Revista de la
Unión Matemática Argentina
Volumen 32, 1985.

ECUACIONES DIFERENCIALES MATRICIALES CON DOS CONDICIONES DE CONTORNO

Lucas Jódar

1. INTRODUCCION.

El interés de la resolución de un problema de condiciones iniciales para una ecuación diferencial matricial de Riccati

$$d/dt\ U(t) = A + B\ U(t) + U(t)\ B^T + U(t) D\ U(t) \quad ; \quad U(a) = G$$

aparece en diferentes campos de las Matemáticas tales como control óptimo lineal, problemas duales de filtrado, control estocástico, etc, [1] , [4] , [5] .
En un trabajo reciente [9] , se muestra cómo la resolución de problemas con una condición de contorno de la forma

$$\left.\begin{aligned} d/dt\ U(t) = A + B\ U(t) + U(t)\ B^T + U(t) D\ U(t) \\ U(b) - U(o) = G \end{aligned}\right\} \qquad (1.1)$$

permite estudiar la estabilizabilidad de sistemas lineales mediante realimentación periódica. En el estudio de problemas de estabilidad asintótica de sistemas periódicos lineales, aparece la necesidad de que existan soluciones periódicas (obtenidas para el caso G=0) de este tipo de ecuaciones, [3] , [2] .
En este trabajo se estudia el problema más general siguiente:

$$\left.\begin{aligned} d/dt\ U(t) = A(t) + B(t)U(t) - U(t)C(t) - U(t)D(t)U(t) \\ E_1U(t_1) - U(o)F_1 = G_1 \\ E_2U(t_2) - U(o)F_2 = G_2 \end{aligned}\right\} \qquad (1.2)$$

Nótese que además de que los coeficientes del problema (1.2) son variables, la matriz C(t) no tiene que ser necesariamente $-B(t)^T$, y que las dos condiciones de contorno son más generales que las del problema (1.1). En lo sucesivo, denotaremos por $\mathbf{C}_{p\times q}$ al espacio de

Este trabajo ha sido realizado con la ayuda de una beca del Consejo de Cultura, Educación y Ciencia de la Generalidad Valenciana.

las matrices de dimensiones pxq, a valores en el cuerpo **C** de los números complejos, el símbolo W^T denota la matriz traspuesta de W. En este trabajo estudiamos condiciones de existencia y expresión de las soluciones de (1.2), mediante una reducción al problema de la resolución de un sistema de dos ecuaciones algebraicas (tantas como condiciones de contorno). De este modo las condiciones de existencia y expresión de las soluciones del problema de contorno, se generan a partir de las respectivas condiciones determinadas para el problema algebraico.

2. REDUCCION DEL PROBLEMA DE CONTORNO A UN PROBLEMA ALGEBRAICO.

Sea el problema (1.2), donde A(t), B(t), C(t), D(t) son funciones continuas a valores en los espacios de matrices $\mathbf{C}_{mxn}$, $\mathbf{C}_{mxm}$, $\mathbf{C}_{nxn}$, $\mathbf{C}_{nxm}$, respectivamente, definidas en el intervalo $I = [o,t_2]$, con $t_1 \leqslant t_2$, siendo $E_i \in \mathbf{C}_{mxm}$, $F_i \in \mathbf{C}_{nxn}$, $G_i \in \mathbf{C}_{mxn}$, $1 \leqslant i \leqslant 2$.

TEOREMA 1. *Una condición necesaria para la existencia de solución del problema (1.2) es que exista solución del sistema de ecuaciones cuadráticas*

$$\left.\begin{aligned} M_1 + N_1U - U P_1 - U Q_1U = 0 \\ M_2 + N_2U - U P_2 - U Q_2U = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (2.1)$$

donde

$$\left.\begin{aligned} M_1 &= E_1 \Phi_{21}(t_1,o) - G_1 \Phi_{11}(t_1,o) \ ; \ P_1 = F_1 \Phi_{11}(t_1,o) \\ M_2 &= E_2 \Phi_{21}(t_2,o) - G_2 \Phi_{11}(t_2,o) \ ; \ P_2 = F_2 \Phi_{11}(t_2,o) \\ N_1 &= E_1 \Phi_{22}(t_1,o) - G_1 \Phi_{12}(t_1,o) \ ; \ Q_1 = F_1 \Phi_{12}(t_1,o) \\ N_2 &= E_2 \Phi_{22}(t_2,o) - G_2 \Phi_{12}(t_2,o) \ ; \ Q_2 = F_2 \Phi_{12}(t_2,o) \end{aligned}\right\} \qquad (2.2)$$

siendo $\Phi(t,o)$ *la matriz de transición de estados en* o *del sistema*

$$d/dt \begin{bmatrix} Y(t) \\ Z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C(t) & D(t) \\ A(t) & B(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y(t) \\ Z(t) \end{bmatrix} , \quad \begin{bmatrix} Y(o) \\ Z(o) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ U_o \end{bmatrix} , \ U_o = U(o) \quad (2.3)$$

descompuesta en bloques de la forma

$$\Phi(t,o) = \begin{bmatrix} \Phi_{11}(t,o) & \Phi_{12}(t,o) \\ \Phi_{21}(t,o) & \Phi_{22}(t,o) \end{bmatrix} \qquad (2.4)$$

Demostración. Sea U(t) solución de (1.2) y sea $U(o) = U_o$. Si Y(t) es solución del problema de condiciones iniciales

$$d/dt\, Y(t) = (C(t)+D(t)U(t))\, Y(t) \quad ; \; Y(o) = I$$

es fácil comprobar que la matriz $Z(t) = U(t)Y(t)$ verifica

$$d/dt\, Z(t) = (A(t)+B(t)U(t))Y(t) \quad ; \; Z(o) = U_o$$

De este modo $\begin{bmatrix} Y(t) \\ Z(t) \end{bmatrix}$, satisface el problema de condiciones iniciales (2.3). Se verifica entonces que la solución de (2.3) viene dada por

$$\begin{bmatrix} Y(t) \\ Z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{11}(t,o) + \Phi_{12}(t,o)\, U_o \\ \Phi_{21}(t,o) + \Phi_{22}(t,o)\, U_o \end{bmatrix} \tag{2.5}$$

Como $U(t)$ satisface las condiciones de contorno de (1.2), de la expresión de $Z(t)$ resulta que

$$E_1\, Z(t_1) = E_1\, U(t_1)Y(t_1) = (G_1 + U_oF_1)Y(t_1)$$
$$E_2\, Z(t_2) = E_2\, U(t_2)Y(t_2) = (G_2 + U_oF_2)Y(t_2)$$

de donde, por (2.5), se obtiene

$$\left.\begin{aligned} E_1(\Phi_{21}(t_1,o) + \Phi_{22}(t_1,o)U_o) &= (G_1+U_oF_1)(\Phi_{11}(t_1,o) + \Phi_{12}(t_1,o)U_o) \\ E_2(\Phi_{21}(t_2,o) + \Phi_{22}(t_2,o)U_o) &= (G_2+U_oF_2)(\Phi_{11}(t_2,o) + \Phi_{12}(t_2,o)U_o) \end{aligned}\right\} \tag{2.6}$$

es decir que U_o es solución de (2.1), donde los coeficientes están dados por (2.2), porque de (2.6) se sigue que

$$(E_1\Phi_{21}(t_1,o)-G_1\Phi_{11}(t_1,o))+(E_1\Phi_{22}(t_1,o)-G_1\Phi_{12}(t_1,o))U_o-U_oF_1\Phi_{11}(t_1.o) -$$
$$- U_oF_1\Phi_{12}(t_1,o)U_o = 0$$

$$(E_2\Phi_{21}(t_2,o)-G_2\Phi_{11}(t_2,o))+(E_2\Phi_{22}(t_2,o)-G_2\Phi_{12}(t_2,o))U_o-U_oF_2\Phi_{11}(t_2,o) -$$
$$- U_oF_2\Phi_{12}(t_2,o)U_o = 0$$

El resultado siguiente permite obtener soluciones del problema algebraico bajo ciertas condiciones.

TEOREMA 2. *Si* U_o *es solución de (2.1), y se verifica que*

$$\Phi_{11}(t,o) + \Phi_{12}(t,o)U_o, \text{ es invertible para todo } t \in [o,t_2] \tag{2.7}$$

entonces existe solución de (1.2) y viene dada por

$$U(t) = (\Phi_{21}(t,o)+\Phi_{22}(t,o)U_o)(\Phi_{11}(t,o)+\Phi_{12}(t,o)U_o)^{-1} \tag{2.8}$$

Demostración. Sea $Y(t) = \Phi_{11}(t,o)+\Phi_{12}(t,o)U_o$, y $Z(t) = \Phi_{21}(t,o)+\Phi_{22}(t,o)U_o$, donde U_o es solución de (1.2). Por hipótesis (2.7), $Y(t)$ es invertible para $t \in [o,t_2]$. De la expresión (2.5), es fácil comprobar que la matriz col(Y(t),Z(t)) satisface el problema de condiciones iniciales (2.3), de donde se sigue que $U(t) = Z(t)Y(t)^{-1}$ verifica

$$d/dt\ U(t) = A(t)+B(t)U(t)-U(t)C(t)-U(t)D(t)U(t)\ ;\ U(o) = U_o$$

Como U_o es solución de (2.1), satisface (2.6). Postmultiplicando por la inversa de $\Phi_{11}(t_1,o)+\Phi_{12}(t_1,o)U_o$ en la primera ecuación de (2.6), y postmultiplicando por la inversa de $\Phi_{11}(t_2,o)+\Phi_{12}(t_2,o)U_o$ la segunda ecuación de (2.6), se concluye que

$$E_1\ U(t_1)\ -\ U(o)\ F_1 = G_1$$
$$E_2\ U(t_2)\ -\ U(o)\ F_2 = G_2$$

COROLARIO 1. *El problema de contorno (1.2) admite solución si y sólo si existe una solución U_o del problema (2.1), con coeficientes dados por (2.2), tal que se verifique la condición (2.7), siendo $\Phi(t,o)$ la matriz de transición de estados en o del sistema (2.3). En este caso el conjunto de soluciones de (1.2) viene dado por (2.8), donde U_o varía en el conjunto de soluciones de (2.1).*

Demostración. La demostración es una consecuencia de los teoremas 1 y 2.

3. SOLUCION DEL PROBLEMA ALGEBRAICO ASOCIADO AL PROBLEMA DE CONTORNO.

En la sección anterior hemos caracterizado la condición de existencia de solución del problema de contorno inicial en términos de la existencia de soluciones de un sistema cuadrático algebraico, observando que la expresión de las soluciones del problema de contorno viene dada explícitamente en términos de las soluciones del correspondiente problema algebraico. A continuación estudiaremos condiciones para la existencia de soluciones del problema algebraico, y para obtener expresiones de las mismas, lo más explícitas posible en términos de los datos del problema.
Empezamos estudiando la resolución del problema algebraico (2.1) en el caso en que el problema inicial (1.2) posee una única condición de contorno, o lo que es igual, en el caso en que $t_1=t_2$, $E_1 = E_2$, $F_1 = F_2$, $G_1 = G_2$.

TEOREMA 3. *Consideremos el problema de contorno (1.2) con $E_1 = E_2$, $F_1 = F_2$, $G_1 = G_2$ y $t_1 = t_2$. Sean M_1, N_1, P_1, Q_1, dadas por (2.2), y sean las matrices V, W tales que*

$$V = \begin{bmatrix} V_1 & V_2 \\ V_3 & V_4 \end{bmatrix}, \quad W = \begin{bmatrix} P_1 & Q_1 \\ M_1 & N_1 \end{bmatrix}, \quad W\,V = V\,J_W, \; J_W = \begin{bmatrix} J_1 & x \\ 0 & J_2 \end{bmatrix} \tag{3.1}$$

donde J_W *es la forma canónica de Jordan de* W. *Si* $\Phi(t,o)$ *es la matriz de transición de estados en* o *del sistema (2.3), y definimos* $V(t) = \Phi(t,o)V$ *descompuesta en bloques de la forma*

$$V(t) = \begin{bmatrix} V_1(t) & V_2(t) \\ V_3(t) & V_4(t) \end{bmatrix} \tag{3.2}$$

con $V_1(t)$ *invertible para todo* $t \in [o,t_1]$, *entonces la matriz* $U_o = V_3V_1^{-1}$ *es solución de la ecuación algebraica*

$$M_1 + N_1U - U\,P_1 - U\,Q_1\,U = 0 \tag{3.3}$$

y $U(t)$ *definida por (2.8) es solución del problema (1.2).*

Demostración. Por la invertibilidad de V_1, y por [8], la matriz $U_o = V_3V_1^{-1}$, es solución de la ecuación (3.3). De la expresión $V(t) = \Phi(t,o)V$, y de (3.2) resulta que

$$V_1(t) = \Phi_{11}(t,o)V_1 + \Phi_{12}(t,o)V_3$$

luego para todo $t \in [o,t_1]$ se verifica que la matriz $V_1(t)V_1^{-1} = \Phi_{11}(t,o) + \Phi_{12}(t,o)U_o$ es invertible. Del teorema 2 se concluye el resultado.

Vamos a probar a continuación que las soluciones de un sistema cuadrático de la forma (2.1) se encuentran entre las soluciones de un sistema lineal más sencillo construido a partir de él.

TEOREMA 4. *Sean* $A_i \in \mathbf{C}_{m\times n}$, $B_i \in \mathbf{C}_{n\times n}$, $C_i \in \mathbf{C}_{n\times n}$, $D_i \in \mathbf{C}_{n\times m}$, $i=1,2$. *Si* U *es solución del sistema*

$$\left.\begin{array}{l} A_1 + B_1U + U\,C_1 + U\,D_1U = 0 \\ A_2 + B_2U + U\,C_2 + U\,D_2U = 0 \end{array}\right\} \tag{3.4}$$

y $p(\lambda) = \sum_{j=o}^{r} a_j\lambda^j$, $q(\lambda) = \sum_{k=o}^{s} b_k\lambda^k$, *son polinomios anuladores de las matrices* B_1+UD_1, C_2+D_2U, *respectivamente, entonces* U *es solución del sistema lineal*

$$\left.\begin{array}{l} A + U\,B = 0 \\ C + D\,U = 0 \end{array}\right\} \tag{3.5}$$

donde

$$\left.\begin{array}{ll} A = (\sum_{j=o}^{r} a_j U_j) C_2 \quad , & B = (\sum_{j=o}^{r} a_j V_j) C_2 \\ C = B_1 (\sum_{k=o}^{s} b_k Y_k) \quad , & D = B_1 (\sum_{k=o}^{s} b_k Z_k) \end{array}\right\} \qquad (3.6)$$

con las matrices U_j, V_j, Y_k, Z_k *definidas por*

$$\begin{bmatrix} U_j \\ V_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 & -A_1 \\ D_1 & -C_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{j-1} \\ V_{j-1} \end{bmatrix}, \; 1 \leqslant j \leqslant r \; , \begin{bmatrix} U_o \\ V_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \qquad (3.7)$$

$$\begin{bmatrix} Y_k & Z_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{k-1} & Z_{k-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_2 & D_2 \\ A_2 & -B_2 \end{bmatrix}, \; 1 \leqslant k \leqslant s \; , \; [Y_o \quad Z_o] = [0 \quad I] \quad (3.8)$$

Demostración. Si U es solución del sistema (3.4), entonces U es solución del sistema

$$\left.\begin{array}{l} A_1 + E_1 U + U C_1 = 0 \\ A_2 + E_2 U + U C_2 = 0 \end{array}\right\} \qquad (3.9)$$

donde $E_1 = B_1 + UD_1$, $E_2 = B_2 + UD_2$.

A partir de la segunda ecuación de (3.9) se sigue que

$$\left.\begin{array}{l} A_2 + E_2 U + U C_2 = 0 \\ E_1 A_2 + E_1 E_2 U + E_1 U C_2 = 0 \\ \quad \cdots \\ E_1^r A_2 + E_1^r E_2 U + E_1^r U C_2 = 0 \end{array}\right\} \qquad (3.10)$$

De la primera ecuación de (3.9) resulta, $E_1 U = -A_1 - UC_1 = U_1 + UV_1$, $U_1 = -A_1$, $V_1 = -C_1$, y postmultiplicando sucesivamente por E_1, se sigue que

$$E_1^j U = U_j + U V_j \quad , \quad o \leqslant j \leqslant r \qquad (3.11)$$

Las matrices U_j, V_j pueden calcularse recurrentemente. En efecto

$$U_j + UV_j = E_1^j U = E_1 E_1^{j-1} U = E_1 (U_{j-1} + UV_{j-1}) = E_1 U_{j-1} + E_1 U V_{j-1} =$$
$$= (B_1 + UD_1) U_{j-1} + (-A_1 - UC_1) V_{j-1} = (B_1 U_{j-1} - A_1 V_{j-1}) +$$
$$+ U (D_1 U_{j-1} - C_1 V_{j-1})$$

luego U_j, V_j satisfacen las ecuaciones recurrentes (3.7).
Multiplicando la j-ésima ecuación de (3.10) por a_j y efectuando

las sustituciones (3.11), se obtiene que $a_j E_1^j A_2 + a_j E_1^j E_2 U +$ $+ a_j (U_j + UV_j) C_2 = 0$, para $j = o,1,\ldots,r$, y sumando miembro a miembro, resulta

$$p(E_1)A_2 + p(E_1)E_2U + (\sum_{j=o}^{r} a_j U_j)C_2 + U(\sum_{j=o}^{r} a_j V_j)C_2 = 0$$

Como $p(E_1) = 0$, se concluye que U es solución de la ecuación $A+UB = 0$, con las matrices A y B dadas por (2.3).

Por otra parte si U es solución de (3.4) entonces U también satisface el sistema

$$\left.\begin{aligned} A_1 + B_1U + UF_1 &= 0 \\ A_2 + B_2U + UF_2 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

donde $F_1 = C_1 + D_1U$, $F_2 = C_2 + D_2U$. Mediante un razonamiento análogo al anterior se prueba que si $q(\lambda)$ es un polinomio anulador de F_2 entonces U es solución de $C+DU = 0$, con C y D dadas por (3.6).

El resultado siguiente es un recíproco del teorema 4.

TEOREMA 5. *Sean* $A_i \in \mathbf{C}_{m\times n}$, $B_i \in \mathbf{C}_{m\times m}$, $C_i \in \mathbf{C}_{n\times n}$, $D_i \in \mathbf{C}_{n\times m}$, $i=1,2$. *Si* $p(\lambda) = \sum_{j=o}^{r} a_j \lambda^j$, $q(\lambda) = \sum_{k=o}^{s} b_k \lambda^k$, *son polinomios tales que las matrices*

$$p\left(\begin{bmatrix} B_1 & -A_1 \\ D_1 & -C_1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} M & A \\ N & B \end{bmatrix} \quad ; \; q\left(\begin{bmatrix} C_2 & D_2 \\ -A_2 & -B_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} P & Q \\ C & D \end{bmatrix} \qquad (3.12)$$

satisfacen las condiciones:

(i) B *invertible*, $M = AB^{-1}N$; (ii) D *invertible*, $P = QD^{-1}C$; (iii) $DA = CB$ *se verifica entonces que la única solución del sistema lineal*

$$\left.\begin{aligned} A + UB &= 0 \\ C + DU &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (3.13)$$

es solución del sistema cuadrático

$$\left.\begin{aligned} A_1 + B_1U + UC_1 + UD_1U &= 0 \\ A_2 + B_2U + UC_2 + UD_2U &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (3.14)$$

Demostración. Bajo las hipótesis de que B y D son invertibles y que $DA = CB$ se verifica que el sistema (3.13) admite solución única dada por $U = -AB^{-1} = -D^{-1}C$. Probaremos a continuación que dicha solución única satisface el sistema cuadrático (3.14). Postmultiplicando la primera ecuación de (3.13) por $B^{-1}N$ y aplicando la hipótesis $M = AB^{-1}N$ resulta que

$$M + U N = 0 \tag{3.15}$$

Como las matrices $\begin{bmatrix} B_1 & -A_1 \\ D_1 & -C_1 \end{bmatrix}$ y $p(\begin{bmatrix} B_1 & -A_1 \\ D_1 & -C_1 \end{bmatrix})$ conmutan entre sí, se cumple $\begin{bmatrix} B_1 & -A_1 \\ D_1 & -C_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M & A \\ N & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M & A \\ N & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 & -A_1 \\ D_1 & -C_1 \end{bmatrix}$

de donde se deduce

$$\left.\begin{aligned} B_1A - A_1B &= -MA_1 - AC_1 \\ D_1A - C_1B &= -NA_1 - BC_1 \end{aligned}\right\}$$

luego

$$\left.\begin{aligned} AC_1 &= -MA_1 - B_1A + A_1B \\ BC_1 &= -NA_1 - D_1A + C_1B \end{aligned}\right\} \tag{3.16}$$

Teniendo en cuenta que, según hemos probado, la única solución de la ecuación $A+UB = 0$ también satisface la ecuación (3.15), resulta que

$$\left.\begin{aligned} A &= -U B \\ M &= -U N \end{aligned}\right\} \tag{3.17}$$

Postmultiplicando la ecuación $A+UB = 0$ por C_1 y sustituyendo a continuación las expresiones (3.16) y (3.17) se obtiene

$$AC_1 + UBC_1 = 0$$

$$(-MA_1 - B_1A + A_1B) + U(-NA_1 - D_1A + C_1B) = 0$$

$$UNA_1 + B_1UB + A_1B - UNA_1 + UD_1UB + UC_1B = 0$$

$$(A_1 + B_1U + UC_1 + UD_1U)B = 0$$

Postmultiplicando la última ecuación por B^{-1} se concluye que $A_1+B_1U+UC_1+UD_1U=0$. Por otro lado, premultiplicando la segunda ecuación de (3.13) por QD^{-1} y aplicando la hipótesis $P = QD^{-1}C$ se obtiene $P + QU = 0$.

Como las matrices $\begin{bmatrix} C_2 & D_2 \\ -A_2 & -B_2 \end{bmatrix}$ y $q(\begin{bmatrix} C_2 & D_2 \\ -A_2 & -B_2 \end{bmatrix})$ conmutan entre sí, un razonamiento análogo al anterior muestra que $A_2 + B_2U + UC_2 + UD_2U = 0$. Esto concluye la demostración del teorema, y nótese que las matrices A, B, C y D que han aparecido pueden ser calculadas mediante expresiones análogas a (3.6)-(3.8) del teorema 4.

4. APLICACIONES.

En esta sección aplicaremos los resultados anteriores al caso particular de ecuaciones diferenciales matriciales del tipo Lyapunov, es decir con $D(t) = 0$. Veremos que en este caso hay una correspondencia biunívoca entre el conjunto de soluciones del problema de contorno inicial y el del problema algebraico asociado. Estudiaremos en particular el problema de la determinación de soluciones periódicas para dichas ecuaciones.
Sea el problema de contorno

$$\left.\begin{aligned} d/dt\, U(t) &= A(t) + B(t)U(t) - U(t)C(t) \\ E_1U(t_1) - U(o)F_1 &= G_1 \\ E_2U(t_2) - U(o)F_2 &= G_2 \end{aligned}\right\} \qquad (4.1)$$

donde t_1, t_2, y los coeficientes de las condiciones de contorno y de la ecuación diferencial vienen dados como en las secciones anteriores. Asociado al problema de contorno (4.1) sean los sistemas diferenciales vectoriales lineales

$$d/dt\, x(t) = B(t)x(t) \qquad (4.2)$$

$$d/dt\, y(t) = C(t)y(t) \qquad (4.3)$$

TEOREMA 6. *El problema de contorno (4.1) admite solución si y sólo si existe solución del sistema algebraico*

$$\left.\begin{aligned} M_1 + N_1U - U\,P_1 &= 0 \\ M_2 + N_2U - U\,P_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (4.4)$$

donde los coeficientes vienen dados por

$$N_1 = E_1\Phi_B(t_1,o)\ ,\ P_1 = F_1\Phi_C(t_1,o)\ ,\ N_2 = E_2\Phi_B(t_2,o)\ ,\ P_2 = F_2\Phi_C(t_2,o)$$

$$M_1 = -G_1\Phi_C(t_1,o) + E_1\int_o^{t_1}\Phi_B(t_1,s)A(s)\Phi_C(s,o)\,ds \qquad (4.5)$$

$$M_2 = -G_2\Phi_C(t_2,o) + E_2\int_o^{t_2}\Phi_B(t_2,s)A(s)\Phi_C(s,o)\,ds$$

Cuando la condición (4.5) se verifica, el conjunto de soluciones del problema (4.1) viene dado por

$$U(t) = \Phi_B(t,o)U_o\Phi_C(o,t) + \int_o^t \Phi_B(t,s)A(s)\Phi_C(s,t)\,ds \qquad (4.6)$$

siendo U_o *solución del sistema algebraico (4.4), y* $\Phi_B(t,o)$, $\Phi_C(t,o)$, *las matrices de transición de estados en o de (4.2) y (4.3) respectivamente.*

Demostración. Es fácil comprobar que para el problema (4.1) la matriz $\Phi(t,o)$ del sistema (2.3) viene dada por

$$\begin{aligned} \Phi_{11}(t,o) &= \Phi_C(t,o) \quad , \quad \Phi_{12}(t,o) = 0 \; , \\ \Phi_{21}(t,o) &= \int_o^t \Phi_B(t,s)A(s)\Phi_C(s,o)\,ds \quad , \quad \Phi_{22}(t,o) = \Phi_B(t,o) \end{aligned} \qquad (4.7)$$

Probaremos que (4.1) admite solución si y sólo si el sistema (4.4) es compatible; ahora bien, esto es consecuencia del corolario 1 de la pág.4.
En nuestro caso, la expresión $\Phi_{11}(t,o)+\Phi_{12}(t,o)U_o = \Phi_{11}(t,o) = \Phi_C(t,o)$ es invertible para todo $t \in [o,t_2]$, y por el teorema 2, las soluciones de (4.1) tienen la forma

$$\begin{aligned} U(t) &= (\Phi_{21}(t,o)+\Phi_{22}(t,o)U_o)(\Phi_{11}(t,o)+\Phi_{12}(t,o)U_o)^{-1} = \\ &= \Phi_B(t,o)\, U_o\, \Phi_C(o,t) + \int_o^t \Phi_B(t,s)A(s)\Phi_C(s,t)\,ds \; . \end{aligned}$$

COROLARIO 2. *Sea la ecuación diferencial matricial*

$$d/dt\; U(t) = A(t) + B(t)U(t) - U(t)C(t) \qquad (4.8)$$

donde las matrices $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ *están definidas en* $(-\infty,+\infty)$ *y son continuas* T*-periódicas,* $T > 0$. *Entonces se verifica*

(i) *Existen soluciones* T*-periódicas de (4.8) si y sólo si las matrices*

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & P \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} N & -M \\ 0 & P \end{bmatrix}$$

son semejantes, donde

$$\begin{aligned} N &= \Phi_B(T,o) \quad , \quad P = \Phi_C(T,o) \\ M &= \int_o^T \Phi_B(T,s)A(s)\Phi_C(s,o)\,ds \end{aligned} \qquad (4.9)$$

y $\Phi_B(t,o)$, $\Phi_C(t,o)$, *son las matrices de transición de estados en* o *de (4.2) y (4.3) respectivamente.*

(ii) *La condición necesaria y suficiente para que la ecuación tenga una única solución* T-*periódica es que los espectros de las matrices* N *y* P *dadas por (4.9) sean disjuntos.*

Demostración. Nótese que si en el problema (4.1) consideramos $E_1=E_2=I$, $F_1=F_2=I$, $G_1 = G_2 = 0$, una solución T-periódica de (4.8) queda determinada de forma única a partir de una solución del problema (4.1). Por el teorema 6, existe solución T-periódica si y sólo si existe solución de la ecuación

$$M + N U - U P = 0 \tag{4.10}$$

donde de acuerdo con (4.4) y (4.5), M, N y P vienen dadas por (4.9). Por [6], se concluye (i). Por (i) y por [7], se deduce (ii).

NOTA. Utilizando [7], la única solución T-periódica del problema (4.8), dada por el apartado (ii) del corolario 2, tiene la forma dada por (4.6) donde U_o es

$$U_o = \left(\sum_{k=o}^{n} p_k N^k\right)^{-1}\left(-\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} p_j N^{j-1} M P^{k-j}\right)$$

siendo $p(\lambda) = \sum_{k=o}^{n} p_k \lambda^k$ el polinomio característico de P.

REFERENCIAS

[1] M.ATHANS, P.FALB, *Optimal Control*, Ed. Mc-Graw Hill, New York, 1966.

[2] S.BITTANTI, P.COLANERI, G.GUARDABASSI, *Periodic solutions of periodic Riccati equations*, IEEE Trans. Autom. Control, Vol. AC-29, p.471-487, 1979.

[3] S.BITTANTI, P.BOLZERN, P.COLANERI, *Stability analysis of linear periodic systems via the Lyapunov equation*, IFAC'84, Budapest, Vol.III, 169-172.

[4] R.W.BROCKETT, *Finite-dimensional linear system*, Ed. John Wiley, New York, 1979.

[5] R.S.BUCY, P.D.JOSEPH, *Filtering for stochastic processes with Applications to Guidance*, Ed. Interscience, New York, 1968.

[6] M.FLANDERS, H.K.WIMMER, *On the matrix equation* AX-XB=C, AX-YB= =C, SIAM J. Appl. Math. 32 (1977), 707-710.

[7] A.JAMESON, *Solution of the equation* AX+XB=C *by inversion of an* MxM *or* NxN *matrix*, SIAM J. Appl. Math., 16 (1968), 1020-1023.

[8] K.MARTENSSON, *On the matrix Riccati Equation*, Inf. Sci., 3 (1971), 17-49.

[9] W.H.KWON, A.E.PEARSON, *Linear Systems with Two-Point Boundary Lyapunov and Riccati Equations*, IEEE Trans. on Autom. Control, AC-27 (1982), 436-441.

Departamento de Matemáticas E.T.S.I.I.
Universidad Politécnica de Valencia.
ESPAÑA.

Recibido en diciembre de 1984.