Revista de la
Unión Matemática Argentina
Volumen 31, 1984.

COMPARACION DE SOLUCIONES DE LAS ECUACIONES DE PRANDTL EN EL CASO ESTACIONARIO BIDIMENSIONAL

Julio E. Bouillet

SUMMARY.

Solutions $\tilde{u} > 0$, $\tilde{v}$ of Prandtl's boundary layer equations (1,1),(1,2) for steady viscous flows along a flat plate are considered (cf. [1], [2]). It is customary that the qualitative study of the solutions to these equations be performed by means of the classical maximum principles for parabolic equations, applied either directly to (1,1), (1,2) or through the von Mises transformation (cf. [3] and references therein). This application requires the smoothness of solution - and derivatives - up to the boundaries, including some matching at the leading edge x=0 of the plate for the initial profile (2,2), and the explicit statement of condition (2,3).

Although the latter may be a sensible condition physically speaking, conditions on the behaviour of the solution near the leading edge are far from satisfactory. In this paper the von Mises transformed equation (3) is employed, (2,3) is replaced by a boundedness condition on the behaviour of u, u_η at $\eta \to \infty$ (cf. (6,1),(7,5)) which is a consequence of the boundedness of u in the newtonian case, and (2,2) is defined in the L^1 sense: $\|u(x,.) - u_0(.)\|_{L^1_{loc}} \to 0$ as $x \to 0+$ (cf. (4,3) for its use for comparison purposes).

Two comparison theorems (Sections III and IV) are presented which are valid in a class of solutions (4,1),(4,2),(4,3) that includes the classical solutions of [4] (this class was introduced in [5], cf. also [6]). The restrictive condition $U'(x) \geqslant 0$ of Section III is removed in IV by the introduction of (7,3),(7,4): Theorem 2 of IV furnishes uniqueness of solutions with initial profile monotone increasing (cf. Section V, Corollaries).

The method of proof applies also to certain fluids with non-newtonian constituting terms.

I. Las ecuaciones de L. Prandtl, de la capa límite sobre una placa plana que ocupa el semieje $x \geqslant 0$ son ([1],[2]) (1,1) $$\widetilde{u}\widetilde{u}_x + \widetilde{v}\widetilde{u}_y = (\nu\widetilde{u}_y)_y + U(x)U'(x) ,$$

(1,2) $$\widetilde{u}_x + \widetilde{v}_y = 0$$

La ecuación de Bernoulli $2p(x) + U^2(x) =$ constante relaciona la presión $p(x)$ con la velocidad $U(x) > 0$ del fluido lejos de la placa, considerado no viscoso. Las condiciones sobre las componentes $\widetilde{u},\widetilde{v}$ de la velocidad en la capa límite donde el fluido tiene viscosidad cinemática ν son

(2,1) $$\widetilde{u}(x,0) = 0 \quad , \quad \widetilde{v}(x,0) = \widetilde{v}_0(x)$$

(2,2) $$\widetilde{u}(0,y) = \widetilde{u}_0(y) \quad \text{(perfil inicial)}$$

(2,3) $$\lim_{y\to+\infty} \widetilde{u}(x,y) = U(x) \text{ uniforme en } [0,X], \text{cualquiera sea } X.$$

En el caso tratado habitualmente, en que $\widetilde{u},\widetilde{v}$ son soluciones clásicas, $\widetilde{v}(x,0) = 0$, $\widetilde{u}_0'(0) > 0$, $\widetilde{u}$, $\widetilde{u}_x$, $\widetilde{u}_y$, continuas en $[0,X] \times [0,\infty)$, basta suponer $U' > 0$ para que $u > 0$ y $u_y(x,0) > 0$, es decir, no haya reflujo ni separación.

En este trabajo consideraré exclusivamente el caso laminar sin reflujo, eso es, $\widetilde{u}(x,y) > 0$ en $(0,X) \times (0,+\infty) =: \widetilde{G}$.

Es sabido ([3]) que, si $\widetilde{u}$ es acotada, por ejemplo, entonces de $\lim_{y\to\infty} \widetilde{u}(0,y) = U(0)$ resulta $\lim_{y\to\infty} \widetilde{u}(x,y) = U(x)$ uniforme en $[0,X]$.

Esto sugiere la posibilidad de obviar la condición en $y = +\infty$, como se verá más adelante ((6,1) y (7,5)).

La condición $\widetilde{v}(x,0) = \widetilde{v}_0(x)$ permite considerar casos de succión ($\widetilde{v}_0 \leqslant 0$) o soplido ($\widetilde{v}_0 \geqslant 0$) de la capa límite sobre la placa; el caso en que ésta es impenetrable ($\widetilde{v}_0 = 0$) es el más corriente. En [4] se presentan diversos resultados de existencia de solución clásica para (1,1),...,(2,3), probándose en uno de ellos la existencia de soluciones $\widetilde{u} > 0$, aún en el caso en que $U'(x) \leqslant 0$, con tal que $\widetilde{v}_0(x)$ sea negativa y suficientemente grande en módulo en los puntos donde $U'(x) < 0$. Vale decir, si la succión es suficientemente intensa en los puntos donde $p'(x) > 0$ ("gradiente de presiones desfavorable"), la capa límite no se separa, y no hay reflujo, claro.

La suposición $\widetilde{u} > 0$ permite introducir la transformación de variables de von Mises:

$$\eta = \int_0^y \widetilde{u}(x,s)\, ds - \int_0^x \widetilde{v}(s,0)\, ds \quad , \quad \widetilde{u}(x,y) = u(x,\eta)$$

Sea G el nuevo dominio en las variables (x,η), donde $x \in (0,X)$ y $\eta > -\int_0^x \tilde{v}(s,0)\,ds$.

La ecuación de la continuidad (1,2) queda automáticamente satisfecha, y (1,1) se escribe ahora

$$u_x = (\nu(uu_\eta))_\eta + U(x)U'(x)/u \tag{3}$$

Es una ecuación de tipo parabólico, que degenera pues $u=0$ en $\eta = -\int_0^x \tilde{v}(s,0)\,ds$ - curva que corresponde a $y=0$ -, y que exhibe una fuente no lineal, con singularidad sobre dicha curva.

A pesar de estas complicaciones emplearé la ecuación (3) en lugar de la más conocida $(u^2 - U^2)_x = \nu.u.(u^2 - U^2)_{\eta\eta}$ y arrastraré la expresión $\nu(uu_\eta)$, que sugiere la posibilidad de aplicar estos resultados a fluidos con términos de tensiones más complejos que el newtoniano $\nu.\tilde{u}_{yy}$.

II. El objeto de este trabajo es comparar dos perfiles de velocidades $u_1(x,\eta)$, $u(x,\eta)$ que provienen vía la transformación de von Mises de dos soluciones $\tilde{u}_1,\tilde{v}_1$ y $\tilde{u},\tilde{v}$ de (1,1) (1,2) de datos $U_1(x)$, $U(x)$, $\tilde{u}_1(x,0) = \tilde{u}(x,0) = 0$, $\tilde{v}_1(x,0)$, $\tilde{v}(x,0)$ y perfiles iniciales $\tilde{u}_1(0,y)$, $\tilde{u}(0,y)$ respectivamente.

Se sobreentiende que $u_1(x,\eta)$ y $u(x,\eta)$ son soluciones de las correspondientes ecuaciones (3).

El propósito es obtener condiciones bajo las cuales $u_1(x,\eta) \leqslant u(x,\eta)$, y esto resultará de demostrar que $D = \{(x,\eta) : u_1(x,\eta) > u(x,\eta)\}$ es vacío.

Es claro que, en las variables de von Mises, u_1 y u están definidas en dominios $G_1 = \{(x,\eta) : x \in (0,X),\ \eta > -\int_0^x \tilde{v}_1(s,0)\,ds\}$ y $G = \{(x,\eta) : x \in (0,X),\ \eta > -\int_0^x \tilde{v}(s,0)\,ds\}$ donde la hipótesis $\tilde{v}_1(x,0) \leqslant \tilde{v}(x,0)$ implica que $G_1 \subset G$. Como $u_1 > 0$, $u > 0$ es claro que $D \subset G_1$.

Por regla general se consideran soluciones clásicas de (3). Cabe precisar, sin embargo, que de las soluciones u_1,u supondré que son continuas y que $\chi_{G_1}.u_{1x}$, $\chi_G.u_x$, $\chi_{G_1}\nu(u_1u_{1\eta})$ y $\chi_G\nu(uu_\eta)$ pertenecen a

$$(4,1) \qquad L^1_{loc}((0,X);L^1_{loc}(-\infty,+\infty))$$

al igual que $\chi_{G_1}(\nu(u_1 u_{1\eta}))_\eta$ y $\chi_G(\nu(uu_\eta))_\eta$ y las ecuaciones se verifican en casi todo (x,η).

Con estas hipótesis existen los límites

$$(4,2) \qquad \lim_{\eta\downarrow -\int_0^x \tilde{v}_1(s,0)ds} u_1(x,\eta) \quad y \quad \lim_{\eta\downarrow -\int_0^x \tilde{v}(s,0)ds} u(x,\eta)$$

que serán nulos para casi todo x de acuerdo a (2,1).

La condición $u_1(0,\eta) \leqslant u(0,\eta)$ sobre los perfiles iniciales se entenderá así:

$$(4,3) \qquad \| (u_1(x,.)-u(x,.))^+ \|_{L^1(-\infty,m)} \longrightarrow 0 \ , \ x \longrightarrow 0+ \ , \text{ para todo } m>0.$$

La asunción del perfil inicial para $x \to 0+$ en norma L^1 tiende a obviar condiciones de compatibilidad entre $u(0,\eta)$ y $u(x,0)$ en $(0,0)$, eso es, en el borde de ataque de la placa.

El siguiente resultado preliminar ilustrará el método empleado

III. TEOREMA 1. *Si* $u_1(x,\eta) > 0$, $u(x,\eta) > 0$, $x \in [0,X]$, *son acotadas* ($\leqslant M$) *cuando* $\eta \to \infty$; *si* $\tilde{v}_1(x,0) \leqslant \tilde{v}(x,0)$, $x \in [0,X]$, $u_1(0,\eta) \leqslant$ $\leqslant u(0,\eta)$ *según* (4,3) *y*

$$(5,1) \qquad U_1(x)U_1'(x) \leqslant U(x)U'(x) \quad , \quad U(x)U'(x) \geqslant 0 \ ,$$

entonces $u_1(x,\eta) \leqslant u(x,\eta)$ *en* G_1.

Demostración. Sea $D = \{(x,\eta): u_1(x,\eta) > u(x,\eta)\}$. Es claro que $D \subset G_1$; sea $\chi = \chi_D$ su función característica. Tomando

$$n > m > \max\{-\int_0^x v_1(s,0)\, ds \ , \ x \in [0,X]\} \quad , \quad \text{sea}$$

$$\begin{aligned} T(\eta) = T_{n,m}(\eta) &= 1 \quad \text{en} \quad (-\infty,m) \ , \\ &= 0 \quad \text{en} \quad (n,+\infty) \ , \\ &= \text{lineal en } (m,n). \end{aligned}$$

Multiplicando por $T(\eta)$ a

$$(u_1-u)_x = \{\nu(u_1 u_{1\eta}) - \nu(uu_\eta)\}_\eta + \frac{U_1 U_1'}{u_1} - \frac{U\, U'}{u}$$

e integrando sobre D entre $x = a$ y x , se obtiene (luego de aplicar el teorema de Fubini a $\chi.(u_1-u)_x$ (cf. [5], [6])):

$$\int_{-\infty}^{\infty} T(\eta)(u_1-u)^+(x,\eta)\, d\eta - \int_{-\infty}^{\infty} T(\eta).(u_1-u)^+(a,\eta)\, d\eta \leqslant$$

$$\leqslant \int_a^x ds \int_{-\infty}^{\infty} \chi(s,\eta)\{T(\eta).(\nu(u_1u_{1\eta}) - \nu(uu_\eta))\}_\eta d\eta +$$

$$+ \int_a^x ds\, (n-m)^{-1} \int_m^n \chi(s,\eta)(\nu(u_1u_{1\eta}) - \nu(uu_\eta))\, d\eta +$$

$$+ \int_a^x ds \int_{-\infty}^{\infty} \chi(s,\eta).T(\eta)(U_1U_1' - UU')u_1^{-1}\, d\eta +$$

$$+ \int_a^x ds \int_{-\infty}^{\infty} (-UU')^+(u_1u)^{-1}.T(\eta).(u_1-u)^+(s,\eta)\, d\eta .$$

En el 2° miembro de (6), el cuarto sumando es nulo por hipótesis (y (6) fue escrita así para ser empleada en el Teorema 2); el tercer sumando es $\leqslant 0$ y la eventual singularidad de u_1^{-1} no afecta los razonamientos que siguen. También es $\leqslant 0$ el primero: para cada $s \in (a,x)$ fijo, el dominio de integración en η es una unión de intervalos donde $u_1 > u$, y en los extremos de los cuales $u_1 = u$: es fácil ver que entonces los términos integrados en η en esos intervalos son $\leqslant 0$ en los extremos derechos y $\geqslant 0$ en los izquierdos, resultando $\leqslant 0$ la diferencia.

Resta estudiar el segundo término, donde $n > m$ pueden elegirse en forma arbitraria: se ve, integrando $\frac{\nu}{2}((u_1^2)_\eta - (u^2)_\eta)$ y usando la acotación de u_1, u que

$$\frac{\nu/2}{n-m} \left| \int_a^x [\chi(u_1^2 - u^2)(s,n) - \chi(u_1^2 - u^2)(s,m)]\, ds \right| \leqslant \frac{\nu/2}{n-m} .X.4M^2$$

y sigue que tomando m arbitrario y n suficientemente grande

$$\| (u_1 - u)^+(x,.)\|_{L^1(-\infty,m)} \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} T_{n,m}(\eta)(u_1-u)^+(x,\eta)\, d\eta \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-\infty}^{\infty} T_{n,m}(\eta)(u_1-u)^+(a,\eta) d\eta + \varepsilon/2 \leqslant \| (u_1-u)^+(a,.)\|_{L^1(0,n)} + \varepsilon/2$$

Por (4,3) haciendo $a \to 0+$ resulta entonces

$$\| (u_1-u)^+(x,.)\|_{L^1(-\infty,m)} = 0 \text{ , para todo } x \in (0,X) \text{ y } m > 0 ,$$

de donde D es vacío y $u_1 \leqslant u$ en G_1.

Es de destacar que no se usó la condición habitual $\lim_{n\to\infty} u(x,\eta) = U(x)$, y que aún la hipótesis de acotación de u_1 y u es claramente excesiva, siendo suficiente suponer para cada función una cota independiente de a y x para

$$(6,1) \qquad \int_a^x (n-m)^{-1} \int_m^n \chi(s,\eta)\ \nu(uu_\eta)\ d\eta\ ds$$

que tienda a cero para $n,m \to \infty$.

Asimismo, el término νuu_η del tensor de tensiones podría ser una función creciente de uu_η, tal como lo sugiere la notación usada $\nu(uu_\eta)$: por ejemplo $\nu(uu_\eta) = \text{const.}|uu_\eta|^{k-1}.uu_\eta$ que corresponde al caso de fluidos no newtonianos con una ley constitutiva potencial; en variables físicas cons.$|\tilde{u}_y|^{k-1}.\tilde{u}_y$. Más aún, podría admitirse que $\nu = A(x,\eta,u,u_\eta)$ bajo ciertas restricciones sobre A; el primer término de (6) es $\leqslant 0$ en estos casos (cf. [5], [6]) y bastará imponer una condición que controle el correspondiente promedio (6,1) (ver comunicación [7]).

La hipótesis (5,1), $U(x)U'(x) \geqslant 0$, importa suponer para el flujo u,v un "gradiente favorable de presiones" $p'(x) \leqslant 0$, de acuerdo a la fórmula de Bernoulli. Es sabido que - al menos para soluciones clásicas de (1,1) (1,2), caso newtoniano - esto implica $u(x,\eta) > 0$.
En el teorema siguiente voy a prescindir de esta condición $UU' =$ $= -p'(x) \geqslant 0$, pero deberé introducir otras hipótesis que permitan tratar el término singular de la ecuación (3).

IV. TEOREMA 2. *Sean* $u_1(x,\eta) > 0$, $u(x,\eta) > 0$ *soluciones de respectivas ecuaciones* (3) *en* G_1, G, *con*

(7,1) $U_1(x)U_1'(x) \leqslant U(x)U'(x)$, $x \in [0,X]$,

(7,2) $\tilde{v}_1(x,0) \leqslant \tilde{v}(x,0)$, $x \in [0,X]$, *y por lo tanto* $G_1 \subset G$;

(7,3) *Sea* $u(x,\eta) \geqslant \alpha > 0$ *si* $\eta \geqslant \eta_\alpha$, *para todo* $x \in [0,X]$ (*sería una consecuencia obvia de* (2,3) *si* $U(x) > 0$ *en* $[0,X]$) ;

(7,4) $u_1(0,\eta) \leqslant u(0,\eta+\varepsilon) =: u_\varepsilon(0,\eta)$ *para todo* $\varepsilon > 0$ *suficientemente pequeño* (*en el sentido* (4,3));

(7,5) *Finalmente, sea* $J(x) = J_{m,n}(x)$ *una cota independiente de* a *para el término*

$$\int_a^x ds(n-m)^{-1}\ \left|\int_m^n \chi(s,\eta)(\nu(u_1u_{1\eta}) - \nu(uu_\eta))\ d\eta\right|$$

tal que $J_{m,n}(x)$ *tiende a cero acotada por una función integrable cuando* $m,n \to \infty$ *(para el caso newtoniano, basta la acotación de* u_1, u *como ya se ha visto).*
Entonces $u_1(x,\eta) \leqslant u(x,\eta+\varepsilon)$, *para todo* $\varepsilon > 0$ *suficientemente pequeño, es decir,* $u_1(x,\eta) \leqslant u(x,\eta)$.

Demostración. La función $u_\varepsilon(x,\eta) = u(x,\eta+\varepsilon)$ está definida en $G_\varepsilon = \{(x,\eta): \eta > -\int_0^x \tilde{v}(s,0)\,ds - \varepsilon\}$ y verifica allí la ecuación (3). Sea $D = \{(x,\eta): u_1(x,\eta) > u_\varepsilon(x,\eta)\}$: como $D \subset G_1$, D se encuentra a una distancia positiva del borde inferior de G_ε:

$$-\int_0^x \tilde{v}_1(s,0)\,ds \geqslant -\int_0^x \tilde{v}(s,0)\,ds > -\int_0^x \tilde{v}(s,0)\,ds - \varepsilon\ ;$$

resulta u_ε estrictamente positivo en $\overline{D}$ y por la condición (7,3), $\delta = \delta_\varepsilon = \inf\{u_\varepsilon(x,\eta);(x,\eta) \in D\} > 0$.
Llevando estas consideraciones a (6) y poniendo $M = \max\{(-UU')^+ : x \in [0,X]\}$ se obtiene, con $a > 0$ y $\|.\| = \|.\|_{L^1(-\infty < \eta < \infty)}$,

$$\|(T(u_1-u_\varepsilon)^+)(x,.)\| \leqslant \|(T(u_1-u_\varepsilon)^+(a,.)\| + J_{m,n}(x) + $$
$$+ M\delta^{-2}\int_a^x \|(T(u_1-u_\varepsilon)^+)(s,.)\|\,ds\ .$$

Esta es una desigualdad de tipo Gronwall de la cual surge

$$\|(T(u_1-u_\varepsilon)^+)(x,.)\| \leqslant e^{M\delta^{-2}(x-a)}\|T(u_1-u_\varepsilon)^+(a,.)\| + $$
$$+ J_{m,n}(x) + M\delta^{-2}\int_a^x e^{M\delta^{-2}(x-s)} J_{m,n}(s)\,ds\ .$$

Tomando entonces m arbitrario y $n > m$ suficientemente grande, los dos últimos sumandos de (6) son $< o(m,n)$, y

$$\|(u_1-u_\varepsilon)^+(x,.)\|_{L^1(-\infty,m)} \leqslant \|(T(u_1-u_\varepsilon)^+)(x,.)\| \leqslant$$
$$\leqslant e^{M^{\delta-2}X}\|(T(u_1-u_\varepsilon)^+)(a,.)\| + o(m,n) \leqslant$$
$$\leqslant e^{M\delta^{-2}X}\|(u_1-u_\varepsilon)^+(a,.)\|_{L^1(-\infty,n)} + o(m,n)$$

y haciendo $a \to 0+$ resulta $\|(u_1-u_\varepsilon)^+(x,.)\|_{L^1(-\infty,m)} = 0$, m arbitrario, luego $u_1(x,\eta) \leqslant u(x,\eta+\varepsilon)$ en G_1, para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño. El teorema queda así demostrado.

V. COMENTARIOS.

La condición (7,4) se cumple si $u_1(0,\eta) \leqslant u(0,\eta)$ y una al menos de las funciones es monótona (no decreciente). Si ambas son no decrecientes, entonces también sus correspondientes $\tilde{u}_1(0,y)$, $\tilde{u}(0,y)$ lo son y recíprocamente; la condición (7,4) sobre los perfiles iniciales (en las variables de von Mises) parece menos restrictiva y más manejable que la condición clásica de que uno de los perfiles $\tilde{u}_1(x,y)$, $u(x,y)$ sea cóncavo, condición ésta que aparece naturalmente para aplicar el principio del máximo a (3) escrita en la forma $(u^2)_x = \nu u(u^2)_{\eta\eta} + (U^2)'$, en el caso newtoniano.

COROLARIO 1 AL TEOREMA 2. Si $u(0,\eta)$ es monótona, la solución del problema del perfil inicial es única.

Un candidato natural para ocupar el papel de $u(x,\eta)$ es $U_1(x)$, la velocidad del flujo potencial no viscoso supuesto que $U_1(x) \geqslant \alpha > 0$ en $[0,X]$. Entonces $D = \{u_1 > u := U_1\} \subset G_1 \subset G$, (7,2) es superflua y (7,3), (7,4) y (7,5) inmediatas. Se tiene entonces el

COROLARIO 2 AL TEOREMA 2. Sea $U(x) \geqslant \alpha > 0$, $x \in [0,X]$, $\tilde{u}(x,y) > 0$ y $\tilde{u}(0,y) = u(0,\eta) \leqslant U(0)$.

Entonces $\tilde{u}(x,y) = u(x,\eta) \leqslant U(x)$, $x \in [0,X]$.

Es decir, la velocidad del flujo no viscoso nunca es excedida corriente abajo, supuesta la ausencia de reflujo. Además, siempre en ausencia de reflujo, el perfil $u(x,\eta)$ responde "instantáneamente" (en el mismo x) a una caída de la velocidad $U(x)$.

Es interesante destacar que la condición (7,5) ha reemplazado a (2,3). Si se define $w := uu_\eta$, es fácil ver que w satisface - hipótesis de suavidad mediante - a la ecuación

$$w_x = (u(\nu(w))_\eta)_\eta .$$

Esta ecuación es del tipo ya discutido, pero carece de término que contenga a $U(x)U'(x) = -p(x)$.

Se puede ver entonces que, si se imponen condiciones sobre el crecimiento de u y u_η en $\eta \to +\infty$, el número de cambios de signos de w (i.e., los de u_η) no puede exceder al de $w(0,\eta) = u(0,\eta)\ u_\eta(0,\eta)$ (ver [5]). En particular, si $u(0,\eta)$ es monótona creciente, también tendrá que serlo $u(x,\eta)$.

Con un procedimiento similar al del Corolario 2, tomando primero

$u_1 := \delta U(x)$ y $0 < \delta < 1$, y luego $u := \delta U(x)$ y $\delta > 1$, en intervalos donde $U'(x) \geqslant 0$, se puede probar que, en ellos, $\lim_{\eta \to \infty} u(x,\eta) = U(x)$.

Un argumento análogo es aplicable a intervalos donde $U'(x) \leqslant 0$.

BIBLIOGRAFIA

[1] L. Prandtl, *The Mechanics of Viscous Fluids*, en *Aerodynamic Theory*, vol.III, editada por W.F.Durand, 1935.

[2] H. Schlichting, *Boundary Layer Theory*, McGraw-Hill, 1960.

[3] W. Walter, *On the asymptotic behaviour of solutions of the Prandtl boundary layer equations*, MRC Technical Summary Report N°1056, Madison, Wisconsin, March 1970.

[4] O.A. Oleinik, *Mathematical Problems of Boundary Layer Theory*, Uspehi Mat. Nauk 23(1968), p.3-65. También Lecture Notes, University of Minnesota, 1969.

[5] J.E. Bouillet, C. Atkinson, *A Generalized Diffusion Equation: Radial Symmetries and Comparison Theorems*, Journal of Mathematical Analysis and Applications 95(1), August 1983, p.37-68.

[6] J.E. Bouillet, *El criterio de unicidad de Osgood y la desigualdad de Gronwall para ecuaciones parabólicas con estructura de divergencia*, aparecerá en Mathematicae Notae.

[7] J.E. Bouillet, J.C. Pedraza, *Un criterio de unicidad para una ecuación parabólica con estructura de divergencia en dominios no acotados*, Comunicación a la XXXIII Reunión Anual de la U.M.A., Tucumán, 1983, Rev. Un. Mat. Argentina 31, 1-2 (1983), p.58-59.

Instituto Argentino de Matemática (CONICET)
1055 Buenos Aires,
y
Departamento de Matemática, FCE y N,
Universidad de Buenos Aires,
1428 Buenos Aires.

Recibido en marzo de 1984.