Revista de la
Unión Matemática Argentina
Volumen 32, 1986.

CONVERGENCIA DE POLINOMIOS DE MEJOR l^p-APROXIMACION SOBRE UN CONJUNTO FINITO DE PUNTOS REALES

Miguel Marano y Héctor Cuenya

1. Sea $A = \{x_{ij}\}$, $1 \leqslant i \leqslant s$, $1 \leqslant j \leqslant m_i$, $\sum_i m_i = k$, un conjunto de k puntos de $\mathbf{R}$ y sea $f(x)$ una función real definida en A.

Para $0 < p \leqslant \infty$ consideremos un polinomio $P_A(x) = P_A(f,p,x)$ que mejor aproxima a $f(x)$ entre todos los polinomios $Q(x)$ de grado a lo sumo $r-1$ $(r < k)$ con respecto a la métrica

$$d_p(f,Q) = \sum_{ij}\sum w_{ij}|f(x_{ij})-Q(x_{ij})|^p \qquad 0 < p < 1$$

$$d_p(f,Q) = (\sum_{ij}\sum w_{ij}|f(x_{ij})-Q(x_{ij})|^p)^{1/p} \qquad 1 \leqslant p < \infty$$

$$d_p(f,Q) = \underset{i,j}{\text{Máx}}\ \{w_{ij}|f(x_{ij})-Q(x_{ij})|\} \qquad p = \infty$$

donde $w_{ij} = w_{ij}(A) > 0$ para todo i,j y $\sum_{ij}\sum w_{ij} = 1$.

En este trabajo estudiaremos el comportamiento de $P_A(x)$ cuando los k puntos x_{ij} se aproximan a s puntos fijos u_i de $\mathbf{R}$ (k es fijo). Llamemos $\gamma_A = \underset{i,j}{\text{Máx}}\ |x_{ij}-u_i|$. Más precisamente, encontraremos condiciones sobre la función $f(x)$, los pesos w_{ij} y la forma de aproximación de los puntos x_{ij} que aseguren la convergencia de $P_A(x)$ a un polinomio $P_0(x)$ cuando γ_A tiende a cero. En todo este trabajo la convergencia de polinomios se entenderá como sigue: Cada vez que para todo conjunto A tengamos definida una familia de polinomios $Q_A(x)$, diremos que $Q_A(x)$ converge cuando $\gamma_A \to 0$ a $Q_0(x)$ si dado $\varepsilon > 0$, arbitrario, existe $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que si $\gamma_A < \delta$ entonces $|Q_A^{(\ell)}(0) - Q_0^{(\ell)}(0)| < \varepsilon$ para todo $\ell \geqslant 0$ y todo Q_A en la familia. Nuestro análisis se basará en la condición alternante de $f(x)-P_A(x)$.

DEFINICION. Se dice que una familia $g(x)$ oscila en los puntos $z_1,\ldots,z_m$ de su dominio de definición si

$$g(z_i) = (-1)^i|g(z_i)| \qquad \text{para todo } 1 \leqslant i \leqslant m$$

o bien $\qquad g(z_i) = (-1)^{i+1}|g(z_i)|$ para todo $1 \leqslant i \leqslant m$.

La oscilación se dice estricta si además $g(z_i) \neq 0$ para todo i.

Motzkin y Walsh [1], y posteriormente Rice [2] con más generalidad, han probado la oscilación en r+1 puntos de $f(x)-P_A(x)$ para las métricas aquí consideradas. Más aún, la oscilación resulta estricta para $1 < p \leqslant \infty$ mientras que para $0 < p < 1$ se asegura la existencia de r ceros de $f(x)-P_A(x)$ en A. En todos los casos, si $D_A(x)$ es el polinomio interpolante (de grado k-1) de f(x) en A, la oscilación de $f(x)-P_A(x)$ implica la existencia de r ceros (no necesariamente en A) de $D_A(x)-P_A(x)$.

En todo este trabajo haremos las siguientes suposiciones:

a) $\quad r = sq + r'$ donde $0 \leqslant r' < s$ y $0 \leqslant q < m_i$ para todo i.

b_1) para $\gamma_A \to 0 \quad D_A^{(\ell)}(u_i) \to b_{\ell,i} \quad 1 \leqslant i \leqslant s \quad , \quad 0 \leqslant \ell \leqslant q-1$.

b_2) para $\gamma_A \to 0 \quad D_A^{(\ell)}(u_i)$ está acotado, $1 \leqslant i \leqslant s \quad , \quad \ell \geqslant 0$.

b_1) y b_2) equivalen a

c) $\quad$ si $D_A(x) = \prod_{i=1}^{s} (x-u_i)^q Q_A(x) + R_A(x) = G_A(x) + R_A(x)$,

grado $(R_A(x)) < qs$, entonces cuando $\gamma_A \to 0 \quad R_A(x) \to R_0(x)$ y $Q_A(x)$ está uniformemente acotado sobre compactos, donde $R_0(x)$ está determinado por las qs condiciones

$$R_0^{(\ell)}(u_i) = b_{\ell,i} \qquad 1 \leqslant i \leqslant s \qquad 0 \leqslant \ell \leqslant q-1.$$

NOTA. Si q=0, en todos aquellos casos en que el rango de los índices sea vacío, debe cancelarse la correspondiente expresión o condición. Asimismo, los polinomios que resulten de grado menor que cero deben considerarse polinomios nulos.

Conviene observar en este momento que en virtud de la invariancia por traslaciones de la métrica d_p, es

$$P_A(f,p,x) = R_A(x) + P_A(G_A,p,x) \tag{1}$$

2. CASO s = 1.

TEOREMA 1. *Para* $0 < p \leqslant \infty$, *es* $\lim P_A(f,p,x) = R_0(x)$ *cuando* $\gamma_A \to 0$.

Dem. $\quad$ Sea $P_A(x) = P_A([x-u_1]^r Q_A,p,x)$. Por (1) basta probar que $\lim P_A(x) = 0$ cuando $\gamma_A \to 0$. $P_A(x)$ es un polinomio interpolante de $G_A(x)$ en r puntos del intervalo $[u_1-\gamma_A, u_1+\gamma_A]$. Llamemos $I_A(G_A)$ a este polinomio interpolante. Luego

$$I_A(G_A) = \sum_{j=0}^{k-r-1} (Q_A^{(j)}(u_1)/ji) I_A((x-u_1)^{j+r}).$$

Un resultado clásico afirma que $I_A((x-u_1)^{j+r}) \to 0$ cuando $\gamma_A \to 0$ para $0 \leqslant j \leqslant k-r-1$. De aquí y de la hipótesis sobre $Q_A(x)$ queda demostrado el teorema.

3. CASO $s > 1$.

Sean y_{ij} $1 \leqslant i \leqslant s$, $1 \leqslant j \leqslant m_i$ puntos fijos de $\mathbf{R}$, tales que $y_{ij} \neq y_{ij'}$ si $j \neq j'$. Agregaremos en este caso las siguientes suposiciones:

d) $x_{ij} = u_i + \eta_A y_{ij}$ $1 \leqslant i \leqslant s$, $1 \leqslant j \leqslant m_i$, donde
$\eta_A = \gamma_A/(\underset{i,j}{\text{Máx}}|y_{ij}|)$.

e) w_{ij} está acotado inferiormente cuando $\gamma_A \to 0$ para $1 \leqslant i \leqslant s$, $1 \leqslant j \leqslant m_i$,

Ahora $P_A(x) = P_A(G_A,p,x)$ es un polinomio interpolante de $G_A(x)$ en r puntos de un compacto fijo de la recta. Nuevamente como consecuencia de resultados clásicos sobre polinomios de interpolación y la hipótesis c) referente a $Q_A(x)$ sigue que $P_A(x)$ está uniformemente acotado sobre compactos cuando $\gamma_A \to 0$.

Tenemos que

$$d_p(P_A,0) \leqslant d_p(P_A,G_A) + d_p(G_A,0) \leqslant 2d_p(G_A,0).$$

Como $d_p(G_A,0)$ para $0 < p < 1$, o bien $d_p^p(G_A,0)$ para $1 \leqslant p \leqslant \infty$ son ambos $O(\gamma_A^{pq})$ sigue por suposición e) que para todo $1 \leqslant i \leqslant s$ es

$$P_A(x_{ij}) = O(\gamma_A^q) \text{ en q puntos arbitrarios } x_{ij}.$$

Desarrollando $P_A(x)$ en u_i por la fórmula de Taylor se deduce que

$$\sum_{\ell=0}^{q-1} a_{\ell i}\eta_A^{\ell} y_{ij}^{\ell} = O(\gamma_A^q).$$

Resolviendo este sistema lineal no singular en las q incógnitas $a_{\ell i}\eta_A^{\ell}$ sigue que

$$a_{\ell i} = O(\gamma_A^{q-\ell}) \qquad 0 \leqslant \ell \leqslant q-1 , \quad 1 \leqslant i \leqslant s. \tag{2}$$

3a. CASO $r' = 0$.

TEOREMA 2. *Para* $0 < p \leqslant \infty$, $\lim P_A(f,p,x) = R_0(x)$ *cuando* $\gamma_A \to 0$.

Dem. Si $P_A(x) = P_A(G_A,p,x)$, otra vez por (1) es suficiente probar que $\lim P_A(x) = 0$ cuando $\gamma_A \to 0$. Esto último es así porque $P_A(x)$ tiene grado a lo sumo $qs-1$; luego está determinado por las qs condiciones (2), por lo cual queda demostrado el teorema.

3b. CASO $r' > 0$.

Agregaremos en este caso, de solución más difícil, las siguientes suposiciones:

f) $\lim Q_A(x) = Q_0(x)$ cuando $\gamma_A \to 0$.

g) $\lim w_{ij}(A) = w^0_{ij} \neq 0$ cuando $\gamma_A \to 0$ para todo i,j.

Escribamos

$$P_A(x) = P_A(G_A,p,x) = \prod_{i=1}^{s} (x-u_i)^q Q^*_A(x) + R^*_A(x) ,$$

donde $\text{grado}(R^*_A(x)) < qs$ y $Q^*_A(x) = \sum_{h=0}^{r'-1} \lambda_h(A)x^h$.

Por (2) $R^*_A(x) \to 0$ cuando $\gamma_A \to 0$.

Es $G_A(x_{ij}) = \alpha_i(\eta_A y_{ij})^q + o(\gamma_A^q)$ y

$$P_A(x_{ij}) = \sum_{\ell=0}^{q-1} a_{\ell i}(\eta_A y_{ij})^{\ell} + b_i(\eta_A y_{ij})^q + o(\gamma_A^q)$$

donde para $1 \leqslant i \leqslant s$, $0 \leqslant \ell \leqslant q-1$ es $a_{\ell i} = a_{\ell i}(A) =$
$= (R^*_A)^{(\ell)}(u_i)/\ell !$, $\alpha_i = (1/q!)(Q_0 \prod_{i=1}^{s}(x-u_i)^q)^{(q)}(u_i) =$
$= Q_0(u_i) \prod_{i'\neq i}(u_i-u_{i'})^q$ y $b_i = b_i(A) = (1/q!)(Q^*_A \prod_{i=1}^{s}(x-u_i)^q)^{(q)}(u_i) =$
$= Q^*_A(u_i) \prod_{i'\neq i}(u_i-u_{i'})^q$.

TEOREMA 3. *Para* $1 < p \leqslant \infty$, $\lim P_A(f,p,x) = R_0(x) + Q^*_0(x) \prod_{i=1}^{s} (x-u_i)^q$ *cuando* $\gamma_A \to 0$, *donde* $Q^*_0(x)$ *es el polinomio determinado por la condición de hacer mínima la expresión*

$$\sum_i B_i \prod_{i'\neq i} |u_i-u_{i'}|^{pq}|Q_0(u_i) - L(u_i)|^p \qquad 1 < p < \infty$$

o

$$\max_i \{B_i \prod_{i'\neq i} |u_i-u_{i'}|^q|Q_0(u_i) - L(u_i)|\} \qquad p = \infty$$

entre todos los polinomios L(x) *de grado a lo sumo* r'-1, *y donde para todo* $1 \leq i \leq s$ B_i *es el valor mínimo de la expresión*

$$\sum_{j=1}^{m_i} w_{ij}^0 |y_{ij}^q - T(y_{ij})|^p \qquad 1 < p < \infty$$

o

$$\underset{j}{\text{Máx}} \{w_{ij}^0 |y_{ij}^q - T(y_{ij})|\} \qquad p = \infty$$

alcanzado entre los polinomios T(x) *de grado a lo sumo* q-1.

Demostración. Supongamos $1 < p < \infty$. Si $p=\infty$ todos los siguientes resultados valen igualmente mutatis mutandis.

Tenemos que

$$d_p(G_A,P_A)/\eta_A^q = (\sum_{i=1}^{s} A_i)^{1/p} + o(1) \text{ , donde}$$

$$A_i = A_i(\lambda_h,\alpha_{\ell i}) = \sum_{j=1}^{m_i} w_{ij}^0 |\alpha_i y_{ij}^q - b_i y_{ij}^q - \sum_{\ell=0}^{q-1} \alpha_{\ell i} y_{ij}^{\ell}|^p \quad \text{y}$$

$\alpha_{\ell i} = a_{\ell i}\eta_A^{\ell-q}$.

Obviamente, los r parámetros $\{\lambda_h,\alpha_{\ell i}\}$ están determinados por $P_A(x)$. No obstante, supongamos ahora que ellos varían libremente. Sea A_0 el valor mínimo de $\sum_i A_i$ alcanzado en, digamos, $\{\lambda_h^0,\alpha_{\ell i}^0\}$. Está claro que podemos construir un polinomio $P_A^*(x)$ de grado r-1 tal que $d_p(G_A,P_A^*)/\eta_A^q = A_0^{1/p} + o(1)$.

Luego tenemos que

$$d_p(G_A,P_A)/\eta_A^q \leq d_p(G_A,P_A^*)/\eta_A^q = A_0^{1/p} + o(1) \leq d_p(G_A,P_A)/\eta_A^q + o(1).$$

Por lo tanto $d_p(G_A,P_A)/\eta_A^q \to A_0^{1/p}$ cuando $\gamma_A \to 0$.

Daremos ahora una estimación más precisa de A_0. Fijados valores arbitrarios $\overline{\lambda}_h$, $0 \leq h \leq r'-1$, el valor mínimo de $\sum_i A_i(\overline{\lambda}_h,\alpha_{\ell i})$ en los parámetros $\alpha_{\ell i}$ es la suma de los valores mínimos de $A_i(\overline{\lambda}_h,\alpha_{\ell i})$ para cada i, alcanzado en, digamos, $\overline{\alpha}_{\ell i}$.

Tenemos que para cada i

$$A_i(\overline{\lambda}_h,\overline{\alpha}_{\ell i}) = |\alpha_i - b_i(\overline{\lambda}_h,\ldots,\overline{\lambda}_{r'-1})^p B_i.$$

(Observar que la dependencia de $\overline{\alpha}_{\ell i}$ es a través de B_i).

Ahora bien, si tomamos $\overline{\lambda}_h = \lambda_h^0$, $0 \leq h \leq r'-1$, sigue como consecuencia de que B_i no depende de λ_h que A_0 debe ser el valor mínimo sobre los parámetros λ_h de la expresión

$$(3) \qquad \sum_i B_i|\alpha_i - b_i(\lambda_0,\ldots,\lambda_{r'-1})|^p =$$

$$= \sum_i B_i \prod_{i'\neq i} |u_i - u_{i'}|^{pq} |Q_0(u_i) - L(u_i)|^p$$

alcanzado entre todos los polinomios $L(x)$ de grado a lo sumo $r'-1$. Luego $\{\lambda_0^0,\ldots,\lambda_{r'-1}^0\}$ debe ser un mínimo de (3). Si $1 < p < \infty$ este mínimo es único (también si $p=\infty$). Por consiguiente $\{\lambda_h^0,\alpha_{\ell i}^0\}$ es también mínimo único de $\sum_i A_i(\lambda_h,\alpha_{\ell i})$. En este caso afirmamos que $Q_A^*(x)$ converge a $Q_0^*(x) = \sum_h \lambda_h^0 x^h$ cuando $\gamma_A \to 0$.

En efecto, si así no fuera, como los coeficientes $\lambda_h(A)$, $\alpha_{\ell i}(A)$ están acotados, existiría una sucesión $\gamma_{A_n} \to 0$ con $n \to \infty$ tal que $\lambda_h(A_n) \to \lambda_h^1$ y $\alpha_{\ell i}(A_n) \to \alpha_{\ell i}^1$ con $n \to \infty$, donde para algún h es $\lambda_h^1 \neq \lambda_h^0$. Luego, por la continuidad de $d_p(G_A,P_A)/\eta_A^q$ en los parámetros $\lambda_h,\alpha_{\ell i}$, resultaría $A_0 = \sum_i A_i(\lambda_h^1,\alpha_{\ell i}^1)$, imposible.

El teorema queda así demostrado.

REFERENCIAS

[1] Motzkin T.S. and Walsh J.L., *Polynomials of best approximation on a real finite point set.* Trans.Amer.Math.Soc.,91: 231-245. (1959).

[2] Rice J.R., *Best approximations and interpolating functions.* Trans.Amer.Math.Soc., 101: 444-466 (1963).

[3] Isaacson E., Keller H., *Analysis of Numerical Methods*, John Wiley, 1966.

[4] Conte S.D., de Boor C., *Análisis Numérico*, Mc Graw-Hill, 2a edición, 1974.

Departamento de Matemáticas
Universidad Nacional de Río Cuarto
5.800 Río Cuarto.

Recibido en noviembre de 1985.