ANÁLISIS DIMENSIONAL DE LAGRANGIANOS VECTO-TENSORIALES

Fernando R. Dobarro

SUMMARY. In this paper we study the most general form of vector-tensor Lagrangians and of Lagrangians concomitants of a metric tensor and a bivector satisfying the axiom of the dimensional analysis. Furthermore we prove that the second type of Lagrangians gives rise always to Einstein-Maxwell equations when a variational principle is applied.

0. INTRODUCCION.

En la sección 1 del presente trabajo, utilizamos las técnicas de S.J. Aldersley [1] [2] para estudiar la forma de los Lagrangianos vecto tensoriales

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(C^\alpha \psi_i; C^\ell g_{ij}) \quad (*)$$

o sea concomitante de un covector y sus derivadas hasta el orden α y de un tensor métrico y sus derivadas hasta el orden ℓ , que satisfacen el axioma del análisis dimensional [1] [2]:

Axioma: Si las cantidades $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ tienen dimensiones $L^{\alpha_1}, L^{\alpha_2}, \dots, L^{\alpha_n}$ respectivamente, y si ellas entran en una teoría física en una función de la forma

$$\Phi(Q_1, Q_2, \dots, Q_n)$$

tal que $\Phi \sim L^\alpha$, entonces bajo una transformación homotética con factor escalar λ , debe ser

$$\lambda^\alpha \Phi(Q_1, \dots, Q_n) = \Phi(\lambda^{\alpha_1} Q_1, \dots, \lambda^{\alpha_n} Q_n)$$

(Usaremos la notación $f \sim L^\alpha$ - se lee "f tiene dimensión L^α " - si f es medido en unidades de longitud a la potencia α).

Este axioma asegura la coherencia de las unidades usadas. Por lo tanto, los únicos Lagrangianos que pueden tener sentido físico son los que lo satisfacen (Ver [1]).

Nos interesamos por Lagrangianos (*) porque son de este tipo los

usados comunmente para obtener las ecuaciones de campo de Einstein-Maxwell, por ejemplo [6]:

$$\mathcal{L}(C^1 \psi_i; C^2 g_{ij}) = \sqrt{g} R + \frac{1}{4} \sqrt{g} F^{ij} F_{ij} \quad (**)$$

da origen al aplicarle un principio variacional a las ecuaciones $F^{ij}|_j = 0$ y $R^{ij} - \frac{1}{2} g^{ij} R = -\frac{1}{2} (F_{ik} F_k^j - \frac{1}{4} g^{ij} F^{rs} F_{rs})$ donde

$$F_{ij} = \psi_{i,j} - \psi_{j,i}; \text{ ver además Ref.3 p.1981.}$$

En la sección 2 atacamos en forma análoga el problema de caracterizar los Lagrangianos

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(C^\alpha F_{ij}; C^\lambda g_{ij}) \quad (***)$$

o sea concomitantes de un tensor 2-covariante y sus derivadas hasta el orden α y de un tensor métrico y sus derivadas hasta el orden λ , que cumplen el axioma del análisis dimensional. Dando especial importancia al caso F_{ij} antisimétrico, porque luego trabajaremos con

$$F_{ij} = \psi_{i,j} - \psi_{j,i}.$$

En ambas secciones trabajaremos como es usual [1] [3] [8] bajo las consideraciones: $x^i \sim L^1$

$$g_{ij} \sim L^0 \text{ (por lo tanto } g_{ij,t_1,\dots,t_\lambda} \sim L^{-\lambda})$$

$$\psi_i \sim L^0 \text{ (por lo tanto } \psi_{i,i_1,\dots,i_\alpha} \sim L^{-\alpha})$$

Bajo estas condiciones, el Lagrangiano (**) al igual que otros que dan origen a las ecuaciones de Einstein-Maxwell resultan ser de tipo L^{-2} . Por lo tanto, teniendo como objetivo el estudio de la posible unicidad de dichas ecuaciones, tiene interés pedir a los $\mathcal{L}$ de la forma (*) y (***) que sean de tipo L^{-2} , con la idea de tratar dicho problema bajo la hipótesis $\mathcal{L} \sim L^{-2}$, más explícitamente cuáles son los Lagrangianos concomitantes de ψ_i, g_{ij} y sus derivadas, que son de tipo L^{-2} y que dan origen, aplicando un principio variacional, a las ecuaciones de Einstein-Maxwell. El contenido de la sección 3 es tratar este problema para los $\mathcal{L}$ de la forma (***), y se consigue probar que son todos.

1. LAGRANGIANOS VECTO-TENSORIALES.

Nuestro principal objetivo en la presente sección, es caracterizar

los Lagrangianos vecto-tensoriales

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(C^\alpha \psi_i; C^\ell g_{ij}) \quad (\alpha, \ell \geq 2) \quad (1.1)$$

de tipo L^{-2} que satisfacen el axioma del análisis dimensional.

Consideremos entonces un $\mathcal{L}$ de la forma (1.1) tal que $\mathcal{L} \sim L^{-2}$ y que satisface dicho axioma. Por esto último se cumple que para todo $\lambda > 0$:

$$\begin{aligned} & \lambda^2 \mathcal{L}(\psi_i; \psi_{i,j_1}; \dots; \psi_{i,j_1 \dots j_\alpha}; g_{rs}; g_{rs,t_1}; \dots; g_{rs,t_1 \dots t_\ell}) = \\ & = \mathcal{L}(\psi_i; \lambda \psi_{i,j_1}; \lambda^2 \psi_{i,j_1 j_2}; \dots; \lambda^\alpha \psi_{i,j_1 j_2 \dots j_\alpha}; g_{rs}; \\ & \quad \lambda g_{rs,t_1}; \lambda^2 g_{rs,t_1 t_2}; \dots; \lambda^\ell g_{rs,t_1 t_2 \dots t_\ell}). \end{aligned}$$

Derivando dos veces respecto a λ y tomando límite cuando $\lambda \rightarrow 0^+$ obtenemos que:

$$\begin{aligned} 2\mathcal{L}(C^\alpha \psi_i; C^\ell g_{ij}) &= \phi_1^{ijk\ell} \psi_{i,j} \psi_{k,\ell} + 2 \phi^{ijk} \psi_{i,jk} + \\ &+ 2 \phi^{ijkm} \psi_{i,j} \psi_{k,\ell m} + \phi^{ijklmn} g_{ij,k} g_{\ell m,n} + 2 \phi_2^{ijk\ell} g_{ij,k\ell} \end{aligned}$$

donde $\phi^{:::}$ son concomitantes de ψ_i y g_{ij} , y tienen las simetrías obvias. Aplicando ahora el teorema del reemplazo ([10], p.109) reducimos la expresión anterior a:

$$\mathcal{L} = \phi_1^{ijk\ell} \psi_i |_{j} \psi_k |_{\ell} + \phi^{ijk} \psi_i |_{jk} + \phi_2^{ijk\ell} R_{ijkl} \quad (1.2)$$

donde ahora los coeficientes $\phi^{:::}$ son densidades tensoriales concomitantes de ψ_i y g_{ij} , y además las $\phi^{ijk\ell}$ tienen la siguiente propiedad de simetría:

$$\phi_u^{ijk\ell} = \phi_u^{k\ell ij} \quad 1 \leq i, j, k, \ell \leq n \quad u = 1, 2$$

Ahora, usando estas propiedades de simetría y la caracterización de los concomitantes 3 y 4 covariantes de ψ_i y g_{ij} [9], vemos que valen los siguientes:

LEMA 1.1. Sea M una variedad pseudo Riemanniana de dimensión mayor que 3. Si $L^{ijk} = L^{ijk}(\psi_i; g_{ij})$ es una densidad tensorial 3-contravariante y $\psi = g^{ij} \psi_i \psi_j$ entonces:

$$L^{ijk} = \sqrt{g} (\psi^i g^{jk} f(\psi) + \psi^j g^{ik} g(\psi) + \psi^k g^{ij} h(\psi) + \psi^i \psi^j \psi^k t(\psi)).$$

LEMA 1.2. Sea M una variedad pseudo-Riemanniana de $\dim \geq 4$. Si $L^{ijkl} = L^{ijkl}(\psi_i; g_{ij})$ es una densidad tensorial 4-contravariante tal que

$$L^{ijkl} = L^{klij} \quad y \quad \psi = g^{ij} \psi_i \psi_j \quad \text{entonces:}$$

$$\begin{aligned} L^{ijkl} = & \sqrt{g}(g^{ij} g^{kl} f(\psi) + g^{il} g^{jk} g(\psi) + g^{ik} g^{lj} h(\psi) + \\ & + (\psi^i \psi^j g^{kl} + \psi^k \psi^l g^{ij})k(\psi) + (\psi^i \psi^l g^{jk} + \psi^j \psi^k g^{il})l(\psi) + \\ & + \psi^i \psi^k g^{lj} m_1(\psi) + \psi^l \psi^j g^{ik} m_2(\psi) + \psi^i \psi^j \psi^k \psi^l t(\psi) + \\ & + \delta_4^n (\sqrt{g} \epsilon^{ijkl} r(\psi) + \sqrt{g} \psi_a \epsilon^{ajik} \psi^l s(\psi) + \\ & + \sqrt{g} \psi_a \epsilon^{akli} \psi^j u(\psi)) + \delta_5^n \sqrt{g} \psi_a \epsilon^{ajikl} v(\psi)). \end{aligned}$$

COROLARIO 1.1. Si L^{ijkl} es una densidad tensorial como en el lema 2.1, entonces:

$$\begin{aligned} L^{ijkl} R_{ijkl} = & \sqrt{g}(R\alpha(\psi) + \psi^i \psi^j R_{ij} \beta(\psi) + \\ & + \delta_5^n \sqrt{g} \psi_a \epsilon^{ajikl} R_{ijkl} v(\psi)). \end{aligned}$$

Este corolario se demuestra como el Lema 2.3. y aplicando la identidad de Ricci.

Combinando (1.2) con los resultados anteriores podemos enunciar el siguiente:

TEOREMA 1.1. Si $\mathcal{L} = \mathcal{L}(C^\alpha \psi_i; C^\beta g_{ij})$ ($\alpha, \beta \geq 2$) es un Lagrangiano del tipo L^{-2} que satisface el axioma del análisis dimensional, entonces $\mathcal{L}$ tiene la siguiente forma:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_1(C^1 \psi_i; C^1 g_{ij}) + \mathcal{L}_2(C^2 \psi_i; C^2 g_{ij}) + \mathcal{L}_3(C^0 \psi_i; C^2 g_{ij})$$

donde:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1(C^1 \psi_i; C^1 g_{ij}) = & \sqrt{g} \{g^{ij} g^{kl} f_1(\psi) + g^{il} g^{jk} g_1(\psi) + g^{ik} g^{lj} h_1(\psi) + \\ & + (\psi^i \psi^j g^{kl} + \psi^k \psi^l g^{ij}) k_1(\psi) + (\psi^i \psi^l g^{jk} + \psi^j \psi^k g^{il}) l_1(\psi) + \\ & + \psi^i \psi^k g^{lj} m_1(\psi) + \psi^l \psi^j g^{ik} m_2(\psi) + \psi^i \psi^j \psi^k \psi^l t_1(\psi) + \\ & + \delta_4^n (\sqrt{g} \epsilon^{ijk} r(\psi) + \sqrt{g} \psi_a \epsilon^{ajik} \psi^l s(\psi) + \sqrt{g} \psi_a \epsilon^{akli} \psi^j u(\psi) + \\ & + \delta_5^n \sqrt{g} \psi_a \epsilon^{ajikl} v(\psi)) \} \psi_i | j \psi_k | l. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2(C^2 \psi_i; C^2 g_{ij}) &= \sqrt{g} \{ \psi^i g^{jk} f_2(\psi) + \psi^j g^{ik} g_2(\psi) + \\ &+ \psi^k g^{ij} h_2(\psi) + \psi^i \psi^j \psi^k t_2(\psi) \} \psi_i |_{jk}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_3(C^0 \psi_i; C^2 g_{ij}) &= \sqrt{g} \{ R\alpha(\psi) + \psi^i \psi^j R_{ij} \beta(\psi) + \\ &+ \delta_5^n \sqrt{g} \psi_a \epsilon^{aijkl} R_{ijkl} \gamma(\psi) \}. \end{aligned}$$

$$2. \text{ LAGRANGIANOS } \mathcal{L} = \mathcal{L}(C^\alpha F_{ij}; C^\ell g_{ij}).$$

El objetivo central de esta sección, es caracterizar los Lagrangianos de la forma:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(C^\alpha F_{ij}; C^\ell g_{ij}) \quad (\alpha \geq 1, \ell \geq 2) \quad (2.1)$$

de tipo L^{-2} que satisfacen el axioma del análisis dimensional, donde supondremos que F_{ij} es un tensor 2-covariante de tipo L^{-1} .

Consideremos entonces un $\mathcal{L}$ de la forma (2.1) que satisface las condiciones anteriores. Por cumplir el axioma del análisis dimensional, vale para todo $\lambda > 0$

$$\begin{aligned} \lambda^2 \mathcal{L}(F_{ij}; F_{ij, k_1}; \dots; F_{ij, k_1 \dots k_\alpha}; g_{rs}; g_{rs, t_1}; \dots; g_{rs, t_1 \dots t_\ell}) &= \\ = \mathcal{L}(\lambda F_{ij}; \lambda^2 F_{ij, k_1}; \dots; \lambda^{\alpha+1} F_{ij, k_1 \dots k_\alpha}; & \\ g_{rs}; \lambda g_{rs, t_1}; \lambda^2 g_{rs, t_1 t_2}; \dots; \lambda^\ell g_{rs, t_1 t_2 \dots t_\ell}) & \end{aligned}$$

Derivando dos veces respecto a λ y tomando límite cuando $\lambda \rightarrow 0^+$ obtenemos que:

$$\begin{aligned} 2\mathcal{L}(C^\alpha F_{ij}; C^\ell g_{ij}) &= \phi_1^{ijk\ell} F_{ij} F_{k\ell} + \phi^{ijk\ell m} F_{ij} g_{k\ell, m} + \\ &+ \phi^{ijk} F_{ij, k} + \phi^{ijk\ell mn} g_{ij, k} g_{\ell m, n} + \phi_2^{ijk\ell} g_{ij, k\ell} \end{aligned}$$

donde las $\phi:::$ son concomitantes de g_{ij} , y tienen las simetrías obvias. Aplicando ahora el teorema del reemplazo del cálculo tensorial clásico ([10], p.109) reducimos la anterior expresión a:

$$\mathcal{L} = \phi_1^{ijk} F_{ij} F_{k\ell} + \phi^{ijk} F_{ij|k} + \phi_2^{ijk\ell} R_{ijkl} \quad (2.2)$$

donde ahora los coeficientes $\phi:::$ son densidades tensoriales con-

comitantes de g_{ij} .

Pasemos ahora a estudiar la forma de los términos del miembro derecho de (2.2); para ello recordemos previamente los siguientes resultados:

LEMA 2.1. Si $\phi_{ijkh} = \phi_{ijkh}(g_{rs})$ es una densidad tensorial entonces para $n > 2$

$$\phi_{ijkh} = \sqrt{g}(a g_{ij}g_{kh} + b g_{ik} g_{jh} + c g_{ih} g_{jk} + \delta_4^n \beta \sqrt{g} \epsilon_{ijkh})$$

donde a, b, c y β son constantes y ϵ_{ijkh} es el símbolo 4-dimensional de Levi-Civita. ([4] Lema A.3).

LEMA 2.2. Si $\phi_{ijk} = \phi_{ijk}(g_{rs})$ es una densidad tensorial 3-covariante entonces $\phi_{ijk} = 0$ si $n > 3$.

Con la ayuda del lema 2.1. probemos el siguiente:

LEMA 2.3. Sea $n > 2$. Si $\phi^{ijkh} = \phi^{ijkh}(g_{rs})$ es una densidad tensorial 4-contravariante entonces

$$\phi^{ijkh} R_{ijkh} = \alpha \sqrt{g} R$$

donde α es una constante y $R = R_{jk} g^{jk}$ con

$$R_{jk} = R_{ijkl} g^{il} = R_{lkji} g^{il} = R_{kj}.$$

Dem. Aplicando el lema 2.1. tenemos que

$$\begin{aligned} \phi^{ijkh} R_{ijkh} &= \sqrt{g} (a g^{ij} g^{kh} + b g^{ik} g^{jh} + c g^{ih} g^{jk} + \\ &+ \delta_4^n \beta \sqrt{g} \epsilon^{ijkh}) R_{ijkh}. \end{aligned}$$

Ahora: $g^{ij} g^{kh} R_{ijkh} = 0$ porque g^{ij} es simétrico y $R_{ijkh} = -R_{jikh}$

$$g^{ik} g^{jh} R_{ijkh} = -g^{ik} g^{jh} R_{jikh} = -g^{ik} R_{ik} = -R$$

$$g^{ih} g^{jk} R_{ijkh} = g^{jk} R_{jk} = R$$

Para $n = 4$ $\epsilon^{ijkh} R_{ijkh} = 0$ ([7], p.290 Ejerc.7.18). Por lo tanto:

$$\phi^{ijkh} R_{ijkh} = \sqrt{g} (c-b) R$$

Llamando $\alpha = c-b$ resulta lo que queríamos demostrar.

Aplicando los lemas 2.1, 2.2 y 2.3 tenemos el siguiente:

TEOREMA 2.1. Sea $n > 3$. Si $\mathcal{L}$ es un Lagrangiano de la forma (2.1) de tipo L^{-2} que satisface el axioma del análisis dimensional donde F_{ij} es un tensor 2-covariante de tipo L^{-1} , entonces:

$$\mathcal{L} = \sqrt{g} (a g^{ij} g^{kh} F_{ij} F_{kh} + b g^{ik} g^{jh} F_{ij} F_{kh} + c g^{ih} g^{jk} F_{ij} F_{kh} + \delta_4^n \beta \sqrt{g} \epsilon^{ijkl} F_{ij} F_{kh} + \alpha R) \quad (2.3)$$

donde a, b, c, β y α son constantes.

3. UNICIDAD DE LAS ECUACIONES DE CAMPO DE EINSTEIN - MAXWELL.

En esta sección aplicaremos el operador de Euler-Lagrange a (2.4) con el objetivo de ver qué ecuación de campo se origina. Aquí trabajamos bajo la siguiente hipótesis: $F_{ij} = \psi_{i,j} - \psi_{j,i}$. Sabemos que: (ver [5]):

$$E^i(L) = 2\sqrt{g} g^{ih} g^{jk} F_{kh|j} \quad \text{si} \quad L(\psi_{i,j}, g_{ij}) = \\ = \frac{1}{2} \sqrt{g} F_{ij} F_{kh} g^{ik} g^{jh} \quad \text{donde} \quad E^i(L) = - \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\frac{\partial L}{\partial \psi_{i,j}} \right).$$

Por lo tanto:

$$E^i(\mathcal{L}) = a 2 \sqrt{g} g^{ih} g^{jk} F_{kh|j} + \delta_4^n \beta E^i(g \epsilon^{rskh} F_{rs} F_{kh}) \quad (3.1)$$

Calculemos entonces $E^i(g \epsilon^{rskh} F_{rs} F_{kh})$; primeramente:

$$\epsilon^{rskh} \frac{\partial (F_{rs} F_{kh})}{\partial \psi_{i,j}} = 4 \epsilon^{ijkl} F_{kh}$$

luego: $E^i(g \epsilon^{rskh} F_{rs} F_{kh}) = -4 \epsilon^{ijkl} (g F_{kh})_{,j}$

pero:

$$(g F_{kh})_{,j} = g g^{rs} g_{rs,j} F_{kh} + g F_{kh|j} + g F_{rh} \Gamma_{kj}^r + g F_{kr} \Gamma_{hj}^r = \\ = g(F_{kh|j} + 2 \Gamma_{rj}^r F_{kh} + F_{rh} \Gamma_{kj}^r + F_{kr} \Gamma_{hj}^r)$$

entonces, por la antisimetría de ϵ^{ijkl} y la simetría de la conexión

$$\epsilon^{ijkl} (g F_{kh})_{,j} = 2g \epsilon^{ijkl} \Gamma_{rj}^r F_{kh} + g \epsilon^{ijkl} F_{kh|j}$$

O sea que:

$$E^i (g \epsilon^{rskh} F_{rs} F_{kh}) = -8 g \epsilon^{ijkh} \Gamma_{rj}^r F_{kh} - 4 g \epsilon^{ijkh} F_{kh|j} \quad (3.2)$$

por lo tanto $T^i = g \epsilon^{ijkh} \Gamma_{rj}^r F_{kh}$ es una densidad tensorial entonces ante un cambio de coordenadas es:

$$\bar{T}^a = B A_i^a T^i \quad (3.3)$$

donde $B_a^i = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^a}$; $B = \det (B_a^i)$ y $A_i^a = \frac{\partial \bar{x}^a}{\partial x^i}$.

Pero por otro lado, como $\bar{\Gamma}_{jk}^i = A_r^i (B_j^s B_k^t \Gamma_{st}^r + B_{jk}^r)$ resulta:

$$\begin{aligned} \bar{T}^a &= B A_i^a A_j^b A_r^c (B_c^s B_b^t \Gamma_{st}^r + B_{cb}^r) g \epsilon^{ijkh} F_{kh} = \\ &= B A_i^a T^i + B A_i^a A_j^b A_r^c B_{cb}^r g \epsilon^{ijkh} F_{kh} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Luego de (3.3), (3.4) y $B \neq 0 \neq g$ resulta:

$$A_i^a A_j^b A_r^c B_{cb}^r \epsilon^{ijkh} F_{kh} = 0 \quad (3.5)$$

Ahora, si el cambio de coordenadas es:

$$x^a(\bar{x}^j) = \bar{x}^a + C_{ij}^a \bar{x}^i \bar{x}^j \text{ con } \bar{x}(p) = 0$$

resulta $x(p) = 0 \wedge B_j^i(p) = \delta_j^i \wedge A_j^i(p) = 0 \wedge B_{bc}^a = 2C_{bc}^a$.

Aplicando este cambio en (3.5) tenemos que en p:

$$0 = C_{cb}^c \epsilon^{abkh} F_{kh} \text{ (donde } C_{ij}^a \text{ son constantes cualesquiera tales que } C_{ij}^a = C_{ji}^a)$$

por lo tanto tomando $C_{ij}^a = \Gamma_{ij}^a(p)$ resulta

$$0 = \Gamma_{cb}^c(p) \epsilon^{abkh} F_{kh} \quad (3.6)$$

Aplicando (3.6) a (3.2) tenemos que:

$$E^i (g \epsilon^{rskh} F_{rs} F_{kh}) = -4g \epsilon^{ijkh} F_{kh|j} \quad (3.7)$$

Luego de (3.1) y (3.7)

$$E^i(\mathcal{L}) = a 2 \sqrt{g} g^{ih} g^{jk} F_{kh|j} - \delta_4^n \beta 4 g \epsilon^{ijkh} F_{kh|j} \quad (3.8)$$

Tenemos entonces el siguiente:

TEOREMA 3.1. Sea $n > 3$. Si $\mathcal{L}$ es un Lagrangiano de la forma:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(C^\alpha F_{ij}; C^\lambda g_{ij}) \quad (\alpha \geq 1, \lambda \geq 2)$$

de tipo L^{-2} que satisface el axioma del análisis dimensional entonces:

$$E^i(\mathcal{L}) = \sqrt{g} (2a g^{ih} g^{jk} - \delta_4^n \beta \sqrt{g} \epsilon^{ijkh}) F_{kh|j}$$

COROLARIO 3.1. Un tal Lagrangiano da origen a las ecuaciones de campo de Einstein-Maxwell si y sólo si $a \neq 0$.

Dem. Si $n > 4$ trivial. Si $n = 4$ da origen a las ecuaciones de Einstein-Maxwell si y sólo si $a \neq 0 \wedge \beta \sqrt{g} \epsilon^{ijkh} F_{ij|h} = 0$, pero

$$\epsilon^{ijkh} F_{ij|h} = 0 \quad F_{ij|k} + F_{ki|j} + F_{jk|i} = 0 \quad \text{si } n=4$$

y esta última condición vale para $F_{ij} = \psi_i|_j - \psi_j|i$ con lo que queda demostrado el corolario.

OBSERVACION. Cabe aclarar que existen Lagrangianos del tipo

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(C^\alpha F_{ij}; C^\lambda g_{ij}) \quad (\alpha \geq 0, \lambda \geq 2)$$

que no cumplen el axioma del análisis dimensional, pero sí dan origen a las ecuaciones de campo de Einstein-Maxwell, por ejemplo si n par ≥ 6 [6]:

$$L = \frac{1}{4} \sqrt{g} F^{ij} F_{ij} + a \epsilon^{i_1 \dots i_n} F_{i_1 i_2} \dots F_{i_{n-1} i_n} + b \sqrt{g}$$

Este Lagrangiano no cumple el axioma porque:

$$\frac{1}{4} \sqrt{g} F^{ij} F_{ij} \sim L^{-2} \quad ; \quad \epsilon^{i_1 i_2 \dots i_n} F_{i_1 i_2} \dots F_{i_{n-1} i_n} \sim L^{-\frac{n}{2}} \quad ;$$

$$b \sqrt{g} \sim L^0.$$

salvo que las constantes tengan unidades (ver Aldersley [1]).

Agradecimiento: Deseo expresar mi agradecimiento al Dr. Ricardo J. Noriega por sus importantes sugerencias.

REFERENCIAS

- [1] S.J.ALDERSLEY, Phys.Rev.D 15,370 (1977).
- [2] S.J.ALDERSLEY, Phys.Rev.D.15,3507 (1977).
- [3] G.W.MORNDENSKI, J.Math.Phys. 17, 1980 (1976).
- [4] D.LOVELOCK, Arch.Rat.Mec. and Analysis, 33 (1969).
- [5] D.LOVELOCK, J.Australian, Vol.XIV - Part 4, 1972, p.482-495.
- [6] D.LOVELOCK, G.R.G. Vol.5, n°4 (1974), p.p.399-408.
- [7] D.LOVELOCK and H.RUND, *Tensors, Differential Forms and Variational Principles* (Wiley, New York, 1975).
- [8] C.W.MISNER, K.S.THORNE and J.A.WHEELER, Chapter 17, *Gravitation* (Freeman, San Francisco, 1973).
- [9] R.NORIEGA, C.SCHIFINI, *Tensorial concomitants of a metric and a covector*, (preprint) Impresiones Previas Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, 1982.
- [10] T.Y.THOMAS, *The Differential Invariants of Generalized Spaces*, (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1934).

Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires
Argentina.