

## COMENTARIO A UN TEOREMA DE JAKOB STEINER

A.I. Benedek y R. Panzone

SUMMARY. Let  $J$  be a closed Jordan curve. We call  $D$  its interior domain and  $D_r := \{x; \text{dist}(x, D) \leq r\}$ ,  $S_r := D_r \setminus D$ . A theorem of Jakob Steiner implies that if  $J$  has finite length then the area of  $S_r$  is  $O(r)$ . In Thm.1 we show some examples of Jordan curves with null area but infinite length such that if  $r \rightarrow 0$  then  $S_r \sim r^\beta$  for a given  $\beta \in (0, 1)$ , or  $S_r \geq M/|\ln r|^\gamma$  for  $\gamma \in (0, 1)$  and some  $M > 0$ . We give also a proof of the theorem of Steiner (Thm.2) that states that area  $S_r \leq r \cdot \text{length } J + \pi r^2$  in case that the contour curve  $J$  is rectifiable, using an approximation of  $J$  by polygonals satisfying certain special properties.

### 1. INTRODUCCION.

Llamaremos curva de Jordan a cualquier imagen homeomórfica de la circunferencia sobre el plano mientras que arco de Jordan designará a toda imagen homeomórfica de un segmento cerrado finito. Una curva de Jordan es un continuo nunca denso que puede ser rectificable o no. Y solamente en el último caso puede ocurrir que posea área no nula, ([H], p.374).

Dada la curva de Jordan  $J$  designaremos con  $D = D(J)$  a su recinto interior. Sean

$$S_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^2 \setminus D: \text{dist}(x, J) \leq \varepsilon\},$$

$$I_\varepsilon = \{x \in \bar{D}: \text{dist}(x, J) \leq \varepsilon\}.$$

Un teorema de J. Steiner (1796-1863) implica que si  $J$  es rectificable la medida de  $S_\varepsilon$  es del orden de  $\varepsilon$ :  $|S_\varepsilon| = O(\varepsilon)$ , ([G], p.81).

Una inversión con centro un punto de  $D$  muestra que en este caso también  $|I_\varepsilon| = O(\varepsilon)$ . Si la curva  $J$  tuviera área positiva entonces  $|I_\varepsilon| \geq c$ ,  $c > 0$ , y el teorema resulta óptimo en cierto sentido. A continuación mostramos que aún cuando el área de  $J$  sea nula el re-

sultado no puede mejorarse.

Diremos que  $|I_\varepsilon|$  es como  $\varepsilon^\beta$ ,  $|I_\varepsilon| \sim \varepsilon^\beta$ , si existen dos constantes positivas  $m$  y  $M$  tales que:  $m \varepsilon^\beta \leq |I_\varepsilon| \leq M \varepsilon^\beta$  para todo  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ .

TEOREMA 1. i) Sea  $\beta \in (0, 1)$ . Existe una curva de Jordan de área nula tal que  $|I_\varepsilon| \sim \varepsilon^\beta$ .

ii) Sea  $\gamma \in (0, 1)$ . Existen una curva de Jordan de área nula y una constante  $m > 0$  tales que

$$|I_\varepsilon| \geq m/|\ln \varepsilon|^\gamma \quad \text{si } \varepsilon < \varepsilon_0.$$

La sección siguiente está dedicada a la demostración de estas proposiciones. El resto de la presente nota se ocupa con una demostración del teorema de Steiner arriba citado, (cf.T.2, §3).

## 2. DEMOSTRACION DEL TEOREMA 1.

En las páginas 326 y 374 del libro de Hausdorff citado en las referencias se puede hallar la construcción de un arco de Jordan  $H$  que utilizaremos como la parte fundamental de la curva de Jordan  $J$  a definir. Ese arco une los vértices  $\alpha$  y  $\beta$  de un cuadrado de lado  $\ell$  y pasa por todos los puntos de un conjunto  $Q$  que es perfecto, acotado y totalmente desconexo.

En la fig.1 aparecen los segmentos  $B_2, B_4, B_6, \dots, B_{32}, B_{34}, B_{36}, \dots$  que forman parte de  $H$  obtenidos en los pasos  $n=0$  y  $n=1$  de la construcción. Un punto del cuadrado  $\alpha\delta\beta\gamma$  pertenece a  $Q$  si y sólo si pertenece a infinitos cuadrados  $B_{ij\dots k}$ . Suponemos el arco  $H$  completado por un arco de circunferencia de centro  $\gamma$  y radio  $\ell$  de manera que juntos determinen una curva  $J$  de interior  $D$ , el cual contiene las regiones rayadas de la figura.  $F: [0, 1] \rightarrow H$  es una parametrización de  $H$  cuya definición utiliza el sistema heptádico de numeración.

En la construcción de  $H$  llamaremos  $\ell_i$  la longitud del lado de un cuadrado en el paso  $i$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots$ ,  $a_i$  designará la longitud del lado de los cuatro nuevos cuadrados obtenidos en la subdivisión de uno de lado  $\ell_i$ . Entonces,  $a_i = \ell_{i+1}$ ,  $\ell_i = 2a_i + c_i$ .

Supondremos que  $0 < \ell_0 \leq 1$  y que  $2^k a_k = \delta_k$  con  $\ell_0/2 > \delta_0 > \delta_1 > \delta_2 > \dots$ .

La unión de las cruces tiene área igual a

$$(1) \quad (\ell_0^2 - 4a_0^2) + 4(\ell_1^2 - 4a_1^2) + \dots = \ell_0^2 - 4 \lim \delta_i^2.$$

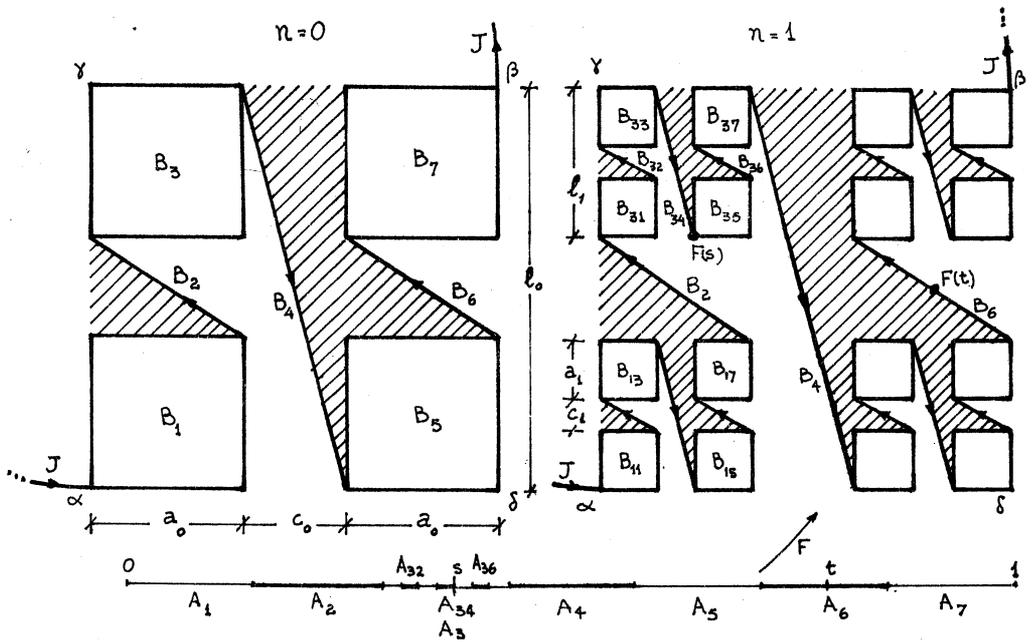


Figura 1

En consecuencia,  $|Q| = 4 \cdot \lim \delta_1^2$ . Supondremos en lo que sigue que  $\delta_1 \neq 0$ . De esta forma:  $|Q| = |H| = |J| = 0$ .

Demostración de i). Designaremos con  $\ell$ ,  $a$  y  $c$  a  $\ell_0$ ,  $a_0$  y  $c_0$  respectivamente y supondremos que  $2a > c > 0$ . Luego  $4a/\ell > 1$ . También supondremos en este caso que el cociente  $a_i/\ell_i$  es constante. O sea,

$$a_k = (a/\ell)^k a, \quad \delta_k = (2a/\ell)^k a + 0.$$

La longitud de la suma de las diagonales  $B_2, B_4, B_6, \dots$ , hasta el paso  $n$ -ésimo incluido es mayor que

$$(2) \quad (\ell + 2a) \sum_{j=0}^n (4a/\ell)^j = [\ell(\ell + 2a)/(2a - c)] \cdot [(4a/\ell)^{n+1} - 1].$$

Observemos que la suma de las longitudes de las diagonales hasta el paso  $n$ -ésimo incluido es menor que

$$(3) \quad [\ell + c + 2(a+c)] \frac{(4a/\ell)^{n+1} - 1}{4a/\ell - 1} \leq 2 \left[ \frac{\ell(\ell + 2a)}{2a - c} \right] \cdot [(4a/\ell)^{n+1} - 1],$$

pues  $\ell + c + 2(a + c) < 2\ell + 4a$ .

Dado  $\epsilon > 0$ , definamos  $n = n(\epsilon)$  por  $c_{n+1} = c(a/\ell)^{n+1} < \epsilon \leq c_n =$

$= \frac{c\ell}{a} (a/\ell)^{n+1}$ . Luego  $n \rightarrow \infty$  para  $\epsilon \rightarrow 0$ . Designemos con  $I'_\epsilon$  al conjunto de

puntos de  $I_\varepsilon$  contenidos en el cuadrado  $\alpha\delta\beta\gamma$ . Entonces, el área de  $I'_\varepsilon$  es mayor que:  $(1/2)$ . suma de las áreas de las cruces en los pasos  $n+1, n+2, \dots + (\varepsilon/2)$ . longitud de la suma de las diagonales hasta el paso  $n$ . Por lo tanto

$$(4) \quad |I'_\varepsilon| > \frac{1}{2} 4^{n+1} \left(\frac{a}{\ell}\right)^{2(n+1)} \ell^2 + \frac{\varepsilon}{2} \frac{\ell(\ell + 2a)}{2a - c} \left[\left(\frac{4a}{\ell}\right)^{n+1} - 1\right].$$

Por otra parte la medida de  $I'_\varepsilon$  es menor que:  $(1/2)$ . la suma de las áreas de las cruces en los pasos  $n+1, n+2, \dots + \varepsilon$ . longitud de la suma de las diagonales hasta el paso  $n$ . Es decir,

$$(5) \quad |I'_\varepsilon| < \frac{1}{2} 4^{n+1} \left(\frac{a}{\ell}\right)^{2(n+1)} \ell^2 + \varepsilon \cdot 2 \frac{\ell(\ell + 2a)}{2a - c} \left[\left(\frac{4a}{\ell}\right)^{n+1} - 1\right].$$

Luego, de (4) y (5)

$$\begin{aligned} \left(\frac{2a}{\ell}\right)^{2(n+1)} \left[\frac{\ell^2}{2} + \frac{c \ell(\ell + 2a)}{2(2a - c)} \left\{1 - \left(\frac{\ell}{4a}\right)^{n+1}\right\}\right] &< |I'_\varepsilon| < \\ &< \left(\frac{2a}{\ell}\right)^{2(n+1)} \left[\frac{\ell^2}{2} + 2 \frac{c \ell^2(\ell + 2a)}{a(2a - c)}\right]. \end{aligned}$$

Como  $\left(\frac{\ell}{4a}\right)^{n+1} \leq \frac{\ell}{4a} < 1$ , resulta entonces,

$$(6) \quad (2a/\ell)^{2(n+1)} \cdot K_1 < |I'_\varepsilon| < (2a/\ell)^{2(n+1)} \cdot K_2, \text{ donde}$$

$$K_1 = \frac{\ell^2}{2} + \frac{c\ell}{2} \frac{(\ell + 2a)}{4a}, \quad K_2 = \frac{\ell^2}{2} + 2 \frac{c\ell^2(\ell + 2a)}{a(2a - c)}.$$

Entonces  $|I'_\varepsilon| \sim \varepsilon^\beta$  si y sólo si  $\left(\frac{2a}{\ell}\right)^{2(n+1)} \sim \left(\frac{a}{\ell}\right)^{(n+1) \cdot \beta}$ . Esto vale exactamente cuando

$$(7) \quad (2a/\ell)^2 = (a/\ell)^\beta.$$

Sea  $\beta = \beta(a/\ell)$  el número en  $(0,1)$  para el cual se da la igualdad (7). Si  $a/\ell > 1/2$  entonces  $\beta > 0$ , y esto implica la tesis i).

Demostración de ii). Sea  $0 < \varepsilon < \delta_0 - \delta_1$ . Definimos  $n = n(\varepsilon)$  por medio de las siguientes desigualdades:

$$2^{-n}(\delta_n - \delta_{n+1}) = c_{n+1} < \varepsilon \leq c_n = 2^{1-n}(\delta_{n-1} - \delta_n).$$

La medida de  $I'_\varepsilon$  es seguramente mayor que:  $(1/2)$ . suma de las áreas de las cruces que aparecen en los pasos  $n+1, n+2, \dots$ . Es decir,

$$(8) \quad |I'_\varepsilon| > (1/2) \cdot 4^{n+1} a_n^2 = 2 \delta_n^2.$$

Elijamos ahora los  $\delta_h$ ,  $h = 0, 1, 2, \dots$ :

$$(9) \quad \delta_h = 1/2(h + 1)^{\gamma/2}.$$

Entonces tenemos:  $\delta_{n-1} - \delta_n = \gamma/4(n + \theta)^{1+\gamma/2}$ ,  $0 < \theta < 1$ ; y por lo tanto:  $\epsilon < \gamma 2^{-n}/2n^{1+\gamma/2}$ .

En consecuencia,  $n \ln 2 < \ln 1/\epsilon$ , y de (8) sigue que

$$|I'_\epsilon| > 2 \cdot \delta_n^2 = 1/2(n + 1)^\gamma > [(1 \ln 2)^\gamma / 2^{\gamma+1}] / |\ln \epsilon|^\gamma. \quad \text{QED.}$$

### 3. POLIGONALES.

Sea  $J$  una curva de Jordan,  $D = D(J)$  su interior y  $p$  un número no negativo. Definimos:

$$D_p = \{x: \text{dist}(x, D) \leq p\}, \quad D_{p-} = \{x: \text{dist}(x, D) < p\}.$$

Es fácil demostrar las siguientes relaciones

$$(i) \quad D_{0-} = \emptyset, \quad D_0 = \bar{D} = D \cup J,$$

$$(ii) \quad D_{p-} \subset D_p \subset D_{(p+\epsilon)-} \quad \text{si } \epsilon > 0,$$

$$(iii) \quad D_p = \{x: \text{dist}(x, \bar{D}) \leq p\}, \quad D_{p-} = \{x: \text{dist}(x, \bar{D}) < p\},$$

$$(iv) \quad D_p = D_0 \cup \{x \notin D_0: \text{dist}(x, J) \leq p\}.$$

Sea  $\{S^{(1)}, \dots, S^{(m)}\}$  una colección de segmentos cerrados finitos de extremos  $a(i), b(i)$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Si para todo  $i = 1, 2, \dots, m-1$ ,  $b(i) = a(i+1)$ , entonces diremos del conjunto  $T = \bigcup_{i=1}^m S^{(i)}$  que es una *poligonal*. Y si además  $b(m) = a(1)$ , diremos que  $T$  es una *poligonal cerrada*. Si la poligonal cerrada  $T$  tiene la propiedad que la intersección de dos lados cualesquiera es a lo sumo un vértice de ambos, diremos que  $T$  es una *poligonal cerrada en sentido estricto*. Una poligonal cerrada en sentido estricto se dirá *simple* si coincide con una curva de Jordan. Llamaremos *convexa* a aquella poligonal simple que defina junto con su recinto interior un polígono convexo.

Sea  $L$  una poligonal *convexa* y  $D = D(L)$ ;  $|D|$  la medida plana de  $D$  y  $[L]$  la longitud de  $L$ . Para todo  $r$  positivo es fácil ver que vale

$$(10) \quad |D_r| = |D| + [L]r + \pi r^2.$$

En particular tenemos

$$(11) \quad |D_{r-}| \leq |D| + [L]r + \pi r^2, \quad r > 0.$$

Si en lugar del recinto  $D$  tuviéramos un segmento cerrado finito  $\ell$  también podríamos definir  $\ell_{r-}$  según (iii) y obtendríamos

$$(12) \quad |\ell_{r-}| = 2[\ell]r + \pi r^2.$$

PROPOSICION 1. (11) vale aún para poligonales simples.

*Demostración.* Sea  $L$  una poligonal simple cualquiera. Demostraremos por inducción sobre  $n$ , el número de lados (vértices) de  $L$ . La proposición vale, por lo dicho arriba, para  $n=3$ . Sea  $n > 3$ . Existe un segmento  $\ell$  interior a  $D$  cuyos vértices coinciden con vértices de  $L$  (cf. [B], p.22). Sean  $D_1$  y  $D_2$  los dos recintos poligonales en que  $\ell$  divide a  $D$ . Entonces,  $|D| = |D_1| + |D_2|$  y  $D_{1,r-} \cap D_{2,r-} \supset \ell_{r-}$ , (cf. Fig. 2). Luego,

$$\begin{aligned} |D_{r-}| &= |D_{1,r-}| + |D_{2,r-}| - |D_{1,r-} \cap D_{2,r-}| \leq \\ &\leq |D_1| + [L_1]r + \pi r^2 + |D_2| + [L_2]r + \pi r^2 - (2[\ell]r + \pi r^2) = \\ &= |D| + [L]r + \pi r^2, \end{aligned} \quad \text{QED.}$$

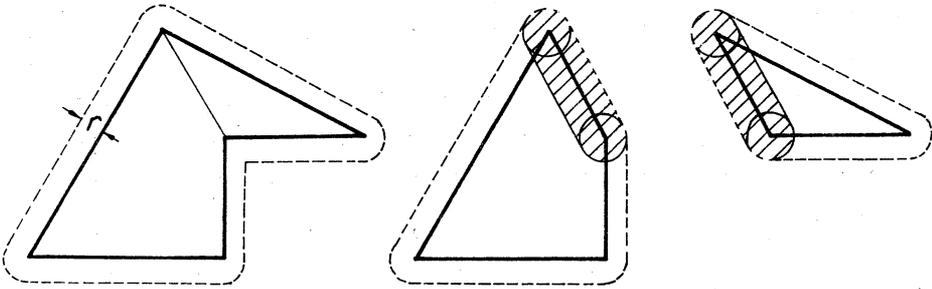


Figura 2

El teorema de Steiner que queremos demostrar dice así:

TEOREMA 2. Sea  $J$  una curva de Jordan rectificable y  $D = D(J)$ . Entonces si  $r > 0$ ,

$$(13) \quad |D_r| \leq |D| + [J]r + \pi r^2.$$

4. PLURIPOLIGONALES.

A un continuo  $P$  se le llamará *pluripoligonal* si  $P = \bigcup_{i=1}^n L_i$ , donde  $L_i$  es una poligonal simple de interior  $D_i$  tal que

- i)  $D_i \cap L_j = \emptyset$  para todo  $i, j$ ,
- ii)  $L_i \cap L_j$  es vacío o un vértice de ambas,
- iii)  $E := \bigcap_{j=1}^n C(\bar{D}_j) = C(\bigcup_{j=1}^n \bar{D}_j)$  es un dominio, (ver Fig.3).

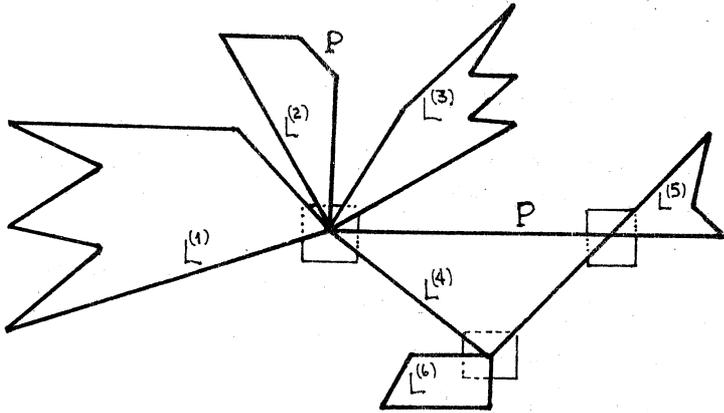


Figura 3

Las siguientes proposiciones aclaran los alcances de esta definición.

PROPOSICION 2. j) Si  $P$  es una pluripoligonal,  $P = \bigcup_{i=1}^n L_i$ , entonces los dominios residuales de  $C(P)$  son:  $D_1, \dots, D_n, E$ .

jj) Todo continuo subconjunto de  $P$  de la forma  $\tilde{P} = \bigcup_{i \in I} L_j$  es una pluripoligonal.

*Demostración.* j) sigue inmediatamente, y jj) quedará demostrada si probamos que  $\tilde{E} = C(\bigcup_{i \in I} \bar{D}_j)$  es conexo. Si no fuera así existirían dos abiertos,  $\tilde{E}_1, \tilde{E}_2$ , no vacíos, disjuntos, tales que  $\tilde{E} = \tilde{E}_1 \cup \tilde{E}_2$ . El dominio residual  $E$  estará contenido en  $\tilde{E}_1$  o en  $\tilde{E}_2$ . Supongamos  $E \subset \tilde{E}_1$  y  $L_j \not\subset \tilde{P}$ . Como  $L_j \subset \bar{E}$  resulta  $L_j \subset \tilde{E}_1$  y por lo tanto:  $L_j \cap \tilde{E} \subset \tilde{E}_1$ . Entonces no puede ocurrir que  $D_j \subset \tilde{E}_2$ . Luego  $\bar{D}_j \cap \tilde{E} \subset \tilde{E}_1$  y sigue que  $\tilde{E}_2 = \emptyset$ . QED.

Al conjunto abierto  $\bigcup_{i=1}^n D_i$  lo llamaremos el *interior* de  $P$  y a  $E$  el *exterior*. De la pluripoligonal  $\tilde{P}$  diremos que es una *subpluripoligonal* de  $P$ . Otra idea que queremos introducir es la de engrosamiento de

una pluripoligonal. Dada la pluripoligonal  $P$ , sean  $A_1, \dots, A_k$  los vértices de  $P$  que pertenecen a más de una poligonal  $L_i$ . A vértices de esta naturaleza los llamaremos *multivértices*. Sean  $C_1, \dots, C_k$  cuadrados abiertos de diámetros menores que  $d(P)$ , donde  $d(P)$  es la menor distancia entre un vértice de  $P$  y los lados que no concurren a él. Los centros de  $C_1, \dots, C_k$  serán  $A_1, \dots, A_k$  respectivamente. El *engrosamiento* de  $P$  es, por definición, el contorno de la región  $\bigcup_{i=1}^n D_i \cup \bigcup_{j=1}^k C_j$ . Lo denotaremos con  $\hat{P}$ .

PROPOSICION 3.  $\hat{P}$  es una poligonal simple.

Para demostrarlo basta ver que  $\hat{P}$  es una curva de Jordan. Esto lo veremos junto con otros detalles enseguida. La proposición implica que  $P$  es una poligonal cerrada en sentido estricto.

PROPOSICION 4. Sea  $P = \bigcup_{i=1}^n L_i$  una pluripoligonal con multivértices  $A_1, A_2, \dots, A_k$ ,  $k \geq 1$ . Existen dos subpluripoligonales  $P_I$  y  $P_{II}$  tales que:  $P_I \cup P_{II} = P$ ,  $P_I \cap P_{II} = \{A_1\}$ .

DEMOSTRACION DE LAS PROPOSICIONES 3 Y 4: Podemos suponer sin pérdida de generalidad que la poligonal simple  $L_1$  contiene al vértice  $A_1$  y que  $L_{j+1} \cap (L_1 \cup \dots \cup L_j) \neq \emptyset$ ,  $1 \leq j < n$ . Entonces los continuos  $P_i = \bigcup_{j=1}^i L_j$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , son pluripoligonales y  $P_n = P$ , (Prop.2).

Sean  $\hat{P}_1, \dots, \hat{P}_n$ , engrosamientos de los mismos con cuadrados de igual diámetro y menor que  $d(P)$ . Supongamos que  $\hat{P}_1, \dots, \hat{P}_e$ ,  $1 \leq e < n$ , sean poligonales simples. Para que esto mismo ocurra con  $\hat{P}_{e+1}$  bastará ver que:

\*) el polígono  $L_{e+1}$  se adhiere a la poligonal  $P_e$  en un sólo vértice.

Si esto no fuera así el continuo  $\hat{P}_e \cup (L_{e+1} \cap \text{exterior de } \hat{P}_e)$  tendría un dominio residual acotado cuya frontera (poligonal) tiene segmentos contenidos en  $P_e$  y segmentos en  $L_{e+1}$ . Este dominio acotado no está incluido en  $\bigcup_{i=1}^n D_i$ . Por lo tanto posee puntos de  $E$ . Luego,  $E$  no puede ser conexo e infinito. Contradicción.

De \*) sigue que  $\hat{P}_{e+1}$  es una poligonal simple. En consecuencia, también  $\hat{P}_n = \hat{P}$  es una poligonal simple, y queda probada así la propo-

sición 3.

Si quitamos  $L_1$  a  $P$ , la unión de los  $L_j$  restantes se descompone en componentes conexas que son pluripoligonales. Denominaremos  $P_I$  a aquélla que contiene al vértice  $A_1$ . Sea  $P_{II} = L_1 \cup$  restantes componentes conexas.

Entonces  $P_I \cap (P_{II} \setminus L_1) = \emptyset$ , y  $P_I \cap P_{II} = P_I \cap L_1 = \{A_1\}$  por \*), QED.

PROPOSICION 5. Sea  $P = \bigcup_{i=1}^n L_i$  una pluripoligonal. Si  $[P] = \sum_{i=1}^n [L_i]$   $|D| = \sum_{i=1}^n |D_i|$  entonces para todo  $r > 0$  vale

$$(14) \quad |D_{r-}| \leq |D| + [P]r + \pi r^2.$$

*Demostración.* La proposición 1 implica que (14) vale si  $n=1$ . Supongamos que vale para todo  $n < h$  y sea  $P = \bigcup_{i=1}^h L_i$ . Entonces, usando la descomposición de la proposición 4, resulta (ver Fig.4):

$$\begin{aligned} |D_{r-}| &\leq |D_{I,r-}| + |D_{II,r-}| - \pi r^2 \leq \\ &\leq (|D_I| + [P_I]r + \pi r^2) + (|D_{II}| + [P_{II}]r + \pi r^2) - \pi r^2 = \\ &= |D| + [P]r + \pi r^2. \end{aligned} \quad \text{QED.}$$

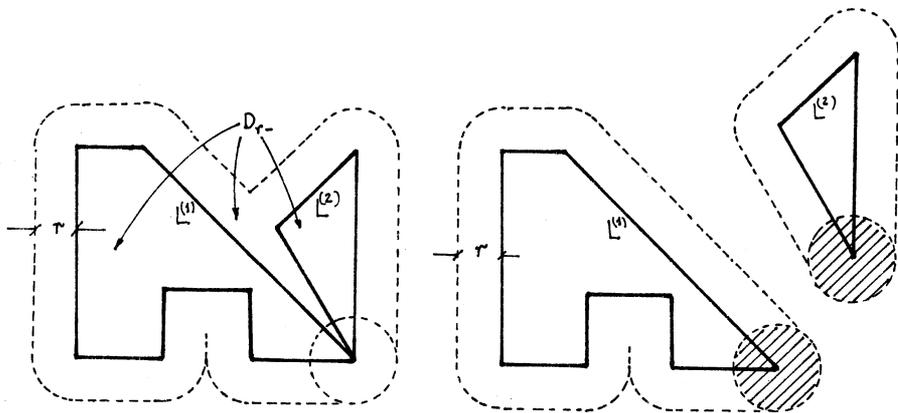


Figura 4

## 5. VAINA POLIGONAL.

Sea  $T = \bigcup_{i=0}^{m-1} [a_i, a_{i+1}]$  una poligonal cerrada en sentido estricto.

Como  $T$  es un continuo,  $C(T)$  tiene sus dominios residuales simplemente conexos, ([N], p.144). Sea  $E$  la componente de  $C(T)$  no acotada. Llamaremos *vaina poligonal* de  $T$ ,  $V(T)$ , a la frontera de  $E$ . Entonces  $V$  es un continuo, ([N], p.144). En realidad es el continuo que "mejor ciñe" a  $T$ , (cf.Fig.5).

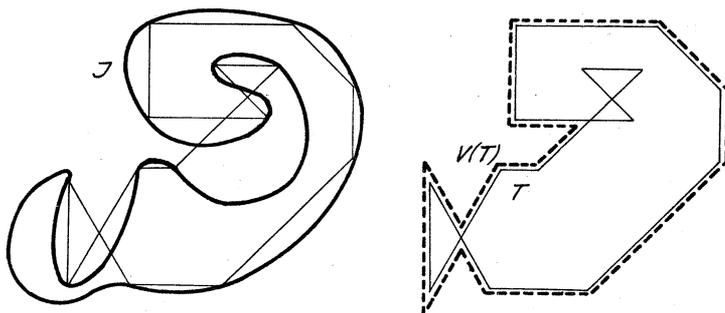


Figura 5

TEOREMA 3.  $V$  es una pluripoligonal.

*Demostración.*  $V$  está formada con lados de  $T$ :  $V = \bigcup_{i=1}^v [a_{j_i}, a_{j_i+1}]$ .

Cada uno de estos 1-símplices es límite, por uno de sus lados al menos, de puntos de  $E$ .  $C(V)$  consta de un número finito de dominios residuales acotados:  $D_1, \dots, D_n$ , y de uno no acotado que coincide con  $E$ .

$D_i$  es un abierto simplemente conexo cuya frontera es una poligonal simple,  $L_i$ , formada por lados de  $T$  que pertenecen a la frontera de  $E$ . Por lo tanto dos dominios residuales de contornos  $L_i, L_j$ , no pueden tener un lado común. Y en caso de poseer vértices en común sólo podrán tener uno pues en caso contrario  $\bar{D}_i \cup \bar{D}_j$  desconectaría al conjunto  $E$ .

Por otra parte si  $D = \bigcup_{i=1}^n D_i$ ,  $E \subset C(\bar{D})$ . Para demostrar que  $V$  es una pluripoligonal sólo resta ver que  $E \supset C(\bar{D})$ . Y para ello es suficiente mostrar que ningún 1-símplice  $[a_{j_i}, a_{j_i+1}]$  es límite por ambos lados de puntos de  $E$ . Sea  $\ell_0$  un 1-símplice de  $V$ , que podemos suponer sin pérdida de generalidad que es  $[a_0, a_1]$ . La poligonal  $T$  es parametrizable con un parámetro  $t$  variando en  $[0, 1]$  y de manera que  $t$  crezca estrictamente al pasar de un punto a otro de  $T$  en el sentido impuesto

por los vértices:  $a_0, a_1, \dots, a_{m-1}$ . Esto puede lograrse pues  $T$  es cerrada en sentido estricto. Dado un punto  $x \in T$ , designaremos con  $t(x)$  al menor valor del parámetro en ese punto y con  $\tau(x)$  al mayor. Obviamente,  $t(x) = \tau(x)$  excepto para los vértices a los cuales concurren más de dos lados y para  $a_0$  ( $\tau(a_0) = 1$ ,  $t(a_0) = 0$ ).

Sea  $\ell_1 = [a_r, a_{r+1}]$  el lado de  $T$  tal que  $\tau(a_1) = \inf\{t(x) : x \in \overset{\circ}{\ell}_1\}$ .

Entonces:  $\ell_0 \cap \ell_1 = \{a_1\}$ ,  $\tau(a_{r+1}) > \tau(a_1)$ .

Si  $a_{r+1} \neq a_0$  podemos repetir el proceso, y así llegamos finalmente a  $a_0$  con un segmento  $\ell_m = [a_s, a_{s+1}]$ ,  $a_{s+1} = a_0$ . Entonces

$J = \{\ell_0, \dots, \ell_m\}$  describe una curva de Jordan.

Como  $J \subset T$ , el interior de  $J$  no tiene puntos en  $E$ . Por lo tanto está contenido en  $C(E) = D \cup V$ .

Como  $V$  es nunca denso,  $\ell_0$  es límite de puntos de  $D$ . QED.

## 6. DEMOSTRACION DEL TEOREMA 2.

Dado  $\epsilon > 0$ , existe un abierto acotado  $O$  tal que:  $O \supset \bar{D}$ ,  $|\partial \bar{D}| < \epsilon$  y la distancia de cualquier punto de  $J$  a  $C(O)$  es menor que  $\epsilon$ . Reticulando el plano con cuadrados de lado suficientemente pequeño menor que  $\epsilon$ , cubriendo  $\bar{D}$  con aquellos que lo intersecan y conectando las poligonales que en número finito forman la frontera de la unión de esos cuadrados puede demostrarse que existe un tal  $O$  que además es simplemente conexo con frontera poligonal, (cf. [N], Cap.V,VI)

Supongamos dada una parametrización de  $J$  de manera que cuando  $t$  crezca de 0 a 1,  $x(t)$  recorra  $J$ ,  $x(0) = x(1)$ .

Dada una partición  $P = \{t_0, t_1, \dots, t_N\}$  de  $[0,1]$ , a ella corresponde

una poligonal cerrada:  $T(P) = \bigcup_{j=0}^{N-1} [a_j, a_{j+1}]$  donde  $a_j = x(t_j) \in J$ .

Tomando esa partición bastante fina podemos suponer que  $T_0 = T(P)$  verifica:

i)  $T_0 \subset O$

ii)  $[T_0] > [J] - \epsilon$

iii) cualquiera sea  $i$ , el arco que une  $a_i$  con  $a_{i+1}$  tiene longitud menor que  $\inf(d, \epsilon/2)$ , siendo  $d$  la distancia de  $J$  a  $C(O)$ .

Es fácil ver que i) es consecuencia de iii).

Diremos que  $T_1$  es un refinamiento de  $T_0$  sobre  $J$  si  $T_1 = T(P_1)$  con  $P_1 \supset P$ . Como todo refinamiento de  $T_0$  verifica ii) e iii) vale:

iv) para todo refinamiento de  $T_0$  vale i).

Mostraremos a continuación que hay un refinamiento de  $T_0, T_1$ , tal que  $T_1 = \bigcup_{i=0}^{M-1} [c_i, c_{i+1}]$  y todo lado de  $T_1$  satisface la siguiente propiedad:

v) si  $[c_i, c_{i+1}]$  no está contenido en  $J$  entonces no es paralelo a ningún otro lado de  $T_1$ .

Entonces  $T_1$  satisfará i)-v). Con lo que en particular quedará probado que  $J$  es aproximable por poligonales que satisfacen esas cinco propiedades.

Admitamos la existencia de una tal poligonal  $T_1$  por un momento. Si dos lados de  $T_1$  se intersecaran en más de un punto serían paralelos por lo que necesariamente estarían contenidos en  $J$ . Pero entonces podrán tener en común a lo sumo un punto. Es decir, si agregamos a  $T_1$  como vértices todas las intersecciones entre lados, obtenemos una poligonal  $T$  cerrada en sentido estricto que puede pensarse como un refinamiento de  $T_1$  sobre sí misma.

Para demostrar la existencia de  $T_1$ , y por lo tanto la de  $T$ , basta demostrar la siguiente proposición:

\*\*\*) dado el lado  $\ell = [a_m, a_{m+1}]$  de  $T_0$ , no contenido enteramente en  $J$ , es posible encontrar puntos  $s_i \in (t_m, t_{m+1})$ ,  $t_m < s_1 < s_2 \dots < s_k < t_{m+1}$ , tales que todo lado de

$$[a_m, x(s_1)] \cup [x(s_1), x(s_2)] \cup \dots \cup [x(s_k), a_{m+1}],$$

o está contenido en  $J$ , o no es paralelo a ningún segmento contenido en  $J$  ni a ningún segmento  $[a_0, a_1], \dots, [a_{m-1}, a_m]$ .

*Demostración de \*\*\*)*: si  $\ell \cap J$  es un segmento con extremo  $a_m$  o  $a_{m+1}$ , el resultado sigue inmediatamente, (cf. Fig. 6). Si el arco  $X$  de  $J$  definido por los puntos  $\{x(t); t_m < t < t_{m+1}\}$  contiene un segmento interior, digamos  $[b_1, b_2] = \{x(t); t_m < w_1 \leq t \leq w_2 < t_m\}$ , el resultado se reduce a los ya tratados.

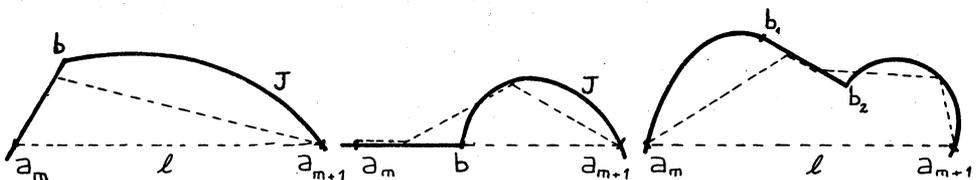


Figura 6

Supongamos ahora que ese arco no contenga ningún segmento incluido en  $J$ . Sea  $\alpha(t)$  la pendiente del segmento  $[a_m, x(t)]$ , y  $\beta(t)$  la del segmento  $[a_{m+1}, x(t)]$ ,  $x(t) \in X$ .  $\alpha(t)$  y  $\beta(t)$  son funciones continuas de  $t \in (t_m, t_{m+1})$ . Hay un número a lo sumo numerable de valores:

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \beta_1, \beta_2, \dots$ , que corresponden a pendientes indeseables. Si el conjunto  $\alpha^{-1}(\alpha_j)$  (o el conjunto  $\beta^{-1}(\beta_i)$ ) contuviera un segmento esto implicaría que  $X$  contendría un segmento, contradicción. En consecuencia,  $H = \cup \alpha^{-1}(\alpha_j) \cup \cup \beta^{-1}(\beta_i)$  es un conjunto de primera categoría. Luego, existe  $t \in (t_m, t_{m+1}) \setminus H$  tal que  $\beta(t)$  y  $\alpha(t)$  corresponden a dos segmentos,  $[a_m, x(t)]$  y  $[x(t), a_{m+1}]$ , que satisfacen los requerimientos de la proposición \*\*), QED.

Sea  $V$  la vaina poligonal de  $T$  y  $p > 0$ . Entonces  $V \subset O$ . Si  $F$  es la unión de los dominios interiores de la pluripoligonal  $V$ , tenemos (cf. T.3 y (14)):

$$(15) \quad |F_{p-}| \leq |F| + |V|p + \pi p^2 \leq |O| + |T|p + \pi p^2,$$

y por lo tanto que:

$$(16) \quad |F_{p-}| \leq (|D| + \epsilon) + |J|p + \pi p^2,$$

pues  $|J| = |\bar{D} \setminus D| = 0$ .

Sea  $q = p - 3\epsilon$ ,  $0 < \epsilon < p/4$ . Supongamos por un momento la siguiente relación que demostraremos enseguida:

$$(17) \quad D_{q-} \subset F_{p-}.$$

En ese caso,

$$(18) \quad |D_{q-}| \leq |D| + |J|p + \pi p^2 + \epsilon.$$

Haciendo  $\epsilon \rightarrow 0$  se obtiene de (18) la siguiente desigualdad:

$$(19) \quad |D_{p-}| \leq |D| + |J|p + \pi p^2.$$

Sea finalmente  $r = \lim_{p \rightarrow 0} p$ . Entonces  $D_r = \lim_{p \rightarrow 0} D_{p-}$  y (13) sigue de (19).

Veamos ahora una demostración de (17). Sea

$$D' = \{x \in D: \text{dist}(x, J) > 3\epsilon\}.$$

Si  $x \in D'$ , el índice de  $x$  respecto de  $J$  es no nulo:  $W_J(x) \neq 0$ . De la construcción de  $T$  sigue entonces que si recorremos esta poligonal según la dirección impuesta por  $J$  a los vértices de  $T$  obtenemos:

$W_T(x) = W_J(x) \neq 0$ . Pero si  $x \in E$ , la componente infinita de  $C(T)$ ,  $W_T(x) = 0$ . Esto prueba que  $D' \cap E = \emptyset$ . Por otra parte:  $D' \cap T = \emptyset$ , y sigue que:

$$(20) \quad D' \subset F.$$

Si  $D_{q-} \not\subset F_{p-}$  existiría  $y \notin F_{p-}$  pero tal que  $y \in D_{q-} \setminus D'$ . En este caso:  $\text{dist}(y, \bar{F}) \geq p$ . Sea  $j \in J$ . Entonces existe  $m \in T$  tal que  $\text{dist}(j, m) < \epsilon/2$ . Como  $T \subset \bar{F}$  entonces  $m \in \bar{F}$  y tenemos:

$$\text{dist}(y, j) \geq \text{dist}(y, m) - \text{dist}(j, m) \geq p - \epsilon/2.$$

Luego,

$$(21) \quad \text{dist}(y, J) > p - \epsilon.$$

Si  $y \notin D$ ,  $\text{dist}(y, J) = \text{dist}(y, D) < p - 3\epsilon$ , contradicción. Si  $y \in D$ ,  $\text{dist}(y, J) < 3\epsilon$ . De esto sigue:  $p < 4\epsilon$ , lo cual es imposible y por lo tanto (17) queda demostrada. QED.

#### REFERENCIAS

- [B] BING, R.H., *The Geometric Topology of 3-Manifolds*, A.M.S., Coll. Pub., vol.40, (1983).
- [G] GUGGENHEIMER, H.W., *Differential Geometry*, Mc Graw-Hill Book Company inc., (1963).
- [H] HAUSDORFF, F., *Grundzüge der Mengenlehre*, Chelsea Publishing Co., (1949).
- [N] NEWMAN, M.H.A., *Elements of the Topology of the Plane Sets of Points*, Cambridge Univ. Press, (1954).

Instituto de Matemática  
 Universidad Nacional del Sur  
 8000 Bahía Blanca, Argentina.