Revista de la
Unión Matemática Argentina
Volumen 30, 1982-83

COMPORTAMIENTO ASINTOTICO DE LA FRONTERA LIBRE EN LOS PUNTOS SINGULARES PARA EL PROBLEMA DE STEFAN DE UNA FASE

Ricardo H. Nochetto

RESUMEN. Se prueba en dos dimensiones espaciales y a tiempo fijo que, en un pequeño entorno de un punto singular de la frontera libre, existe una dirección y un conjunto simétrico respecto a ella y de forma cuspidal que contiene al conjunto de coincidencia: el hielo. Entonces el hielo tiende asintóticamente a un segmento de recta.

En el trabajo se emplean técnicas desarrolladas por Caffarelli y Rivière para obtener una estimación asintótica de la frontera libre en problemas elípticos, que son adaptadas a las más débiles condiciones que resultan al considerar el problema parabólico a tiempo fijo (se deben relajar las hipótesis sobre la no homogeneidad ψ para un problema con el operador Laplaciano: $\Delta u = \psi$).

1. PRESENTACION DEL PROBLEMA.

Consideremos el Problema de Stefan de una fase y exterior, vale decir el agua se ubica en el exterior de un conjunto acotado fijo, según se propone en [F-K] y [C-F]. Llamamos G_0 a este conjunto y B a una bola de radio suficientemente grande $(G_0, B \subset R^n)$. Mediante técnicas variacionales se prueba en [F-K] la existencia y unicidad de solución para la siguiente formulación débil del Problema de Stefan:

"Hallar u definida en $D = (B\setminus\overline{G_0}) \times (0,T)$, $T > 0$, tal que

i) $u \in L^2(0,T;H^2(B\setminus\overline{G_0}))$, $u_t \in L^2(0,T;L^2(B\setminus\overline{G_0}))$

ii) $u_t - \Delta_x u \geq f$, $u \geq 0$, $u(u_t - \Delta_x u - f) = 0$ c.t.p en D.

iii) $u(x,t) = \phi(x,t)$ en $\partial G_0 \times (0,T)$, $u(x,t) = 0$ en $\partial B \times (0,T)$

iv) $u(x,0) = 0$ si $x \in B\setminus G_0$".

Además la función u resulta continua en D y tiene sentido descomponer el dominio D en:

$$\Omega = \{(x,t) \in D \;/\; u(x,t) > 0\}$$

$$\Lambda = \{(x,t) \in D \;/\; u(x,t) = 0\} \quad \text{(conjunto de coincidencia)}$$

$$F = \partial\Lambda \cap D \quad \text{(frontera libre)}$$

y restringiendo estos conjuntos a tiempo t_0 $(0 < t_0 < T)$, vale decir considerando la variable t fija, resultan:

Ω_{t_0} : el agua

Λ_{t_0} : el hielo

F_{t_0} : la interfase hielo-agua

Un estudio posterior de regularidad global demuestra que "u" tiene segundas derivadas espaciales acotadas ($u \in C_x^{1,1}(\Omega)$), derivada temporal acotada ($u \in C_t^{0,1}(\Omega)$) , $u = 0$ y $\nabla_x u = 0$ en F, y "u" verifica en Ω la ecuación diferencial del calor

$$-\Delta_x u + u_t = f$$

donde $f = -1$ cerca de F.

Posteriormente fue obtenido en [C-F] un módulo de continuidad para la temperatura: u_t. En efecto se prueba:

"Para todo compacto K en $B \setminus \overline{G}_0$ y $0 < \delta < T$, resulta u_t uniformemente continua en $K \times [\delta, T]$ con módulo de continuidad

$$\sigma_\gamma(r) = C_\gamma \, 2^{-|\log r|^\gamma} \qquad (0 < \gamma < \tfrac{1}{2})$$

donde C_γ depende de K, δ, T y γ".

Consideremos un punto singular de la frontera libre, esto es un punto $(x_0, t_0) \in F$ tal que x_0 tiene densidad de Lebesgue cero respecto al conjunto Λ_{t_0} (ver [C1]). Nos interesa caracterizar geométricamente al conjunto Λ_{t_0} en las inmediaciones de x_0, para lo cual localizamos el estudio. Sea $B_{r_0} = B(x_0, r_0) = \{x: |x - x_0| < r_0\}$ una bola suficientemente pequeña de manera que se verifique:

$$\Delta_x u = 1 + u_t = \psi \ , \text{ en } \Omega_{t_0} \cap B_{r_0}$$

i) $u \geqslant 0$ en B_{r_0} , $u \in C_x^{1,1}(B_{r_0} \cap \Omega_{t_0})$

ii) $u = 0$, $\nabla_x u = 0$ en $F_{t_0} \cap B_{r_0}$

iii) ψ es continua en B_{r_0}, con módulo de continuidad σ_γ, $\psi \geqslant \lambda > 0$.

Para este mismo problema local, excepto que la función ψ se supone Hölder, se obtiene en [C-R] una interesante descripción geométrica del conjunto de coincidencia en dos dimensiones espaciales. El propósito de este trabajo es emplear las técnicas exhibidas en [C-R], previa acotación por abajo de las derivadas segundas puras (espaciales) de la solución en las hipótesis más débiles para el módulo de continuidad de ψ, para obtener la siguiente estimación asintótica de la frontera libre:

"Sea (x_0, t_0) un punto singular de la frontera libre ($x_0 \in R^2$), es decir x_0 tiene densidad de Lebesgue cero con respecto a Λ_{t_0}. Entonces existe una dirección l_0 tal que en un pequeño entorno de x_0 resulta

$$\Lambda_{t_0} \subset \Gamma_0 = \{x \in R^2 \;/\; d(x,l_0) \leqslant \sigma(|x-x_0|).|x-x_0|\} \quad ,$$

donde $\sigma(r) = C_1 \; e^{-C_2|\log r|^{\gamma'}}$ $\qquad (0 < \gamma' < \gamma)$".

Así queda resuelto el problema de estimar, a tiempo fijo, el comportamiento asintótico (espacial) de la frontera libre para el Problema de Stefan en dos dimensiones espaciales. Con respecto al comportamiento temporal no cabe esperar evolución de un punto singular, como lo demuestra el siguiente resultado probado en [C2]:

"Supongamos que $(x_\alpha,t_\alpha) \in F$ para $\alpha \in [0,1]$ es una familia de puntos singulares tales que (x_α) es una curva rectificable. Entonces t_α es constante para $\alpha \in [0,1]$".

2. ESTIMACIONES PARA LAS DERIVADAS SEGUNDAS PURAS Y COMPORTAMIENTO ASINTOTICO.

Haremos un análisis local de la solución "u", en el cual obtendremos una cota por abajo para las derivadas segundas puras de u (Lema 4) en un entorno de un punto de la frontera libre. Para ello es necesario construir una función auxiliar (Lemas 1 y 2) que permite probar una desigualdad de tipo Harnack (Lema 3) y luego por aplicación recursiva de ésta se obtiene el Lema 4. La estimación asintótica de la frontera libre es una consecuencia del Lema 4.

Con la misma notación que en el parágrafo anterior sea $x_0 \in F_{t_0}$ y $B_{r_0} = B(x_0,r_0)$ con $0 < r_0 \ll 1$ a fijar. Consideremos $B_\rho = B(x_1,\rho) \subset \subset B_{r_0}$ y supongamos por simplicidad que $x_1 = 0$. Indicamos con u_{ij} la derivada segunda de la función u en las direcciones espaciales i,j. Si i=j llamamos a u_{ii} derivada segunda pura.

En los dos primeros lemas se construye en B_ρ una función auxiliar "v" de forma tal que $\Delta v = \psi_{ii}$ (y por ende $u_{ii} - v$ es armónica en $B_\rho \cap \Omega_{t_0}$) v=0 en δB_ρ y con un adecuado módulo de continuidad. En este contexto se puede suponer sin pérdida de generalidad que $\psi(0) = 0$, y que la función ψ definida en B_{r_0} y en particular en B_ρ está extendida a todo R^2 manteniendo el mismo módulo de continuidad y soporte en la bola $B_{2\rho}$. Por comodidad continuamos llamándola ψ. Los argumentos son n-dimensionales.

Denotamos con E a la solución fundamental para el Laplaciano

$$E(x) = \begin{cases} C \log \frac{1}{|x|} & \text{si } n = 2 \\ \frac{C_n}{|x|^{n-2}} & \text{si } n > 2 \end{cases}$$

y con C_n a cualquier constante sólo dependiente de la dimensión.

LEMA 1. *Sea* ψ *una función continua en* R^n *con soporte en* $B_\rho (\rho \ll 1)$, *y módulo de continuidad* $\sigma(r)$ *que satisface la condición de Dini* $\int_0^1 \frac{\sigma(r)}{r}\, dr < \infty$. *Entonces la función* $f(x) = \int_{|y|<1} E(x-y)\psi(y)dy$ *tiene segundas derivadas continuas*

$$f_{ij}(x) = \int_{|y|<1} E_{ij}(x-y)(\psi(y)-\psi(x))dy - \psi(x) \int_{|y|=1} E_i(x-y)y_j d\sigma(y).$$

con módulo de continuidad $C_n\omega(r)$, *donde*

$$\omega(r) = \sigma(r) \, . \, \log \frac{1}{r} + \int_0^r \frac{\sigma(t)}{t} dt$$

NOTA 1. Obsérvese que una función creciente σ que satisface la condición de Dini verifica

$$\sigma(r) \log \frac{1}{r} \xrightarrow[r\to 0]{} 0.$$

En efecto para $1 > r > 0$ tenemos

$$\int_r^{r^{1/2}} \frac{\sigma(t)}{t} dt \geqslant \sigma(r) \log \frac{r^{1/2}}{r} = \frac{1}{2} \sigma(r) \log \frac{1}{r}$$

Dem. Lema 1. En [C-H] (pag.249 - Tomo II) se prueba que f_{ij} es la segunda derivada de f bajo la hipótesis: ψ Hölder. La misma demostración se extiende a este caso, luego de observar que ψ puede ser aproximada uniformemente por funciones suaves con el mismo módulo de continuidad σ (por ejemplo haciendo la convolución con aproximaciones de la identidad suaves), y que σ satisface la condición de Dini.

En consecuencia sólo es necesario hallar el módulo de continuidad ω. En primer término obtendremos ω en $B_{\frac{1}{4}}$. Para ello escribimos

$$g(x) = \int_{|y|<1} E_{ij}(x-y)(\psi(y) - \psi(x))dy =$$

$$= \int_{B(x,1)} + \left(\int_{B(0,1)} - \int_{B(x,1)} \right) = g_1(x) + g_2(x)$$

y trataremos cada sumando separadamente. Sea $\Omega(x')$ la función definida en la esfera unitaria $\sum_1$ de R^n tal que

$$E_{ij}(y) = \frac{\Omega(x')}{r^n}$$

si $y = (r,x')$ en coordenadas esféricas.

Por comodidad hacemos un cambio de variables que transforma a g_1 en

$$g_1(x) = \int_{|y|<1} E_{ij}(y)(\psi(x-y)-\psi(x))dy$$

Ahora podemos estimar $|g_1(x_1)-g_1(x_2)|$ con $x_1,x_2 \in B_{\frac{1}{4}}$.

$$|g_1(x_1)-g_1(x_2)| \leqslant \int_0^1 r^{n-1}dr \int_{\Sigma_1} \frac{|\Omega(x')|}{r^n}|\psi(x_1-rx')-\psi(x_1)-\psi(x_2-rx')-\psi(x_2)|dx' \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^{|x_1-x_2|} \frac{dr}{r} \int_{\Sigma_1} |\Omega(x')|(|\psi(x_1-rx')-\psi(x_1)|+|\psi(x_2-rx')-\psi(x_2)|)dx' \quad +$$

$$+ \int_{|x_1-x_2|}^1 \frac{dr}{r} \int_{\Sigma_1} |\Omega(x')|(|\psi(x_1-rx')-\psi(x_2-rx')|+|\psi(x_1)-\psi(x_2)|)dx' \quad \leqslant$$

$$\leqslant C_n \left(\int_0^{|x_1-x_2|} \frac{\sigma(r)}{r}\, dr + \sigma(|x_1-x_2|) \log \frac{1}{|x_1-x_2|}\right) = C_n\ \omega(|x_1-x_2|).$$

Para obtener una expresión análoga con g_2, observemos que los puntos de $B_{1/4}$ están próximos al origen, en tanto que la región de integración está lejos del mismo. Con esta idea en mente, escribimos:

$$g_2(x_1)-g_2(x_2) = \left(\int_{B(0,1)\setminus B(x_1,1)} - \int_{B(x_1,1)\setminus B(0,1)}\right) E_{ij}(x_1-y)(\psi(x_2)-\psi(x_1))dy \ +$$

$$+ \left(\int_{B(x_2,1)\setminus B(x_1,1)} - \int_{B(x_1,1)\setminus B(x_2,1)}\right) E_{ij}(x_1-y)(\psi(y)-\psi(x_2))dy \ +$$

$$+ \left(\int_{B(0,1)\setminus B(x_2,1)} - \int_{B(x_2,1)\setminus B(0,1)}\right)(E_{ij}(x_1-y)-E_{ij}(x_2-y)) .$$

$$\cdot\ (\psi(y)-\psi(x_2))dy.$$

En el primer sumando sabemos que $|x_1-y| \geqslant 1$ ó $|y| > 1$ y como $|x_1| < \frac{1}{4}$ resulta en cualquier caso $|x_1-y| > \frac{1}{2}$ y $|E_{ij}(x_1-y)| < C_n$. El mismo razonamiento puede emplearse para acotar $|E_{ij}(x_1-y)|$ en el segundo sumando, en tanto en el tercero aplicando el teorema del valor medio tenemos

$$|E_{ij}(x_1-y) - E_{ij}(x_2-y)| \leqslant |\nabla E_{ij}(\xi)|.|x_1-x_2| < C_n\ |x_1-x_2|$$

puesto que $|\xi| = |\theta x_1 + (1-\theta)x_2-y| > \frac{1}{2}$ $(0 < \theta < 1)$. Ahora observemos que la medida del dominio de integración correspondiente al segundo sumando puede estimarse como

$$|B(x_2,1)\setminus B(x_1,1)| + |B(x_1,1)\setminus B(x_2,1)| \leqslant C_n\ |x_1-x_2| \ ,$$

y entonces recordando que el soporte de ψ está contenido en B_ρ podemos acotar la expresión en estudio de la siguiente forma,

$$|g_2(x_1)-g_2(x_2)| \leqslant C_n\sigma(|x_1-x_2|) + C_n\sigma(\rho)\ |x_2-x_1| + C_n\sigma(\rho)\ |x_1-x_2| <$$
$$< C_n\sigma(|x_1-x_2|)$$

Finalmente de las estimaciones obtenidas para g_1 y g_2 sigue que

$$|g(x_1)-g(x_2)| \leqslant C_n\ \omega(|x_1-x_2|)$$

Con respecto al término $h(x) = \psi(x) \displaystyle\int_{|y|=1} E_i(x-y)y_j d\sigma(y)$ se procede de manera análoga que al acotar g_2 obteniendo

$$|h(x_1)-h(x_2)| \leqslant C_n\sigma(|x_1-x_2|) + C_n\sigma(\rho)|x_1-x_2| < C_n\sigma(|x_1-x_2|)$$

con lo que queda probado el Lema en $B_{\frac{1}{4}}$. Analicemos ahora f_{ij} en $B_1\setminus B_{\frac{1}{4}}$. Notemos que al ser $\rho \ll 1$ resulta $h(x) = 0$ en esta corona y

$$g(x) = \int_{|y|<\rho} E_{ij}(x-y)\psi(y)dy$$

Luego $|x-y| > \frac{1}{4} - \rho > \frac{1}{8}$ y entonces $|\nabla g(x)| \leqslant C_n$, de donde g es Lipschitz en $B_1\setminus B_{\frac{1}{4}}$, y el Lema está demostrado.

NOTA 2. La función continua f_{ii} verifica $\Delta f_{ii} = \psi_{ii}$ en el sentido de las distribuciones.

NOTA 3. Sin pérdida de generalidad se puede suponer que la función verifica

$$\frac{\sigma(r_1)}{r_1} \geqslant \frac{\sigma(r_2)}{r_2} \qquad \text{si} \qquad 0 < r_1 \leqslant r_2 \leqslant 1 \ .$$

Entonces la función ω conserva esta propiedad. En efecto, basta estudiar $\alpha(r) = \frac{1}{r}\int_0^r \frac{\sigma(t)}{t}\, dt$ y comprobar que

$$\alpha'(r) = \frac{1}{r^2}\int_0^r \left(\frac{\sigma(r)}{r} - \frac{\sigma(t)}{t}\right) dt \leqslant 0$$

NOTA 4. Consideremos la función

$$1(x) = \int_{|y|<\rho'} E(x-y)\psi(y)\, dy \quad , \quad (\rho' \ll 1)$$

donde ψ es la función del Lema 1, pero su soporte no necesariamente está en $B_{\rho'}$. Entonces 1_{ij} es continua y tiene en $B_{\frac{\rho'}{2}}$ un módulo de continuidad $C_{n,\rho',\|\psi\|_\infty} \cdot \omega(r)$.

Dem. Consideremos una extensión de ψ a R^n con soporte en $B_{2\rho'}$, módulo de continuidad $C_{\|\psi\|_\infty}.\sigma(r)$ y que seguimos llamando ψ (la constante $C_{\|\psi\|_\infty}$ dependiente de la norma L^∞ de ψ es necesaria dado que no se supone aquí que ψ se anule en algún punto de $B_{\rho'}$).

Entonces podemos escribir

$$1(x) = \int_{|y|<1} E(x-y)\psi(y)\, dy - \int_{\rho'\leqslant|y|<1} E(x-y)\psi(y)\, dy$$

Por aplicación del Lema 1 concluimos que el primer sumando tiene derivadas segundas continuas con módulo de continuidad $C_{n,\|\psi\|_\infty}.\omega(r)$.

Para el segundo sumando notemos que por ser $|x| < \frac{\rho'}{2}$ resulta $|x-y| > \frac{\rho'}{2}$, y entonces

$$|\nabla E_{ij}(x-y)| \leqslant C_{n,\rho'}$$

Luego este sumando tiene un módulo de continuidad Lipschitz con constante $\|\psi\|_\infty \,.\, C_{n,\rho'}$.

LEMA 2. *Sea ψ como en Lema 1. Entonces el problema de Dirichlet*

$$\begin{cases} \Delta v = \psi_{ii} & en \ B_\rho \quad (\text{en el sentido de las distribuciones}) \\ v = 0 & en \ \partial B_\rho \end{cases}$$

admite una única solución, que resulta continua con una oscilación en B_ρ que satisface

$$\operatorname*{osc}_{B_\rho} v = \sup_{x,y\varepsilon B_\rho} |v(x)-v(y)| < C_n\, \omega(\rho)$$

Más aún, si se verifica $\omega(r)\log\frac{1}{r} \xrightarrow[r\to 0^+]{} 0$, *entonces* v *tiene un módulo de continuidad*

$$\delta(r) = C_n\omega(r)\,(1+\log\frac{\rho}{r})$$

Dem. Llamemos v_1 a la función f_{ii} de Lema 1. Proponemos el Problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta v_2 = 0 & \text{en} \quad B_\rho \\ v_2 = v_1 & \text{en} \quad \partial B_\rho \end{cases}$$

que tiene una única solución. La cota para $\operatorname{osc}_{B_\rho} v$ $(v=v_1-v_2)$ se puede obtener directamente a partir del Principio de Máximo.

Para hallar un módulo de continuidad de v basta estudiar v_2, y lo hacemos a través de su representación como integral de Poisson

$$v_2(x) = \int_{|y|=\rho} P(x,y)v_1(y)d\sigma(y)$$

con $P(x,y) = \frac{C_n}{\rho} \frac{\rho^2-|x|^2}{|x-y|^n}$ el núcleo de Poisson en B_ρ.

En primer término vamos a probar que

$$|v_2(x)-v_2(x')| \leqslant C_n \, \delta\,(|x-x'|)$$

si $x' = \rho \frac{x}{|x|}$ es el punto en la misma dirección radial de x y situado en ∂B_ρ.

Como $1 \equiv \int_{|y|=\rho} P(x,y)d\sigma(y)$ podemos escribir

$$v_2(x)-v_2(x') = \int_{|y|=\rho} P(x,y)(v_1(y)-v_1(x'))d\sigma(y)$$

Llamando $\xi = |x-x'|$ descomponemos la integral como

$$|v_2(x)-v_2(x')| \leqslant \int_{\substack{|y|=\rho \\ |y-x'|\leq\xi}} |P(x,y)||v_1(y)-v_1(x')|d\sigma(y) \;+$$

$$+ \int_{\substack{|y|=\rho \\ |y-x'|>\xi}} |P(x,y)||v_1(y)-v_1(x')|d\sigma(y) = I + II$$

Para el primer sumando tenemos que

$$I = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\substack{|y|=\rho \\ 2^{-(k+1)}\xi<|y-x'|\leq 2^{-k}\xi}} |P(x,y)||v_1(y)-v_1(x')|d\sigma(y) \leqslant$$

$$\leq C_n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\rho^2-|x|^2}{\rho\ \xi^n}\ \omega(2^{-k}\xi)(2^{-k}\xi)^{n-1} \leq C_n\ \omega(\xi) \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k(n-1)} \leq C_n\ \omega(\xi).$$

y para el segundo sumando

$$II = \int_{\substack{|y|=\rho \\ \rho\geq|y-x'|>\xi}} + \int_{\substack{|y|=\rho \\ |y-x'|>\rho}} = A + B$$

Sea k_0 el número natural tal que $2^{k_0+1}\xi \geq \rho > 2^{k_0}\xi$

Luego

$$A \leq \sum_{k=0}^{k_0} \int_{\substack{|y|=\rho \\ 2^{k+1}\xi\geq|y-x'|>2^k\xi}} |P(x,y)|\,|v_1(y)-v_1(x')|\,d\sigma(y) \leq$$

$$\leq C_n \sum_{k=0}^{k_0} \frac{\rho^2-|x|^2}{\rho(2^k\xi)^n}\ \omega(2^{k+1}\xi)(2^{k+1}\xi)^{n-1} = C_n \sum_{k=0}^{k_0} \frac{\omega(2^{k+1}\xi)}{2^{k+1}}$$

$$< C_n\ \omega(\xi)\ .\ \log\frac{\rho}{\xi}$$

donde hemos usado la Nota 3 y la definición de k_0.

$$B \leq C_n\ \omega(2\rho)\ \frac{\rho^2-|x|^2}{\rho^{n+1}}\ |\Sigma_\rho| \leq C_n\ \frac{\omega(2\rho)}{2\rho}\ \xi \leq C_n\ \omega(\xi).$$

y con esto queda probada la estimación propuesta originalmente. Ahora podemos acotar las derivadas de v_2 cerca de ∂B_ρ.

Como $B_\xi = B(x,\xi) \subset B_\rho$ donde v_2 es armónica y $\operatorname{osc}_{B_\xi} v_2 < C_n\ \delta(\xi)$ resulta

$$|\nabla v_2(x)| \leq C_n\ \frac{\operatorname{osc}_{B_\xi} v_2}{\xi} \leq C_n\ \frac{\delta(\xi)}{\xi}$$

Esta expresión coincide con la presentada en [Z] (pag.263-Tomo I) para el caso $\delta(\xi) = \xi^\alpha$ $(\alpha < 1)$.

Finalmente veamos que δ es un módulo de continuidad para v_2 en B_ρ.

Para puntos próximos al origen, digamos en $B(0,\frac{1}{2}\rho)$, tenemos que

$$|\nabla v_2(x)| = |\nabla(v_2(x)-v_1(0))| = \left|\int_{|y|=\rho} \nabla_x P(x,y)(v_1(y)-v_1(0))\,d\sigma(y)\right| \leq$$

$$\leq C_n\ \omega(\rho) \leq C_n$$

y en consecuencia resulta un módulo de continuidad Lipschitz para v_2 en $B_{\frac{\rho}{2}}$.

Para puntos x_1, x_2 exteriores a $B(0,\frac{1}{2}\rho)$ distinguimos los siguientes casos:

i) $|x_2-x_2'| \leqslant |x_1-x_1'| < |x_1-x_2|$

$$\begin{aligned}|v_2(x_1)-v_2(x_2)| &\leqslant |v_2(x_1)-v_2(x_1')|+|v_2(x_1')-v_2(x_2')|+|v_2(x_2')-v_2(x_2)| \leqslant\\ &\leqslant \delta(|x_1-x_1'|) + \delta(|x_1'-x_2'|) + \delta(|x_2'-x_2| \leqslant\\ &\leqslant \delta(|x_1-x_2|) + \delta(3|x_1-x_2|) + \delta(|x_1-x_2|) \leqslant\\ &\leqslant C\ \delta(|x_1-x_2|)\end{aligned}$$

ii) $|x_2-x_2'| \leqslant |x_1-x_2| \leqslant |x_1-x_1'|$

Se procede igual que en i), teniendo en cuenta que en $B_\rho \setminus B_{\frac{\rho}{2}}$ se verifica

$$|x_1'-x_2'| \leqslant C\ |x_1-x_2|$$

iii) $|x_1-x_2| < |x_2-x_2'| \leqslant |x_1-x_1'|$

Cualquier punto x en el segmento que une x_1 y x_2 verifica $|x-x'| \geqslant |x_2-x_2'| > |x_1-x_2|$. Entonces aplicando la Nota 3 a la función δ resulta

$$|v_2(x_1)-v_2(x_2)| \leqslant |\nabla v(x)|\,|x_1-x_2| \leqslant C_n\frac{\delta(|x-x'|)}{|x-x'|}\cdot|x_1-x_2| \leqslant C_n\delta(|x_1-x_2|)$$

y con esto queda probado el Lema.

NOTA 5. Sea $\sigma_\gamma(r)=C_\gamma 2^{-|\log r|^\gamma}$ el módulo de continuidad de la función ψ originada en el Problema de Stefan a tiempo fijo ($\psi = 1+u_t$) considerada en el parágrafo 1. Entonces para todo γ' $(0 < \gamma' < \gamma)$ existe $C_{\gamma'} > 0$ (sólo dependiente de γ y γ') tal que la función v del Lema 2 tiene un módulo de continuidad $C_{\gamma'}\sigma_{\gamma'}(r) = C_{\gamma'}.C_\gamma 2^{-|\log r|^{\gamma'}}$.

Con la función auxiliar v se puede demostrar la siguiente desigualdad de tipo Harnack en dos dimensiones.

LEMA 3. *Sea* u *una función definida en* $B_\rho(B_\rho \subset R^2)$ *con las siguientes propiedades:*

a) $u \in C^{1,1}(B\rho)$, $u \geqslant 0$

b) $\Delta u = \psi$, ψ *continua con módulo de continuidad* $C_{\gamma'}\sigma_{\gamma'}$

c) *para algún* $x_1 = (\rho\cos\theta_1, \rho\,\text{sen}\,\theta_1)$ *con* $|\cos\theta_1| > \frac{1}{\sqrt{2}}$ *se verifica*

$u(x_1) = 0$ *y* $\nabla u(x_1) = 0$

d) $u_{xx} \geqslant -M$ *en* B_ρ *donde* $C_{\gamma'}\sigma_{\gamma'}(\rho) < C_1 \dfrac{M}{\log\frac{1}{M}}$, $(M, C_1 << 1)$

Entonces existe una constante universal $C_2 > 0$ *tal que:*

$$u_{xx} \geqslant -M + C_2 \frac{M}{\log \frac{1}{M}} \quad en \quad B_{\frac{\rho}{2}}$$

Dem. A los efectos de mostrar como se emplea la función v daremos una idea de la prueba. Los detalles pueden verse en [C-R] - Lema 1.

Se busca aprovechar la representación de la función armónica $u_{xx}-v$ (en B_ρ) por medio de su integral de Poisson y luego explotar el hecho de que v oscila poco en B_ρ.

Llamemos $\omega = u_{xx} + M - v$. Entonces

$$\begin{cases} \Delta\omega = 0 \quad \text{en} \quad B_\rho \\ \omega \,\big|_{\partial B_\rho} = u_{xx} + M \geqslant 0 \end{cases}$$

Supongamos que x_1 tiene primera coordenada positiva y $e_1 = (1,0)$. Entonces para todo $0 < s < \rho$ resulta $x_1 - se_1 \in B_\rho$, y se verifica

$$\int_\varepsilon^\rho \int_\varepsilon^h \omega(x_1-se_1)dsdh \geqslant M \frac{(\rho-\varepsilon)^2}{2} - \|u\|_{1,1}\ \varepsilon\rho-\rho^2 C_{\gamma'}\sigma_{\gamma'}(\rho)$$

Luego como $P(x_1-se_1,y) \leqslant \frac{C}{s}$ sigue que

$$M \frac{(\rho-\varepsilon)^2}{2} - \|u\|_{1,1}\ \varepsilon\rho-\rho^2 C_{\gamma'}\sigma_{\gamma'}(\rho)$$

$$\leqslant \int_{\partial B_\rho} (u_{xx}(y) + M) \int_\varepsilon^\rho \int_\varepsilon^h P(x_1-se_1,y)dsdhd\sigma(y)$$

$$\leqslant C\ \rho^2 \log \frac{\rho}{\varepsilon}\ .\ \omega(0)$$

y tomando $\varepsilon = \gamma M\rho$ con γ suficientemente pequeña en correspondencia con $\|u\|_{1,1}$, sigue que

$$\omega(0) = u_{xx}(0) + M - v(0) \geqslant C \frac{M}{\log \frac{1}{M}}$$

Aplicando la desigualdad de Harnack usual se obtiene la misma estimación en $B_{\frac{\rho}{2}}$, salvo constante multiplicativa. Finalmente en $B_{\frac{\rho}{2}}$ resulta

$$u_{xx} \geqslant -M+C \frac{M}{\log \frac{1}{M}} - C_{\gamma'}\sigma_{\gamma'}(\rho) \geqslant -M+C_2 \frac{M}{\log \frac{1}{M}}$$

donde C y C_2 son constantes universales.

NOTA 6. No es restrictivo suponer que $M \ll 1$ para la función u (solución del Problema de Stefan) ya que en [C1]-Teorema 4 se prueba que

$$\liminf_{x\to x_1} u_{ii}(x) \geqslant 0 \quad , \quad x_1 \in F_{t_0}$$

sin hipótesis especiales para la temperatura u_t.

Por otra parte observemos que la cota $M \ll 1$, que permite efectuar las estimaciones del Lema 3, condiciona al radio ρ (según (d)) no solamente en correspondencia con $\psi = 1+u_t$, sino también con el punto $x_0 \in F_{t_0}$ cerca del cual se estudia a la solución u (recordemos que $B_\rho = B(x_1,\rho) \subset B(x_0,r_0)$.

Vamos a obtener ahora una acotación por abajo de las segundas derivadas puras (espaciales) de la solución. Consideremos para $x_0 \in F_{t_0}$ un radio $r_0 = r_0(x_0)$ suficientemente pequeño y una bola $B_{r_0} = B(x_0,r_0)$, tales que $u_{ii} \geqslant -M$ en B_{r_0} $(M \ll 1)$ y sea válido el Lema 3 para $\rho < r_0$.

LEMA 4. *Para todo* $\varepsilon > 0$ *tal que* $\frac{1}{2+\varepsilon} < \gamma'$ *existen constantes* $C_1, C_2 > 0$ *y un radio* $\rho(\rho < r_0)$ *dependientes de* x_0, $\|u\|_{1,1}$ $,\varepsilon,\gamma'$ *y* $C_{\gamma'}$, *tales que*

$$u_{ii}(x) \geqslant -C_1 e^{-C_2 |\log d(x,F_{t_0})|^{\frac{1}{2+\varepsilon}}} \quad , \; si \quad x \in B_\rho$$

Dem. La prueba se basa en la aplicación reiterada del Lema 3. Daremos un esbozo de la misma, dado que puede verse en detalle en [C-R]-Teorema 1, y mostraremos con más cuidado el proceso iterativo, que es donde se presentan ligeras diferencias. Vamos a indicar con C y C' constantes universales, $x_1 \in F_{t_0} \cap B_{\frac{r_0}{2}}$, $\rho = \rho(x_0)$ a fijar $(0 < \rho < \frac{r_0}{2})$ y $B_\rho = B(x_1,\rho)$.

Se definen $\omega = u_{ii} - v$ en $\Omega_{t_0} \cap B_\rho$ (v es la función del Lema 2) y

$$\omega^* = \begin{cases} \min\{\omega, -2C_{\gamma'}\sigma_{\gamma'}(\rho)\} & \text{en} \quad \Omega_{t_0} \cap B_\rho \\ -2C_{\gamma'}\sigma_{\gamma'}(\rho) & \text{en} \quad \Lambda_{t_0} \cap B_\rho \end{cases}$$

Entonces resulta que ω^* es superarmónica; y por la elección de r_0 es aplicable el Lema 3 en B_ρ , de donde el conjunto

$$S = \{x/ \; x \in B_{\frac{\rho}{2}} \; , \; \omega^*(x) > -M + C \frac{M}{\log \frac{1}{M}}\}$$

tiene una capacidad del orden de ρ (se usa que $C_{\gamma'}\sigma_{\gamma'}(\rho) < C_1 \frac{M}{\log \frac{1}{M}}$, $C_1 \ll 1$).

Un resultado auxiliar sobre funciones superarmónicas (ver [C-R]) afirma, a partir de cap(s) $\sim \rho$, que

$$\omega^*(x) > -M+C' \frac{M}{\log \frac{1}{M}} \quad \text{en} \quad B_{\frac{\rho}{2}}$$

Entonces dado que $\omega(x) \geq \omega^*(x)$ con $x \in \Omega_{t_0} \cap B\rho$ deducimos

$$u_{ii}(x) \geq -M+C' \frac{M}{\log \frac{1}{M}} - C_{\gamma'}\sigma_{\gamma'}(\rho) \quad \text{si} \quad x \in \Omega_{t_0} \cap B_{\frac{\rho}{2}}$$

y si $\rho = \rho(x_0)$ ha sido elegido suficientemente pequeño de forma que

$$2C_{\gamma'}\sigma_{\gamma'}(\rho) < C' \frac{M}{\log \frac{1}{M}}$$

se deduce en $\Omega_{t_0} \cap B_{\frac{\rho}{2}}$ que

$$u_{ii}(x) \geq -M+C \frac{M}{\log \frac{1}{M}}$$

La idea ahora es aplicar recursivamente esta desigualdad. Es aquí donde debemos hacer una modificación a los argumentos de [C-R]: vamos a construir una sucesión $\{M_k\}$ decreciente a cero, pero más lentamente que la definida en [C-R].

Como $M \ll 1$ resulta en $B_{\frac{\rho}{2}} \cap \Omega_{t_0}$

$$u_{ii}(x) \geq -M+C \frac{M}{(\log \frac{1}{M})^{1+\varepsilon}}$$

Sean $\quad M_0 = M$

$$M_k = M_{k-1} - C \frac{M_{k-1}}{(\log \frac{1}{M_{k-1}})^{1+\varepsilon}} \quad , \quad \text{si} \quad k \geq 1$$

(notemos que la definición es correcta pues de $0 < M_{k-1} \leq M \ll 1$ $(k \geq 1)$ se obtiene $M_k > \frac{M_{k-1}}{2} > 0$). Supongamos por hipótesis inductiva que para $0 \leq m \leq k$

$$u_{ii}(x) \geq -M_m \quad , \quad \text{si} \quad x \in B_{\frac{\rho}{2^m}} \cap \Omega_{t_0}$$

Probaremos ahora que

$$u_{ii}(x) \geq -M_k+C \frac{M_k}{(\log \frac{1}{M_k})^{1+\varepsilon}} \quad , \quad \text{si} \quad x \in B_{\frac{\rho}{2^{k+1}}} \cap \Omega_{t_0}$$

A partir de la definición de M_m tenemos

$$(\log \frac{1}{M_m})^{1+\varepsilon} \frac{\Delta M_m}{M_m} = (\log \frac{1}{M_m})^{1+\varepsilon} \frac{M_{m+1} - M_m}{M_m} = -C$$

Sumando ambos miembros para $0 \leqslant m < k$ y estimando la suma superior e inferiormente por una integral, la igualdad anterior se transforma en

$$\frac{1}{4}\int_{M_0}^{M_k}(\log \frac{1}{t})^{1+\varepsilon} \frac{dt}{t} \leqslant -Ck \leqslant \int_{M_0}^{M_k}(\log \frac{1}{t})^{1+\varepsilon} \frac{dt}{t}$$

donde hemos usado que $M_m \leqslant M_0 = M \ll 1$ y $M_m < 2M_{m+1}$.
Calculando la integral de la derecha obtenemos la estimación por abajo para M_k

$$M_k \geqslant M.e^{-Ck^{\frac{1}{2+\varepsilon}}}$$

y evaluando la integral de la izquierda resulta la acotación por arriba

$$M_k \leqslant e^{-Ck^{\frac{1}{2+\varepsilon}}}$$

Para estudiar la función u_{ii} en $B_{\frac{\rho}{2^{k+1}}}$ notemos que por hipótesis inductiva es $u_{ii}(x) \geqslant -M_k$ en $B_{\frac{\rho}{2^k}}$, de donde construyendo la función auxiliar ω^* en $B_{\frac{\rho}{2^k}}$, obtenemos en $B_{\frac{\rho}{2^{k+1}}} \cap \Omega_{t_0}$

$$u_{ii}(x) \geqslant -M_k + C' \frac{M_k}{\log \frac{1}{M_k}} - C_{\gamma'}\sigma_{\gamma'}(\frac{\rho}{2^k}) \geqslant$$

$$\geqslant -M_k + C' \frac{M_k}{(\log \frac{1}{M_k})^{1+\varepsilon}} - C_{\gamma'}\sigma_{\gamma'}(\frac{\rho}{2^k})$$

siempre que $C_{\gamma'}\sigma_{\gamma'}(\frac{\rho}{2^k}) < C \frac{M_k}{\log \frac{1}{M_k}}$. En consecuencia para concluir la inducción basta probar que:

$$2C_{\gamma'}\sigma_{\gamma'}(\frac{\rho}{2^k}) \leqslant C' \frac{M_k}{(\log \frac{1}{M_k})^{1+\varepsilon}} \qquad (*)$$

Dado que la función $\frac{t}{(\log \frac{1}{t})^{1+\varepsilon}}$ es creciente para valores de la variable próximos a cero, se verifica

$$\frac{M_k}{(\log \frac{1}{M_k})^{1+\varepsilon}} \geqslant \frac{M.e^{-c\,k^{\frac{1}{2+\varepsilon}}}}{(\log \frac{1}{M} + C\,k^{\frac{1}{2+\varepsilon}})^{1+\varepsilon}} \geqslant C\,M\,\frac{e^{-ck^{\frac{1}{2+\varepsilon}}}}{k^{\frac{1+\varepsilon}{2+\varepsilon}}}$$

siempre que $k \geq k_0$ dependiente de M y ε.

Además dado que ρ se supone pequeño

$$\sigma_{\gamma'}(\frac{\rho}{2^k}) = C_\gamma 2^{-\left|\log \rho 2^{-k}\right|^{\gamma'}} \leq C_\gamma 2^{-\left|\log 2^{-k}\right|^{\gamma'}} = C_\gamma 2^{-Ck^{\gamma'}}$$

De las dos últimas desigualdades deducimos que si $k \geq k_1$, dependiente de M,ε,γ' y C_γ (o sea de ψ), vale (*) (notar que $\frac{1}{2+\varepsilon} < \gamma'$). Para los restantes valores del índice k observemos que se puede elegir en el primer paso de la inducción un valor pequeño de ρ de forma tal que (*) valga para $0 \leq k < k_1$.

Luego concluimos que para todo $k \geq 0$

$$u_{ii}(x) \geq -M_k \quad , \quad \text{si} \quad x \in B_{\frac{\rho}{2^k}} \cap \Omega_{t_0}$$

o equivalentemente

$$u_{ii}(x) \geq -e^{-ck^{\frac{1}{2+\varepsilon}}} \quad , \quad \text{si} \quad x \in B_{\frac{\rho}{2^k}} \cap \Omega_{t_0}$$

Para obtener la estimación buscada consideremos un punto $x \in B(x_0,\rho)$. Entonces existen $x_1 \in F_{t_0} \cap B(x_0,\frac{r_0}{2})$ tal que $d(x,F_{t_0}) = |x-x_1| < \rho$ y $k \geq 0$ que verifica

$$2^{-(k+1)}\rho \leq d(x,F_{t_0}) < 2^{-k}\rho$$

De aquí se deduce que $x \in B_{\frac{\rho}{2^k}}$ y que

$$k \geq C' \log \frac{\rho}{2d(x,F_{t_0})}$$

Finalmente la derivada u_{ii} se acota como sigue

$$u_{ii}(x) \geq -e^{-C\left(C' \log \frac{\frac{\rho}{2}}{d(x,F_{t_0})}\right)^{\frac{1}{2+\varepsilon}}} \geq -C_1 e^{-C_2\left(\log \frac{1}{d(x,F_{t_0})}\right)^{\frac{1}{2+\varepsilon}}}$$

con lo que ha quedado probado el Lema.

Ahora estamos en condiciones de obtener el comportamiento asintótico de la frontera libre en un entorno de un punto singular x_0. Aquí son aplicables los argumentos desarrollados por Caffarelli y Rivière en la Segunda Parte de [C-R], que son de naturaleza geométrica y n-dimensionales. La cota inferior de u_{ii} es adecuada para mantener válidos los resultados parciales sin variante en las pruebas. Por lo tanto los enunciamos sin demostración y aclaramos, cuando corresponde, las propiedades de la función ψ que son necesarias en las pruebas.

NOTACION. Indicamos con $\theta(x,y)$ el ángulo entre los vectores x e y , con $\phi_\alpha(r)$ a la función

$$\phi_\alpha(r) = C_1\, e^{C_2\, |\log r|^\alpha}\,, \quad (0 < \alpha \leqslant \gamma')$$

para C_1 y C_2 constantes adecuadas, y finalmente llamamos ρ_0 a una pequeña fracción del radio ρ obtenido en el Lema 4 de forma tal que para todo $x_1 \in B\rho_0$ resulte $B(x_1, r\phi_{\alpha_0}(r)) \subset B_\rho$ para $r < \rho_0$, donde $\alpha_0 = \frac{1}{2+\varepsilon}$.

LEMA 5. *Sean* $x_1 \in \Omega_{t_0} \cap B_{\rho_0}$ *y* $0 < \rho < \rho_0$ *tales que*

i) $d(x_1, F_{t_0}) < \rho^{\varepsilon'}$ $\quad (0 < \varepsilon' < 1)$

ii) $u(x_1) \geqslant C.\rho^2$

Entonces si $r = \rho\, \phi_{\alpha_0}(\rho)$ *, la semibola*

$$H\, B_r(x_1) = \{x : |x - x_1| < r,\ < x - x_1,\ \nabla_x u(x_1) > \ \geqslant 0\}$$

está contenida en Ω_{t_0} .

NOTA 7. Las constantes C_1 y C_2 de ϕ_{α_0} dependen de x_0, $\|u\|_{1,1}$, $C_{\gamma,\varepsilon}$ y γ' (según Lema 4), y además de las constantes ε' y C del Lema 5.

LEMA 6. *Sean* $x \in \bar{\Omega}_{t_0} \cap B\rho_0$ *y* $0 < \rho < \rho_0$. *Entonces existe una constante* $C > 0$, *tal que*

$$\sup_{y \in \Omega_{t_0} \cap \partial B_\rho(x)} u(y) \geqslant C\, \rho^2$$

NOTA 8. La prueba del Lema 6 está basada en la propiedad $\psi = 1 + u_t \geqslant \lambda > 0$ (en B_{ρ_0}), necesaria para aplicar el Principio del Máximo (ver [C1]-Lema 2). Además la constante C sólo depende de λ y de la dimensión espacial.

LEMA 7. *Sean* $x_0 \in F_{t_0}$ *y* $x_1 \in \Omega_{t_0} \cap B\rho_0$. *Entonces para todo* r *tal que*

$$\rho_0 > r \geqslant 2|x_1 - x_0| = 2\rho$$

existe $x_r \in \Omega_{t_0} \cap B\rho_0$ *que verifica:*

i) $|x_r - x_0| = r$

ii) $\theta(x_r - x_0, x_1 - x_0) < \phi_{\alpha_1}^{-1}(r)$, $(\alpha_1 < \alpha_0)$

iii) *existe una semibola* $HB_s(x_r)$ *contenida en* Ω_{t_0}, *con* $s = r\phi_{\alpha_1}(r)$.

COROLARIO 1. Si $x_0 \in F_{t_0}$ es un punto de densidad de Lebesgue cero con respecto a Λ_{t_0}, entonces dada cualquier dirección 1 de origen x_0, y para todo $r < \rho_0$ existe $x_r \in \Omega_{t_0} \cap B_{\rho_0}$ tal que:

i) $|x_r - x_0| = r$

ii) $\theta(1, x_r - x_0) < \phi_{\alpha_1}^{-1}(r)$

iii) existe una semibola $HB_s(x_r)$ contenida en Ω_{t_0}, con $s = r\phi_{\alpha_1}(r)$.

COROLARIO 2. Si $x_0 \in F_{t_0}$ es un punto de densidad de Lebesgue cero con respecto a Λ_{t_0}, entonces para todo $r < \rho_0$

$$\frac{m(B_r \cap \Lambda_{t_0})}{m(B_r)} < \phi_{\alpha_2}^{-1}(r) \quad , \quad (\alpha_2 < \alpha_1)$$

donde m(.) indica la medida de Lebesgue.

LEMA 8. *Si* $x_0 \in F_{t_0}$ *es un punto con densidad de Lebesgue cero con respecto a* Λ_{t_0}, *entonces* u_{ij} *(segunda derivada espacial de la solución* u *en las direcciones* i,j) *tiene un límite* l_{ij} *cuando* x *converge a* x_0 *permaneciendo en el conjunto*

$$A = \{x : x \in \Omega_{t_0} \cap B_{\rho_0},\ d(x, F_{t_0}) \geq |x - x_0| . \phi_{\alpha_3}^{-1}(|x - x_0|)\} \ , \ (\alpha_3 < \alpha_2)$$

Más aún, se verifica

$$|u_{ij}(x) - l_{ij}| \leq \phi_{\alpha_3}^{-1}(|x - x_0|) \quad , \quad si \quad x \in A \cap B_{\rho_0}$$

Dem. A partir de propiedades de la frontera libre y de la solución u puede obtenerse la siguiente representación integral (ver [C-R])

$$u(x) = \int_{B_{2\rho_0} \cap \Omega_{t_0}} \psi(y)E(x-y)dy - \int_{\partial B_{2\rho_0} \cap \Omega_{t_0}} [\partial_\nu u(y)E(x-y) - u(y)\partial_\nu E(x-y)]\, d\sigma(y) =$$

$$= \int_{B_{2\rho_0}} \psi(y)E(x-y)dy - \int_{B_{2\rho_0} \cap \Lambda_{t_0}} \psi(y)E(x-y)dy \ -$$

$$- \int_{\partial B_{2\rho_0} \cap \Omega_{t_0}} [\partial_\nu u(y) E(x-y) - u(y)\partial_\nu E(x-y)]\, d\sigma(y) = u_1(x) + u_2(x) + u_3(x).$$

La función $u_1(x)$ tiene derivadas segundas continuas en B_{ρ_0} con módulo de continuidad $C_{n,\rho_0,\|\psi\|_\infty} \cdot \phi_{\gamma'}^{-1}(r)$ según la Nota 4, y la función $u_{3_{ij}}(x)$ es Lipschitz en B_{ρ_0} con constante C_{n,ρ_0}. Con respecto a $u_2(x)$ se procede igual que en [C-R] para probar que

$$|u_{2_{ij}}(x) + \int_{B_{2\rho_0} \cap \Lambda_{t_0}} \psi(y) E(x_0-y)\, dy| < \phi_{\alpha_3}^{-1}(|x-x_0|) \quad , \text{ si } x \in A \cap B_{\rho_0}$$

y el Lema está demostrado.

Para $x_0 \in F_{t_0}$ consideremos un sistema de coordenadas espaciales (x^1,x^2) tal que $1_{x^1x^2}(x_0) = 0$. Con respecto a las derivadas puras sabemos que $1_{ii}(x_0) \geqslant 0$ por aplicación del Lema 4 y entonces podemos suponer que $1_{x^1x^1}(x_0) = a > 0$ y $1_{x^2x^2}(x_0) = b \geqslant 0$ puesto que $\psi(x_0) = a+b \geqslant \lambda > 0$.

Con esta notación en mente presentamos la siguiente estimación asintótica (a tiempo fijo y dos dimensiones espaciales) de la frontera libre en un entorno de un punto singular.

TEOREMA. *Sea* $x_0 \in F_{t_0}$ $(x_0 \in R^2)$ *un punto singular de la frontera libre, es decir* x_0 *es un punto con densidad de Lebesgue cero con respecto al conjunto* Λ_{t_0}. *Entonces se presenta una de las siguientes posibilidades:*

i) *si* $b > 0$, x_0 *es un punto aislado de* F_{t_0} *y resulta*

$$u(x,t_0) = a.(x^1-x_0^1)^2 + b.(x^2-x_0^2)^2 + o(|x-x_0|^2) \quad , \quad x \in \Omega_{t_0} \cap B_{\rho_0}$$

ii) *si* $b=0$, *llamando* 1_0 *al "eje y" resulta*

$$\Lambda_{t_0} \cap B_{\rho_0} \subset \Gamma_0 = \{x: d(x,1_0) \leqslant \sigma(|x-x_0|).|x-x_0|\} ,$$

donde σ *es la función de tipo* ϕ_α

$$\sigma(r) = C_1 \, e^{-C_2 |\log r|^{-\alpha_4}} \qquad (\alpha_4 < \alpha_3)$$

y además

$$u(x,t_0) = a.(x^1-x_0^1)^2 + o(|x-x_0|^2) \quad , \quad x \in C(\Gamma_0) \cap B_{\rho_0}$$

NOTA 9. Las constantes C_1 y C_2 así como el radio ρ_0 dependen de x_0, t_0, C_γ (constante asociada a u_t), $\|u\|_{1,1}$, ε, γ' y las constantes α_i.

Dem. Teorema. Daremos una prueba para la situación ii), ya que el caso i) es más sencillo y se obtiene con la misma técnica. La demostración es análoga a la realizada en [C-R] de modo que la presentamos sin detalle. Con C y C' se indican constantes universales.

Supongamos por el absurdo que existe un punto $x \in \Lambda_{t_0} \cap B_{\rho_0} \cap C(\Gamma_0)$, y sea $r = |x-x_0|$. Aplicando el Corolario 1 existe un punto x' tal que $|x'-x_0| = \frac{r}{2}$, $\theta(x-x_0, x'-x_0) < \phi_{\alpha_1}^{-1}(r)$ y $HB_s(x') \subset \Omega_{t_0}$ con $s = r\,\phi_{\alpha_1}(r)$.

Llamemos n a la dirección definida por x y x_0, y sea I un segmento de extremos x_1 y x_2 contenido en $HB_s(x')$ y paralelo a n que verifica:

i) $d(I,F_{t_0}) > d(I,C(HB_t(x'))) \geqslant r\ \phi_{\alpha_3}^{-1}(r)$

ii) $|x_1-x_0| \leqslant C\ r\ \phi_{\alpha_3}^{-1}(r)$, $|x_2-x| \leqslant C\ r\ \phi_{\alpha_3}^{-1}(r)$ para $C > 1$ apropiada.

Ahora observemos que $1_{nn}(x_0) = a\ |<n,(1,0)>|^2 \geqslant a(\phi_{\alpha_4}^{-1}(r))^2$, de modo que cualquier punto x_t de I ($x_t = x_1 + t(x_2-x_1)$) satisface

$$u_{nn}(x_t) \geqslant a\ \phi_{\alpha_4}^{-2}(r) - \phi_{\alpha_3}^{-1}(r) \geqslant C'\ \phi_{\alpha_4}^{-2}(r) \quad , \quad (\alpha_4 < \alpha_3)$$

donde se ha empleado la última acotación indicada en Lema 8.

Estimando $u(x_2)$ por el desarrollo de Taylor de 2° orden con origen x_1 y recordando la acotación anterior para $u_{nn}(x_t)$ resulta

$$u(x_2) > C\ r^2\ \phi_{\alpha_4}^{-2}(r) - C\ r^2\ \phi_{\alpha_3}^{-1}(r) \geqslant C'\ r^2\ \phi_{\alpha_4}^{-2}(r)$$

Pero la condición ii) y el hecho de que $u \in C^{1,1}(B_{\rho_0} \cap \Omega_{t_0})$ implican

$$u(x_2) < C\ r^2\ \phi_{\alpha_3}^{-2}(r)$$

que es incompatible con la estimación anterior.

REFERENCIAS

[C-R] L.A.CAFFARELLI and N.M.RIVIÈRE, *Asymptotic behaviour of free boundaries at their singular points*, Annals of Math., 106 (1977), 309-317.

[C-F] L.A.CAFFARELLI and A.FRIEDMAN, *Continuity of the Temperature in the Stefan Problem*, Indiana Math. J., Vol. 28, N°1 (1979), 53-70.

[C 1] L.A.CAFFARELLI, *The regularity of free boundaries in higher dimensions*, Acta Math., 139 (1977), 155-184.

[C 2] L.A.CAFFARELLI, *Some Aspects of the One-Phase Stefan Problem*, Indiana Math. J., Vol.27, N°1 (1978), 73-77.

[F-K] A.FRIEDMAN and D.KINDERLEHRER, *A one phase Stefan Problem*, Indiana Math. J., 24 (1975), 1005-1035.

[C-H] R.COURANT and D.HILBERT, *Methods of Mathematical Physics*, Interscience Publishers, New York-Sidney-London, 1962.

[Z] A.ZYGMUND, *Trigonometric Series*, Vol.1, Cambridge University Press, Cambridge 1968.

INTEC (U.N. Litoral-Conicet)
Guemes 3450
3000 Santa Fe.

Recibido en noviembre de 1981.