The holomorphic functional calculus*, in *"Algebras in analysis"*, (Academic Press, London, 1975).

[15] L.WAELBROEK, *Topological vector spaces and algebras*, Lecture Notes in Math. 230 (Springer Verlag, 1970).

[16] W.ZAME, *Existence, uniqueness and continuity of functional calculus homomorphismos*, Proc. London Math. Soc. (3) 39 (1979) 73-92.

[17] W.ZELAZKO, *Metric generalizations of Banach algebras*, Dissertationes Math. 47 (1965).

[18] J.ZEMANEK, *Idempotents in Banach algebras*, Bull. London Math. Soc. 11 (1979) 177-183.

Recibido en abril de 1981.