Revista de la
Unión Matemática Argentina
Volumen 31, 1983.

ALGEBRAS CON NORMA MULTIPLICATIVA HERMITICA

Christoph Lübbert

ABSTRACT. Let A be an algebra over a field K of charact. $\neq 2$, and $[A:K] = n < \infty$. Let K admit an involution $k \longrightarrow \bar{k}$, and let A have a nondegenerate quadratic form N wich is compatible with the product in A, and which is hermitic with respect to the involution $k \longrightarrow \bar{k}$. If $n > 1$ it will be shown that the involution is trivial ($k=\bar{k}$); hence $n=2$ or $n=4$, and therefore A is a cinematic K-algebra.

1. INTRODUCCION.

En lo que sigue sea A una K-álgebra, o sea, A es un anillo asociativo con unidad 1, que contiene en su centro un cuerpo K. Karzel clasificó las álgebras cinemáticas en 1973/74 [4,5]. Una K-álgebra se llama *cinemática* si $x^2 \in K+Kx$ para todo $x \in A$. Algebras cinemáticas sirven para describir espacios cinemáticos: (P,G) se dice *espacio cinemático* si P es espacio proyectivo (sobre un cuerpo conmutativo) y si G es grupo con $G \subset P$, tal que las rectas g que pasan por el punto unidad $I \in G$ constituyen subgrupos $g \cap G$, y las aplicaciones $L_a: x \longrightarrow ax$, $R_a: x \longrightarrow xa$ $(a \in G)$ se extienden a colineaciones de P. Si A es álgebra cinemática y si U es el grupo de unidades de A, se obtiene un espacio cinemático (P,G) con $P = A/K^*$, $G = U/K^*$. Se conoce un ejemplo clásico, $P = H/R^*$, $G = H_1$, donde H es el álgebra de los cuaterniones de Hamilton y H_1 es el subgrupo de los cuaterniones normalizados. Este espacio es el espacio elíptico de 3 dimensiones (con G=P) de Blaschke [3] y describe los movimientos sobre la esfera S^2. Lübbert [6,8] (1976/79) dió otra definición equivalente en el caso car $K \neq 2$: Una K-álgebra A se dice *cinemática* si A admite un antiautomorfismo involutorio $j: A \longrightarrow A$ (o sea, j es K-lineal, $j \neq 1$, $j^2 = 1$, $j(xy) = j(y)j(x)$ para $x,y \in A$) tal que $j(x) = x$ si, y solo si, $x \in K$. Esta definición tiene la ventaja que se ve inmediatamente que $\langle x,y \rangle \underset{\text{def.}}{=} \frac{1}{2}(x.j(y) + y.j(x))$ es una forma K-bilineal simétrica en A (con valores en K) y con norma correspondiente $N(x) = x.j(x)$, lo que muestra la relación con los cuaterniones.

Con esta definición se ofrece la clasificación de las álgebras cinemáticas según el grado r de degeneración de la norma N, en el caso de dimensión $[A:K] = n$ finita (véase [8]): Sea $r := \dim_K A^{\perp}$ (respecto de la ortogonalidad $x \perp y \Longleftrightarrow \langle x,y \rangle = 0$): Si n=2, obtenemos para A los anillos conmutativos que son cuadráticos sobre K. En el caso $n \geqslant 3$ obtenemos: (a) $r \leqslant n-3$ implica n=4 y r=0, y por consiguiente, A o es álgebra de cuaterniones sobre K o es anillo de las matrices 2x2 sobre K. (b) Si $n \geqslant 3$ y $r = n-2$, existen para todo n varias álgebras cinemáticas no isomorfas (que dependen del índice de la norma N; ver [8]). Por ejemplo, para n=4, K = R, $N(x) \geqslant 0$, se consigue los "cuaterniones degenerados" con los cuales, W. Blaschke y H.R. Müller [2] describían la cinemática del plano euclídeo. (c) Si finalmente $r = n-1$, se obtienen para todo n varias álgebras no isomorfas que son de menor interés geométrico. Sin embargo desarrolló Strubecker [10] en este caso para n=4 y $\dim_K \{x \in A \ / \ x \perp 1, \ xy = 0 \text{ para todo } y \perp 1\} = 1$, K = R, una interesante teoría de los "espacios 1-isotropos". Lübbert [7,9] encontró otras caracterizaciones de estos espacios para n, K arbitrarios.

2. CARACTERIZACION DE LAS h-ALGEBRAS.

Los cuaterniones tienen una norma multiplicativa, $N(xy) = N(x)N(y)$. Los objetivos de esta nota son las preguntas:

(i) ¿Se caracterizan las álgebras cinemáticas por una norma multiplicativa?.

(ii) ¿Qué pasará si reemplazamos la norma N por una forma hermítica?.

Cierta respuesta parcial de la pregunta (i) se encuentra ya en un teorema de Hurwitz (véase [1]) el cual dice: Sea Q la forma cuadrática de una forma bilineal simétrica, no degenerada, en un espacio vectorial sobre un cuerpo K (car.K≠2) con dim V = n. Si existe un producto bilineal $V \times V \longrightarrow V$ con $Q(x.y) = Q(x).Q(y)$ $(x,y \in V)$, entonces n=1,2,4,8.

Vamos a responder a (i) y (ii) con un solo teorema. Sea K un cuerpo conmutativo de característica ≠ 2. Sea

$$\varphi: \lambda \in K \longrightarrow \overline{\lambda} \in K \tag{2.1}$$

un automorfismo involutorio de K ($\overline{\lambda+\mu} = \overline{\lambda}+\overline{\mu}$, $\overline{\lambda.\mu} = \overline{\lambda}.\overline{\mu}$, $\overline{\overline{\lambda}} = \lambda$). Entonces $P := \{\lambda \in K \ / \ \lambda = \overline{\lambda}\}$ es subcuerpo y K se escribe

$$K = P + e\,P \tag{2.2}$$

con un elemento antisimétrico e ($\overline{e} = -e$). (Nota: φ es trivial si e=0, K = P; este caso no se ha excluído en lo que sigue).

(2.3) DEFINICION. *Sea* A *una* K-*álgebra con* $[A:K] = n < \infty$. *Llamamos "h-álgebra" al álgebra* A *si, y sólo si,* A *admite una norma* $N: A \longrightarrow P$ *no degenerada, hermítica respecto de* φ, *y multiplicativa*

$$N(a.b) = N(a).N(b) \quad \textit{para todo } a,b \in A \tag{2.3a}$$

Se muestra inmediatamente las fórmulas para todo $\lambda \in K$, $a \in A$:

$$N(\lambda a) = \lambda\bar{\lambda}N(a), \quad N(1) = 1 \quad , \quad N(a^{-1}) = N(a)^{-1} \text{ (si } a^{-1} \text{existe)} \tag{2.3b}$$

Sea $h: A\times A \longrightarrow K$ la forma hermítica perteneciente a la norma N, $(h(x+y,z) = h(x,z)+h(y,z)$, $h(\lambda x,y) = \bar{\lambda}h(x,y)$, $h(y,x) = \overline{h(x,y)}$, $h(x,x) = N(x))$. Si existe un $e \in K^* = K-\{0\}$ antisimétrico $(\bar{e} = -e \neq 0)$ entonces h se expresa por la norma N de la manera siguiente:

$$h(x,y) = \frac{1}{2}(N(x+y)+e^{-1}N(x+ey)-(1+e^{-1})N(x)-(1-e)N(y)) \tag{2.3c}$$

De (2.3,a,c) se sigue que h es invariante en A:

$$h(ax,ay) = h(xa,ya) = N(a)\ h(x,y), \text{ para todo } a,x,y \in A \tag{2.4}$$

NOTA. Si φ es trivial (e=0), h es simétrica y entonces vale también (2.4).

(2.5) TEOREMA. *Sea* A *una* h-*álgebra sobre* K *(card* $K\neq 2$*) con* $[A:K] = n < \infty$. *Existen solo los siguientes casos:*

(I) $n=1$, $A = K = P+eP$ $(\bar{e} = -e)$, $h(x,y) = \bar{x}y$.

(II) $n > 1$ *implica que el automorfismo* $\varphi: K \longrightarrow K$ *es trivial* (K=P) *,* h *es forma simétrica y la involución* $j(a) := N(a)a^{-1}$ $(a \in U)$ *sobre el grupo* U *de unidades de* A *se extiende a un antiautomorfismo involutorio del álgebra* A*, de manera que* $j(x) = x$ *si, y sólo si* $x\in K=P$. *Entonces* A *es álgebra cinemática sobre* P*, y como* N *es no-degenerada,* $[A:P] = n = 2$ ó 4. *Para* n=2*,* A *es anillo conmutativo y cuadrático sobre* P. *Para* n=4*, obtenemos el álgebra de cuaterniones sobre* P *(si* N *es anisótropo), respectivamente el anillo de matrices* 2x2 *sobre* P *(si* N *tiene índice* 2).

3. DEMOSTRACION DEL TEOREMA (2.5).

Sea A una h-álgebra como antes. Sea

$$U := \{a \in A \ / \ a^{-1} \text{ existe}\} \tag{3.1}$$

el grupo multiplicativo de las unidades de A y sea

$$S := \{x \in A \ / \ N(x) = 0\} \tag{3.2}$$

S es un cono cuadrático no degenerado en A (eventualmente $S = \{0\}$ si N es anisótropo).

(3.3) LEMA. $a \in U$ *si, y sólo si* $N(a) \neq 0$, *lo que dice que el cono* S *es justamente el conjunto de divisores de cero en* A*, porque* $[A:K] < \infty$.

Demostración. (i) Sea $a \in U$; con (2.3,a,b) obtenemos $1 = N(1) = N(a)N(a)^{-1} \Rightarrow N(a) \neq 0$.

(ii) Sea $N(a) \neq 0$. Ya que N no es degenerada existe en A una base de

unidades $e_1,\dots,e_n$ mutuamente h-ortogonales: $h(e_i,e_j) = N(e_i)\,\delta_{ij}$ $(N(e_i) \neq 0)$. La transformación L_a: $x \longrightarrow ax$ es regular en A, pues por (2.4), transforma $\{e_i\}$ en otra base h-ortogonal $\{ae_i\}$.
L_a: $A \longrightarrow A$ es biyectiva ya que $[A:K] < \infty$. Por tanto existe un $b \in A$ con $L_a(b) = ab = 1$; $\Rightarrow a \in U$.
Sobre el grupo de unidades definimos la involución

$$j(a) \underset{\text{def.}}{=} N(a)\,a^{-1} \quad (a \in U) \tag{3.4}$$

Con (2.3,a,b) se verifican inmediatamente las fórmulas

$$j^2 = 1, \quad j(1) = 1, \quad j(\lambda a) = \bar{\lambda} j(a), \quad j(ab) = j(b)j(a)\ , \tag{3.5a}$$

$$N(a) = N(j(a)) = a.j(a) = j(a).a, \text{ para todo } \lambda \in K^*, \quad a,b \in U. \tag{3.5b}$$

El caso (I): $n = [A:K] = 1$, es trivial: $A = K = P+eP$. En este caso, j es nada más que el automorfismo φ, si definimos $j(0) := 0$.
En lo que sigue consideramos el caso (II): $n = [A:K] > 1$.
Sea V el subespacio que es ortogonal a $1 \in A$,

$$V := 1^{\perp} = \{x \in A \ /\ h(1,x) = 0\}\ ,\ \dim_K V = n-1. \tag{3.6}$$

Pongamos $$V^* := V \cap U \tag{3.7}$$

(3.8) LEMA. $j(V^*) = V^*$.

Demostración. $x \in V^* \Rightarrow$ con (2.4) obtenemos $h(1,x^{-1}) = N(x^{-1})h(x,1) = 0 \Rightarrow x^{-1} \in V^*$, $j(V^*) \subset V^*$. De $j^2 = 1$ se sigue también $V^* \subset j(V^*)$.
Llamamos "*hiperplano*" a cada K-subespacio H de A con $\dim_K H = n-1$. Sea $H^{\perp}$ el complemento h-ortogonal de H, $\dim_K H^{\perp} = 1$. Si $H^{\perp} \subset H$, llamaremos a H hiperplano *tangente* al cono S.

(3.9) LEMA. (a) *Para todo* $a \in U$, aV *es hiperplano no-tangencial de* S, *y tenemos que* $a \perp aV$, $aV = Va$.
(b) *Para todo hiperplano con* $H^{\perp} \not\subset H$ *existe un* $a \in U$ *tal que* $H = aV$.

Demostración. (a) El hiperplano V no es tangencial a S porque $K^{\perp} = V$, $K \not\subset S$. Para $a \in U$, la transformación L_a: $x \longrightarrow ax$ es regular; por eso aV también es hiperplano; aV no es tangente a S porque $aU = U$.
$a \perp aV$ y $aV = Va$ salen de (2.4) y (3.6).
(b) Sea H hiperplano con $H^{\perp} \not\subset H$. Como N no es degenerada, existe un $a \in U$ que es ortogonal a H. $\Rightarrow H = a^{\perp} = (a.1)^{\perp} = a.1^{\perp} = aV$.
Sea T K-subespacio de A; vamos a llamar subespacio *reducido* al conjunto $T^* := T \cap U$.

(3.10) LEMA. (a) j *permuta los hiperplanos reducidos no tangentes a* S,

$$j(aV^*) = j(a)V^* \quad (a \in U) \tag{3.10a}$$

(b) j *permuta los subespacios de dimensión* 1 *y* 2,

$$j(Ka+Kb)^* = (Kj(a)+Kj(b))^* \quad (a,b \in U) \tag{3.10b}$$

Demostración. (a) es consecuencia inmediata de (3.8) y (3.9).

(b) Si n=2 ó si a,b son linealmente dependientes sobre K, la fórmula es trivial. Sea entonces $n > 2$ y sea $T := Ka+Kb$ subespacio de dimensión 2. T es intersección de n-2 hiperplanos no tangentes y mutuamente h-ortogonales: $T = \bigcap_{i=1}^{n-2} a_i V$ con $a_i \in U$, $h(a_i,a_j) = 0$ $(i \neq j)$. Entonces (a) implica que $j(T^*) = \bigcap_i j(aV^*) = \bigcap_i j(a)V^*$. Además se sigue de $h(a_i,a_j) = 0$ que $h(a_i^{-1},a_j^{-1})) = N(a_i^{-1})N(a_j^{-1})h(a_j,a_i) = 0$ y luego $j(T^*)$ es subespacio de 2 dimensiones.

Ahora estamos en condiciones de demostrar

(3.11) TEOREMA. Si $[A:K] = n > 1$ *el automorfismo* $\varphi: K \longrightarrow K$ *es trivial y la involución* $j: U \longrightarrow U$ *se extiende al antiautomorfismo*

$$j(\xi+x) = \xi - x \quad \textit{para todo } \xi \in K,\ x \in V \tag{3.11a}$$

del álgebra A.

Demostración. Por el momento sea $z = \xi + x \in U$ con $\xi \in K^*$, $x \in K^*$. Luego (3.10b) implica que existen $\lambda = \lambda_z$, $\mu = \mu_z$ en K^* tal que

$$j(\xi+x) = \lambda\overline{\xi} + \mu j(x) \tag{3.11b}$$

y tenemos que $\quad N(z) = \xi\overline{\xi} + N(x) \in P$

$$z.j(z) = (\lambda\xi\,\overline{\xi} + \mu N(x)) + (\lambda\,\overline{\xi}x + \xi\mu j(x)) \in P \tag{3.11c}$$

$$N(j(z)) = \lambda\overline{\lambda}\,\xi\overline{\xi} + \mu\,\overline{\mu}N(x) \in P \tag{3.11d}$$

Como el segundo término de (3.11c) es de V, se anula, o sea

$$j(x) = -\frac{\lambda\overline{\xi}}{\mu\xi}\,.\,x = \varepsilon_x.x \tag{3.11e}$$

siendo $\varepsilon_x = -\frac{\lambda\overline{\xi}}{\mu\xi}$ sólo dependiente de x.

Luego $N(x) = N(j(x))$ implica

$$\varepsilon_x.\overline{\varepsilon}_x = 1, \tag{3.11f}$$

lo que implica $\lambda\overline{\lambda} = \mu\overline{\mu}$. Con $N(z) = N(j(z))$ y (3.11d) obtenemos

$$\lambda\overline{\lambda} = \mu\overline{\mu} = 1. \tag{3.11g}$$

Finalmente obtenemos de $N(z) = z.j(z)$ y (3.11c):

$$\xi\overline{\xi} + N(x) = \lambda\xi\overline{\xi} + \mu N(x) \in P$$

$$\xi\overline{\xi} + N(x) = \overline{\lambda}\xi\overline{\xi} + \overline{\mu}N(x) \in P.$$

Multiplicando estas últimas ecuaciones, nos da por (3.11g)

$2\xi\bar{\xi}N(x) = (\lambda\bar{\mu} + \mu\bar{\lambda})\ \xi\bar{\xi}N(x)$ de donde $2\lambda\mu = \lambda^2 + \mu^2$, o sea

$$\lambda = \mu \tag{3.11h}$$

y por eso $\varepsilon_x = -\frac{\bar{\xi}}{\xi}$. Ya que $\mathrm{car}K \neq 2$, los têrminos $\xi \in K^*$ y $x \in V^*$ no dependen uno del otro en la expresiôn $z = \xi + x \in U$.

Por tanto

$$\varepsilon_x = -1 \quad \text{para todo } x \in V^* \quad y \ \xi = \bar{\xi} \text{ para todo } \xi \in K^* \tag{3.11i}$$

Es decir, $j(x) = -x$ para todo $x \in V^*$, y el automorfismo $\xi \longrightarrow \bar{\xi}$ es *trivial:* $K = P$. Con eso y con (3.11h) nos queda $\lambda = \mu = 1$, o sea

$$j(\xi+x) = \xi - x \text{ para todo } \xi \in K^*,\ x \in V^*,\ \xi+x \in U.$$

Si definimos además: $j(\xi+x) \underset{\text{def.}}{=} \xi - x$ para $\xi+x \in S$, es fâcil demostrar que j es antiautomorfismo del âlgebra A con $j(z) = z$ si, y sôlo si, $z \in K = P$.

Con esto queda demostrado que un h-âlgebra de dimensiôn finita es nada más que un âlgebra cinemâtica con norma no degenerada.

El resto del teorema (2.5) es conocido (vêase [5],[8]).

BIBLIOGRAFIA

[1] LAM,T.Y.A., *The Algebraic Theory of Quadratic Forms*, Edit. W.A. Benjamin, 1973.

[2] BLASCHKE,W., MÜLLER,H.R., *Ebene Kinematik*, Edit. Oldenbourg, München, 1956, (Alemania).

[3] BLASCHKE,W, *Kinematik und Quaternionen*, Edit. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1960, (Alemania).

[4] KARZEL,H., *Kinematic spaces*, Istit. Naz. Alta Math., Symposia Mathematica, 11 (1973), 413-439.

[5] KARZEL,H., *Kinematische Algebren und ihre geometrischen Ableitungen*, Abhandlungen Mathem. Seminar Univ. Hamburg, 41 (1974), 158-171. (R.F.Alemania).

[6] LÜBBERT,C., *Die kinematischen Geradenabbildungen*, Preprint 278, Universidad Técnica de Darmstadt (R.F.Alemania), 1976.

[7] LÜBBERT,C., *Eine Kennzeichnung der Grenzgruppe des einfach-isotropen Raumes* J^3, Sitzungsberichte der Österreichischen Akademie der Wissenschaften, Mathem.-natw. KI.II, 187 / 8-10 (1978), 313-323, (Austria).

[8] LÜBBERT,C., *Über kinematische Geradenabbildungen*, Abhandlungen der Braunschweigischen Wiss.Gesellschaft, 30 (1979), 35-49. (R.F. Alemania).

[9] LÜBBERT,C., *Zerlegungen der Grenzgruppe des einfach-isotropen Raumes* J_n, Journal of Geometry, 14/1 (1980), 59-70. Edit.: Birkhäuser, Basel (Switzerland).

[10] STRUBECKER,K., *Beiträge zur Geometrie des isotropen Raumes*, Journal reine u. angew. Mathematik, 178 (1938), 135-173. (Alemania).

Univ. Nac. del Centro de
la Pcia. de Bs. Aires,
Facultad de Ciencias Exactas
Pinto 399
7000 Tandil

Recibido en diciembre de 1982.