Revista de la
Unión Matemática Argentina
Volumen 31, 1984.

LA VARIEDAD DE DISTANCIAS ENTRE PUNTOS

Patricia Fauring, Flora Gutiérrez y Angel Larotonda

En cuestiones vinculadas con las configuraciones centrales, interesa establecer las relaciones existentes entre n puntos distintos $x_1,\dots,x_n$ en R^3 y sus distancias mutuas $t_{ij} = |x_i - x_j|$ ([1], §357); esto suele hacerse utilizando recursos de geometría métrica (como en [2], ch.IV mediante los "determinantes de Cayley-Menger").

En la presente nota se replantea el problema en términos de espacios homogéneos bien conocidos.

1. FORMAS CUADRATICAS SEMIDEFINIDAS POSITIVAS.

Si E y V son espacios de Hilbert reales, indicamos con $L(V,E)$ al espacio de Banach de todas las aplicaciones lineales continuas $V \to E$; $O(V)$ designará al grupo ortogonal de V (subvariedad cerrada de $L(V,V)$), mientras que $O(V,E)$ será la variedad de Stiefel de tipo V asociada a E, es decir, el conjunto de las aplicaciones lineales $u: V \to E$ "isométricas", $|u(x)| = |x|$ para todo $x \in V$.

Notemos que $u \in O(V,E)$ equivale a decir que $u \in L(V,E)$ y que $u^*u = 1_V$ (donde u^* indica el adjunto de u); se sabe que $O(V,E)$ es una subvariedad cerrada de $L(V,E)$, cuyo espacio tangente en $u_0 \in O(V,E)$ se identifica al subespacio $\{a: a^*u_0 + u_0^*a = 0\}$ de $L(V,E)$.

La operación a izquierda $(\sigma,u) \to u\sigma$ de $O(V)$ sobre $O(V,E)$ da lugar al fibrado principal

$$O(V) \to O(V,E) \to G_V(E) \qquad (1)$$

donde $G_V(E)$ es la variedad Grassmaniana de los subespacios de tipo V de E.

En el subespacio cerrado $H(V) \subset L(V,V)$ formado por las aplicaciones lineales autoadjuntas (es decir $f = f^*$) consideramos el cono cerrado $H^+(V)$ formado por las aplicaciones positivas, es decir las que verifican $\langle f(x),x\rangle \geq 0$ para todo $x \in V$. Vista la identificación de formas cuadráticas -continuas sobre V- con elementos de $H(V)$, $H^+(V)$

corresponde a las formas cuadráticas (semidefinidas) positivas.

También interesa el cono $GH^+(V) = GL(V) \cap H^+(V)$, que es un conjunto abierto en $H(V)$ -esto es evidente si $\dim V < \infty$, y en el caso general basta recordar que si $h \in GH^+(V)$ entonces $0 \notin Sp(h) \subset [m,\infty)$ donde $m = \inf\{\langle h(x),x\rangle, |x| = 1\}$ y por lo tanto para un $\varepsilon > 0$ conveniente será: $\|h-f\| < \varepsilon$, $f \in H(V) \Rightarrow f \in GH^+(V)$-.

Con $Mono(V,E)$ designamos al subconjunto de $L(V,E)$ formado por las aplicaciones inyectivas con imagen cerrada (es decir, los isomorfismos de V sobre subespacios de E); se trata de un subconjunto abierto de $L(V,E)$.

El producto (o composición) permite definir una aplicación

$$a: O(V,E) \times GH^+(V) \longrightarrow Mono(V,E) \qquad (2)$$

por $a(u,h) = uh$.

1.1. LEMA. *La aplicación a es un difeomorfismo* C^∞.

Demostración. Que a es C^∞ es evidente; la inversa de a se obtiene por el siguiente procedimiento: dado $f \in Mono(V,E)$, $a^{-1}(f) = (fh^{-1},h)$ donde $h \in GH^+(V)$ es la única solución de $h^2 = f^*f$. Notemos que $f^*f \in H^+(V)$ trivialmente; asimismo es evidente que f^*f es inyectiva, mientras que $f(V) \oplus Ker(f^*) = E$ muestra que f^*f es suryectiva. Esta construcción muestra además que a^{-1} es C^∞, por serlo $g \longrightarrow g^{1/2}$ de $GH^+(V)$ en $GH^+(V)$.

El lema 1.1 no es otra cosa que una reformulación de la "descomposición polar" de un monomorfismo. En particular si $f: V_1 \longrightarrow V_2$ es un isomorfismo continuo, la descomposición polar $f = uh$ nos provee de una isometría $u: V_1 \longrightarrow V_2$. Usando esto se produce enseguida un difeomorfismo C^∞ de $O(V_2,E)$ sobre $O(V_1,E)$ -por composición de u-. En consecuencia la variedad $O(V,E)$ depende del espacio V más que del producto interno específico que se utiliza en su definición: productos internos equivalentes en V dan variedades difeomorfas. Por ello tiene sentido escribir $O(k,E) = O(R^k,E)$ sin especificar explícitamente el producto interno en R^k, que en general se supondrá que es el canónico.

Ahora, si V y E son espacios de Hilbert, designamos con $L(k,V,E)$ $(k \geqslant 0)$ al subconjunto de $L(V,E)$ formado por las aplicaciones de rango k, esto es: $\dim f(V) = k$. Asimismo ponemos $H_k^+(V) = H^+(V) \cap L(k,V,V)$ ("formas cuadráticas positivas de rango k").

El resultado siguiente es conocido (ver por ejemplo [3], 1.1):

1.2. PROPOSICION. *Para todo* $k \geq 0$, $L(k,V,E)$ *es una subvariedad de* $L(V,E)$; *además, para cada* $p \geq 0$ *el conjunto* $\bigcup_{k \leq p} L(k,V,E)$ *es cerrado en* $L(V,E)$.

Demostración. Sea $f_0 \in L(V,E)$ tal que $\dim f_0(V) = k$; si $N_0 = \mathrm{Ker}(f_0)$, $S_0 = N_0^{\perp}$, $W_0 = f_0(V)$ entonces $f_0(N_0) = 0$ y $f_0|S_0 : S_0 \to W_0$ es un isomorfismo.

Por composición con los correspondientes proyectores e inclusiones se obtiene un isomorfismo

$$L(V,E) \rightleftarrows L(S_0,W_0) \times L(N_0,W_0) \times L(S_0,W_0^{\perp}) \times L(N_0,W_0^{\perp})$$

que representa a cada f por la matriz de transformaciones

$$f \to \begin{pmatrix} a_f & b_f \\ c_f & d_f \end{pmatrix} \tag{3}$$

$a_f \in L(S_0,W_0)$, $b_f \in L(N_0,W_0)$, $c_f \in L(S_0,W_0^{\perp})$, $d_f \in L(N_0,W_0^{\perp})$.

Sea U el subconjunto de $L(V,E)$ formado por las f para las cuales $a_f \in \mathrm{Iso}(S_0,W_0)$; como este conjunto es abierto en $L(S_0,W_0)$, y como la aplicación (3) es un isomorfismo, resulta claro que U es abierto en $L(V,E)$. Además es evidente que f_0 es un elemento de $U \cap L(k,V,E)$. Un argumento sencillo muestra que

$$U \cap L(k,V,E) = \{f : d_f = c_f a_f^{-1} b_f\} \tag{4}$$

Utilizando (4) se obtiene sin dificultad un mapa

$$U \cap L(k,V,E) \to \mathrm{Iso}(S_0,W_0) \times L(N_0,W_0) \times L(S_0,W_0^{\perp}) \tag{5}$$

dado por $f \to (a_f, b_f, c_f)$, estableciendo la primera parte de la tesis. (Notemos que $\mathrm{Iso}(S_0,W_0) \approx GL(R^k)$).

Para la segunda afirmación basta probar que la aplicación $f \to \dim(f(V))$ es semicontinua inferiormente, de $L(V,E)$ en $N \cup \{\infty\}$. Pero si $\dim f_0(V) \geq r$ y $N_0^{\perp} = \mathrm{Ker}(f_0)$ hay entonces r vectores x_i en N_0 tales que $f_0(x_i)_{i \leq r}$ es linealmente independiente; sea S el subespacio generado por los x_i. Es $\dim(S) = r$, y el conjunto $U = \{f \in L(V,E) : f|S \in \mathrm{Mono}(S,E)\}$ es abierto en $L(V,E)$. Claramente $f_0 \in U$ y $\dim f(V) \geq r$ para toda $f \in U$ lo que completa la demostración.

Análogamente resulta

1.3. PROPOSICION. *Para cada* $k \geq 0$, $H_k^+(V)$ *es una subvariedad de* $H(V)$ *y para cada* $p \geq 0$, *el conjunto* $\bigcup_{k \leq p} H_k^+(V)$ *es cerrado en* $H(V)$.

Demostración. El esquema es el mismo que el de la proposición anterior: si $f_0 \in H_k^+(V)$ sean $N_0 = \mathrm{Ker}(f_0)$, $S_0 = N_0^\perp = f_0(V)$; ciertamente $f_0|S_0 \in GH^+(S_0)$.

En la representación (3) se tendrá ahora

$$H(V) \rightleftarrows H(S_0) \times L(N_0,S_0) \times H(N_0)$$

mediante

$$f \longrightarrow \begin{pmatrix} a_f & b_f \\ b_f^* & d_f \end{pmatrix}$$

Consideramos $U = \{f \in H(V)\colon a_f \in GH^+(S_0)\}$, entorno abierto de f_0 en $H(V)$; como en la proposición anterior se tendrá

$$U \cap H_k^+(V) = \{f \in H(V)\colon d_f = b_f a_f^{-1} b_f\}$$

y se obtiene un mapa para $H_k^+(V)$ poniendo

$$U \cap H_k^+(V) \longrightarrow GH^+(S_0) \times L(N_0,S_0) \tag{6}$$

vía $f \longrightarrow (a_f, b_f)$. El resto es idéntico a la proposición anterior.

Ahora para dos espacios de Hilbert V y E podemos definir una aplicación de clase C^∞ mediante

$$\beta\colon L(k,V,E) \longrightarrow H_k^+(V) \tag{7}$$

donde $\beta(f) = f^*f$.

1.4. PROPOSICION. *Si* $k \leq \dim(E)$, *la aplicación* β *es una fibración localmente trivial cuya fibra tipo es* $O(k,E)$.

Demostración. Sea $f_0 \in H_k^+(V)$, con $S_0 = f_0(V)$ y $N_0 = S_0^\perp = \mathrm{Ker}(f_0)$; de acuerdo con la proposición anterior, el conjunto $\Omega = \{f \in H_k^+(V)\colon \Pi_0 f|S_0\colon S_0 \longrightarrow S_0$ es isomorfismo$\}$ es un entorno abierto de f_0 en $H_k^+(V)$.

Definimos una trivialización de β sobre Ω mediante

$$\tau: \beta^{-1}(\Omega) \longrightarrow \Omega \times O(S_0,E)$$

donde $\tau(g) = (g^*g, \gamma(g))$ con $\gamma: \beta^{-1}(\Omega) \longrightarrow O(S_0,E)$ la única aplicación C^∞ definida por el procedimiento siguiente:
como $g = (g_0,g_1)$ con $g_0: S_0 \longrightarrow E$, $g_1: N_0 \longrightarrow E$, $g_0^*g_0: S_0 \longrightarrow S_0$ es un elemento de $GH^+(S_0)$, luego hay un único $h \in GH^+(S_0)$ tal que $h^2 = g_0^*g_0$. Entonces $\gamma(g) = g_0h^{-1}: S_0 \longrightarrow E$ es trivialmente una isometría de S_0 en E.
Que τ es un difeomorfismo es claro, ya que su inversa se obtiene haciendo

$$(f,u) \longrightarrow (g_0,g_1),\ g_0: S_0 \longrightarrow E,\ g_1: N_0 \longrightarrow E$$

como sigue:

$f = \begin{pmatrix} a & b \\ b^* & c \end{pmatrix}$, $a \in GH^+(S_0)$, $b^*a^{-1}b = c$. Consideramos el único $h \in GH^+(S_0)$ tal que $h^2 = a$ y tomamos $g_0 = uh$, $g_1 = uh^{-1}b$.

1.5. COROLARIO. *Si* $\dim(E) = r$, *la aplicación* β *deviene en el fibrado principal*

$$O(E) \longrightarrow \mathrm{Epi}(V,E) \longrightarrow H_r^+(V)$$

Mencionemos asimismo que si $k = \dim(V)$, 1.4 reproduce 1.1.

2. ALGUNOS FIBRADOS INTERESANTES.

En lo que sigue V y E serán espacios de Hilbert, V de dimensión finita n-1, en el cual se supone fijada una base ortonormal $a_1,\dots,a_{n-1}$.

Definimos una aplicación lineal

$$\Psi: E^n \longrightarrow L(V,E) \tag{8}$$

poniendo $\Psi(x)\ (\sum_{i=1}^{n-1} t_ia_i) = \sum_{i=1}^{n-1} t_i\ (x_i-x_n)$, y definimos también una operación de E sobre E^n mediante

$$a \star (x_1,\dots,x_n) = (x_1+a,\dots,x_n+a) \tag{9}$$

El siguiente hecho es trivial:

2.1. LEMA. a) *La aplicación* Ψ *es un epimorfismo cuyo núcleo es el subespacio diagonal* $\{(x,x,\ldots,x): x \in E\}$ *de* E^n.

b) $\Psi(x) = \Psi(x')$ *equivale a* $a \star x = x'$ *para un único* $a \in E$.

c) E^n/E *se identifica mediante* Ψ *con* $L(V,E)$.

Ahora sea $q: L(V,E) \to H^+(V)$ la aplicación cuadrática dada por $q(f) = f^*f$; por composición con (8) se obtiene la aplicación cuadrática

$$\phi: E^n \to H^+(V) \qquad (10)$$

Notemos que $\phi(x)$ tiene como matriz en la base $a_1,\ldots,a_{n-1}$

$$\langle x_i - x_n,\ x_j - x_n \rangle \qquad (1 \leqslant i,\ j \leqslant n-1) \qquad (11)$$

Si $E^n_k \subset E^n$ indica el subconjunto de E^n formado por los $x_1,\ldots,x_n$ tales que la variedad lineal afín $[x_1,\ldots,x_n]$ generada por ellos tiene dimensión exactamente k, resulta de 2.1 (cf.1.2):

2.2. PROPOSICION. a) *Para todo* $k \geqslant 0$, E *opera (mediante (9)) sobre* E^n_k.

b) E^n_k *es una subvariedad de* E^n *y* Ψ *induce un difeomorfismo*

$$\bar{\Psi}: E^n_k/E \xrightarrow{\sim} L(k,V,E).$$

c) *Para cada* $p \geqslant 0$ *el conjunto* $\bigcup_{k \leq p} E^n_k$ *es cerrado en* E^n.

Del mismo modo, usando 1.4 se obtiene:

2.3. PROPOSICION. *Si* $k \leqslant \dim(E)$, *la aplicación* $\phi_k: E^n_k \to H^+_k(V)$ *define una fibración localmente trivial, con fibra tipo el espacio* $E \times O(k,E)$.

En particular, si $r = \dim(E)$ *se obtiene un fibrado principal* $E \times O(E) \to E^n_r \to H^+_r(V)$ *con el grupo* $E \times O(E)$ *operando sobre* E^n *mediante la acción diagonal. (Nótese que en tal caso* E^n_r *es abierto en* E^n).

Ahora es muy fácil demostrar el teorema de Schoenberg ([2], 43.1):

2.4. PROPOSICION. *Sea* E *un espacio de Hilbert, sea* $0 \leqslant k \leqslant \dim(E)$ *y sean* $t_{ij} \geqslant 0$ $(1 \leqslant i,j \leqslant n)$ *tales que* $t_{ii} = 0$, $t_{ij} = t_{ji}$ *para todo* i,j. *Entonces son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

a) *Existen* $x_1,\ldots,x_n$ *en* E *que verifican:* i) *La dimensión de la va-*

riedad lineal afín $[x_1,\dots,x_n]$ *es* k; ii) $|x_i-x_j| = t_{ij}$ *para todo* i,j.

b) *La matriz* $a = (a_{ij})_{i,j<n} \in R^{(n-1)\times(n-1)}$ *definida por*

$$a_{ij} = \frac{1}{2}(t_{in}^2 + t_{jn}^2 - t_{ij}^2) \qquad (12)$$

es semidefinida positiva de rango k.

c) *La forma cuadrática* $v \longrightarrow Q(v) = \sum_{i,j} t_{ij}^2 v_i v_j$ (*definida sobre* R^n) *es definida negativa de rango* k *sobre el hiperplano de ecuación* $\sum_{i=1}^{n} v_i = 0$.

Demostración. La equivalencia de a) y b) resulta de 2.3 puesto que $2a_{ij} = |x_i-x_j|^2 + |x_j-x_n|^2 - |x_i-x_j|^2 = 2\langle x_i-x_n, x_j-x_n\rangle$ expresa que la matriz a es de la forma $\phi_k(x)$ (cf.(11), $V = R^{n-1}$).

La equivalencia de b) y c) es rutinaria: si M es el hiperplano en R^n de ecuación $\sum_{i=1}^{n} v_i = 0$, se interpreta M como el gráfico de una aplicación de R^{n-1} en R. Más precisamente, sea $j: R^{n-1} \longrightarrow R^n$, $j(v_1,\dots,v_{n-1}) = (v_1,\dots,v_{n-1}, -\sum_{i=1}^{n-1} v_i)$, así que j es un isomorfismo entre R^{n-1} y M.

Ahora si $a = (a_{ij})_{i,j<n}$ es la matriz definida a partir de los t_{ij} mediante (12) y si $K: R^{n-1} \longrightarrow R$ es la forma cuadrática asociada (es decir, $K(v) = \sum_{i,j} a_{ij}v_iv_j$), entonces un cálculo simple muestra que $K(v) = -\frac{1}{2}Q(j(v))$ para todo $v \in R^{n-1}$. Luego K es semidefinida positiva si y sólo si $Q|M$ es semidefinida negativa.

La afirmación correspondiente al rango es también inmediata, ya que j es un isomorfismo.

NOTA. Si se pretende que los puntos $x_1,\dots,x_n$ de 2.4 a) sean todos distintos hay que agregar hipótesis a las afirmaciones b) y c), ya sea: $t_{ij} > 0$ para todo $i \neq j$, o bien utilizando el hecho que $a_{ij} = \langle x_i-x_n, x_j-x_n\rangle = \phi_k(x)_{ij}$, imponer las condiciones

$$a_{ii} > 0 \qquad a_{ii} + a_{jj} > 2a_{ij} \qquad (1 \leqslant i,j \leqslant n-1).$$

De otra forma, si Δ es la diagonal generalizada en E^n:

$$E^n-\Delta = \{(x_1,\dots,x_n): x_i \neq x_j \quad \text{si} \quad i<j\},$$

E^n-Δ es una subvariedad abierta de R^n, establece por la acción de E; la proposición 2.2 subsiste si se reemplaza E_k^n por E_k^n-Δ y $L(k,V,E)$ por $L(k,V,E)_\Delta$ (subconjunto formado por las aplicaciones de de rango k que verifican $0 \neq f(a_i) \neq f(a_j)$ si $i < j$).

En 2.3 se debe reemplazar $H_k^+(V)$ por el subconjunto abierto formado por las formas cuadráticas q (positivas, de rango k) que cumplen las condiciones

$$q(a_i) > 0 \qquad q(a_i - a_j) > 0 \quad \text{si} \quad 1 \leqslant i < j \leqslant n-1.$$

REFERENCIAS

[1] Wintner A., *The analytical foundations of celestial mechanics*, Princeton Math. Ser. 5 (1947).

[2] Blumenthal, L., *Theory and applications of distance geometry*, Oxford Univ. Press. (1953).

[3] Koschore, U., *Infinite dimensional K-theory*, Proc. of Symp. in Pure Math. Vol.XV (1970), 95-135.

Departamento de Matemática, FCEN
Universidad de Buenos Aires
Pabellón I, Cdad. Universitaria, Cap. Fed. (1428)
Argentina.

Recibido en diciembre de 1981.
Versión final diciembre de 1984.