

LOS ESPACIOS TOPOLOGICOS MONOTOPS

A. Batbedat

0. INTRODUCCION.

En este artículo se introduce una nueva clase de espacios topológicos: los espacios monotops.

1. EL ORIGEN DE ESA ESTRUCTURA.

Sabido es que a cada álgebra de boole se puede asociar el espacio de boole de los ideales maximales: tal espacio es compacto y generado por los abiertos-cerrados. Más generalmente, a cada anillo o reticulado distributivo, se puede asociar el espacio de Hochster [9] de los ideales primos (espacio generalmente no separado).

Estudiando una vinculación análoga en un caso más general, el autor ha introducido en [2], [3], [4], [5], los espacios monogenerados. En particular se ha obtenido una dualidad entre infsemireticulados y ciertos espacios monogenerados, que tiene algo en común con la dualidad de Stone. Los espacios monotops que presentamos en el capítulo siguiente, constituyen una generalización natural de los espacios monogenerados (ver 5.1).

2. DEFINICIONES Y PROPIEDADES ELEMENTALES.

2.1. Sea X un espacio topológico: un abierto α es *monógeno* si no es vacío y posee un elemento x (llamado un *generador* de α) tal que α es la intersección de los abiertos que contienen a x .

2.2. De esta definición resultan las propiedades siguientes:

2.2.1. Todo abierto monógeno es casi-compacto.

2.2.2. Toda base de la topología de X contiene a los abiertos monógenos.

2.2.3. Todo abierto monógeno es conexo.

2.2.4. Un abierto ϵ no vacío es monógeno sii la unión de los abiertos estrictamente contenidos en ϵ es estrictamente contenida en ϵ .

2.2.5. Cuando X es de Kolmogoroff (para cada (x,y) existe un abierto que contiene a solo uno de ellos) cada abierto monógeno posee un único generador.

2.2.6. Cuando X es accesible (todo punto es cerrado) cada abierto monógeno se reduce a un punto.

2.3. DEFINICION. *Un espacio topológico es monotop cuando los abiertos monógenos constituyen una base.*

2.4. Por ejemplo en el caso finito, todo punto es generador (2.1), entonces todo espacio topológico es monotop.

Otros ejemplos en el capítulo 5.

2.5. Sea X un espacio topológico: sabido es que el espacio de Kolmogoroff universal de X es el conjunto K de los $cl(x)$ con la topología cociente.

Si X es monotop, entonces K es monotop.

3. EL RETICULADO DE LOS ABIERTOS.

3.1. Sea $E = (E, \leq)$ un conjunto ordenado y e en E : se denota $\uparrow e$ (resp. $\downarrow e$) al conjunto de las cotas superiores (resp. inferiores) de e .

3.2. Sea A una parte de E : se dice que E es *supgenerado* por A (o que A es una *parte supgeneradora*) si todo e en E es un sup de elementos de A . Esa propiedad es equivalente a: $e = \sup(\uparrow e \cap A)$.

3.3. Sea E un reticulado completo: un elemento m es un *mono* si:

Siempre que $m = \sup(t_i)$, (t_i) una familia cualquiera, entonces existe uno de los t_i con $m \leq t_i$.

Resulta del capítulo anterior la:

PROPIEDAD. *Un espacio topológico es monotop sii el reticulado de sus abiertos es supgenerado por sus monos.*

3.4. En teoría de los reticulados se define también los elementos compactos y se dice que un reticulado es algebraico cuando es supgenerado por sus compactos [8].

Resulta de [10], statement 3.2, que un reticulado es supgenerado por sus monos (propiedad 3.3) sii es algebraico y completamente distributivo ([11]).

4. EL ORDEN DE ESPECIALIZACION.

4.1. En este capítulo, los espacios X serán de Kolmogoroff (ver 2.5).

4.2. Para un tal X , el orden S de especialización es: $x \leq y$ sii $x \in \text{cl}(y)$.

4.3. Tenemos también $x \leq y$ sii todo abierto que contiene a x contiene a y . Resulta la:

PROPIEDAD. Un abierto es monógeno sii contiene un mínimo según S . Entonces este mínimo es el generador (2.1).

4.4. Se denota M^* al conjunto de los abiertos monógenos de X y M a M^* con el vacío.

Se denota G al conjunto de los generadores en X .

PROPIEDAD. Los elementos de M^ son los $\uparrow g$ (3.1), g en G . La biyección: $g \rightarrow \uparrow g$, es un antiisomorfismo de conjuntos ordenados ($g \leq h$ sii $\uparrow h \subset \uparrow g$).*

4.5. En este contexto, sea $E = (E, \leq)$ un conjunto ordenado y A una parte de E : se puede considerar $T(E, A)$ el espacio topológico E con la topología generada por el conjunto B de los $\uparrow a$, a en A .

Entonces todo abierto que contiene a e contiene a $\uparrow e$. En particular:

PROPIEDAD. En $T(E, A)$ cada elemento de B es un abierto monógeno.

Los $T(E, A)$ no son necesariamente monotops ni tampoco de Kolmogoroff.

4.6. Cuando B es una base, $T(E, A)$ es monotop (2.3) y los abiertos monógenos son exactamente los elementos de B (2.2.2. y 4.5).

Sabido es que B es una base de $T(E, A)$ sii:

- i) E es la unión de los elementos de B .
- ii) Para todo α, β en B y todo e en $\alpha \cap \beta$, existe γ en B con $e \in \gamma \subset \alpha \cap \beta$.

La condición ii) es equivalente a:

4.6.1. Para todo par P de elementos de A y todo e en E , cota superior de P , existe a en A , cota superior de P y menor o igual que e .

4.7. Veamos por ejemplo el caso de dos elementos $E = \{e, a\}$ con $A = \{a\}$.

*) Si $a < e$, B es base, E es monotop no de Kolmogoroff.

**) Si $e < a$ o si e y a no son comparables, B no es base, E es monotop y de Kolmogoroff: es conocido como espacio de Sierpinski. El

orden de especialización da $e < a$.

4.8. Volvemos al caso general de 4.5:

PROPIEDAD. Cuando E es supgenerado por A (3.2), $T(E,A)$ es de Kolmogoroff y verifica 4.6.i) (pero no necesariamente 4.6.1).

4.9. DEFINICION. Una parte A del conjunto ordenado E es supgeneradora filtrante si es supgeneradora (3.2) y cumple la propiedad 4.6.1.

4.10. TEOREMA. (de representación ordenada para los espacios monotops)

i) Si X es un espacio topológico monotop de Kolmogoroff, G (4.4) es una parte supgeneradora filtrante por (X,S) .

ii) Si A es una parte supgeneradora filtrante por $(E, \leq)$, $T(E,A)$ (4.5) es un espacio monotop de Kolmogoroff.

iii) La correspondencia entre i) y ii) es biunívoca.

Demostración: i) Sea x en X y $H = \downarrow x \cap G$: H no es vacío porque existe un elemento de M^* que contiene a x . Además si y es cota superior de H , todo abierto que contiene a x contiene a y , entonces xSy . Resulta que X es supgenerado por G . Tenemos también 4.6.1 porque M^* es una base.

ii) Ver 4.6 y 4.8.

iii) $T(X,S,G)$ es el conjunto X con la topología generada por M^* : es la topología original de X . Por otra parte A es el conjunto de los generadores en $T(E, \leq, A)$ (4.6) y el orden de especialización sobre E es $\leq$: en efecto, $x \leq y$ implica xSy porque todo $\uparrow a$ que contiene a x contiene a y ; en el otro sentido, xSy implica $x \leq y$ porque $x = \sup(\uparrow x \cap A)$.

4.11. Sea Y un espacio monotop no necesariamente de Kolmogoroff:

La relación de especialización es un preorden.

El espacio $K(Y)$ de Kolmogoroff universal por Y (2.5), ordenado según § de 4.2, es el conjunto ordenado universal del conjunto preordenado Y . Entonces es fácil adaptar el teorema 4.10 a Y , mediante $K(Y)$.

5. CASOS PARTICULARES.

5.1. Un espacio topológico X es monogenerado en el sentido de [2], [3], [4], [5], si es monotop (2.3) y si M (4.4) es cerrado por intersección.

Resulta de la propiedad 4.4 que en la representación del teorema 4.10, los espacios monogenerados de Kolmogoroff corresponden a los

(E, A) donde E es supgenerado por A y:

Todo par en A que tiene una cota superior en E , tiene un sup en E , elemento de A (no sería lo mismo decir: "tiene un sup en A ").

5.2. Los (E, A) donde E es supgenerado por A y A es un sub-supsemi-reticulado, corresponden a los espacios monogenerados de Kolmogoroff irreducibles.

5.3. Sea X un espacio monotop de Kolmogoroff tal que (X, S) es un supsemireticulado: debido a la propiedad 4.6.1, G es un sub-supsemireticulado; resulta que X es monogenerado irreducible.

5.4. Sea E un conjunto totalmente ordenado; las partes A supgeneradoras filtrantes son todas las partes supgeneradoras (3.2).

Por ejemplo si E es finito o si E es $\mathbb{N}$, E es la única parte supgeneradora (ver 5.6). Si E es $\mathbb{R}$, existen muchas partes supgeneradoras (ver 5.6) (en particular los racionales); cada una da, sobre los reales, un espacio monogenerado de Kolmogoroff irreducible.

5.5. Sea X un espacio monotop de Kolmogoroff:

i) G tiene un mínimo sii X tiene un mínimo (lo mismo) sii $X \in M^*$.

ii) Si X tiene un máximo, el espacio X es irreducible.

5.6. E es la más grande de las partes supgeneradoras filtrantes en E . El espacio $T(E, E)$ es Alexandrov-discreto ([1], [6], [7]).

Se plantea el problema de la existencia de la más pequeña de las partes supgeneradores filtrantes en E . Está vinculado al problema más general de la búsqueda dentro de las estructuras monotop de Kolmogoroff sobre E tales que S sea el orden $\leq$, de alguna que se podría llamar canónica.

REFERENCIAS

- [1] ALEXANDROV, P., *Diskrete Raume*, Mat.Sb., 2, (1937), 501-518.
- [2] BATBEDAT, A., *Le langage des schémas pour les demi-groupes commutatifs et des schémas en demi-groupes commutatifs*, Semi-group Forum, vol.16, (1978), 463-471.
- [3] BATBEDAT, A., *Spectres des algèbres à produit et représentation sectionnelle des algèbres a produit*, Communications in Algebra, 6 (15), (1978), 1589-1619 et 8 (15), (1980) 1403-1416.
- [4] BATBEDAT, A., *Le spectre plein d'un ensemble ordonné*, Rendiconti atti della Acc. Naz. dei lincei Roma, Serie VIII, Vol. LXVI, Fasc.6, (1979), 494-497.
- [5] BATBEDAT, A., *Le spectre plein d'un ensemble ordonné*, Revue Roumaine des math.pures et appl., Tome XXV, N°8, (1980), 1167-1177.
- [6] BOURBAKI, N., *Topologie générale*, Paris (1962).
- [7] GEORGESCU, G. y LUNGULESCU, B., *Sur les propriétés topologiques des structures ordonnées*, Revue Romaine des math.pures et appl., Tome XIV, N°10, (1969), 1453-1456.
- [8] GRATZER, G., *Universal algebra*, Van Nostrand, Princeton, (1968).
- [9] HOCHSTER, M., *Prime ideals structure in commutative rings*, Trans.Amer.math.soc., 142, (1969), 43-60.
- [10] PUDLAK, P. y TUMA, J., *Yeast graphs and fermentation of algebraic lattices*, Coll.math.soc. Janos Boljai, (1976), 301-343.
- [11] RANEY, G.N., *Completely distributive complete lattices*, Proc. Amer.math.soc., 3 (1952), 677-680.

Universidad Nacional de Mar del Plata
Funes 3250 Mar del Plata, Argentina

y

Université de Montpellier
Montpellier, Francia.

Recibido en julio de 1983.

Nueva copia noviembre de 1984.