

CONTRACCIONES EN ESPACIOS DE ORLICZ

E. LAMI DOZO

Conferencia en honor del Dr. Mischa Cotlar

1. CASO DE BANACH.

Una aplicación $T: X \rightarrow X$ de un espacio métrico (X, d) en sí mismo, es llamada una *contracción* de X si $d(Tx, Ty) \leq d(x, y)$ para cada x e y en X .

El principio de Banach-Picard afirma: "Una contracción estricta de un espacio métrico completo deja un único punto fijo", o sea si para un $k \in [0, 1[$, $d(Tx, Ty) \leq kd(x, y) \quad \forall x, y$ en (X, d) completo, entonces existe un único $x_0 \in X$ tal que $Tx_0 = x_0$.

Las contracciones pueden verse como un caso límite de contracciones estrictas. Contraejemplos simples muestran que hipótesis restrictivas sobre (X, d) deben hacerse para asegurar puntos fijos, aproximarlos, etc.

Dentro del cuadro de los espacios normados, una teoría sobre este tema se desarrolló en las décadas del 60 y 70. Un resultado clásico es el teorema de Browder-Göhde-Kirk.

(B-G-K) Una contracción de un convexo, cerrado y acotado de un espacio de Banach uniformemente convexo deja un punto fijo.

Si observamos que todo espacio de Banach uniformemente convexo, tal $L^p(0, 1)$ ó ℓ^p para $1 < p < +\infty$, es reflexivo, el problema de extender (B-G-K) al caso de un Banach reflexivo está siempre abierto.

Por otro lado una contracción de un convexo débilmente compacto

de un espacio de Banach no siempre deja un punto fijo. Esto ocurre en $L^1(0,1)$, donde Alspach ([A]) construye un ejemplo.

El teorema (B-G-K) es un caso particular del teorema de Kirk ([K]):

(K) Una contracción de un convexo débilmente compacto con estructura normal de un espacio de Banach deja un punto fijo.

porque

- (i) cuando un convexo acotado y cerrado $\tilde{C} \subset X$ con $(X, \|\cdot\|)$ de Banach tiene la propiedad que cada subconvexo cerrado C de $\tilde{C}$ admite un $x \in C$ tal que $\sup_{y \in C} \|x-y\| < \text{diámetro de } C$, se dice que $\tilde{C}$ tiene estructura normal.
- (ii) si $(X, \|\cdot\|)$ es uniformemente convexo y $C \subset X$ es convexo cerrado y acotado, la funcional $H(x) = \sup_{y \in C} \|x-y\|$ admite un único mínimo c en C , llamado *centro* de C .

Sin embargo ni la estructura normal, ni la débil compacidad del dominio son necesarias como lo muestra el siguiente corolario de un teorema de Karlovitz.

(Ka) Una contracción de la bola unidad cerrada de ℓ^1 deja un punto fijo.

Estos resultados muestran que la propiedad de dejar puntos fijos para las contracciones está ligada a la topología del dominio y a la métrica del mismo. Además, en los espacios clásicos $L^p(0,1)$ ó ℓ^p $1 \leq p < \infty$ se dan respuestas positivas y negativas al problema de tener esta propiedad.

2. CASO DE ORLICZ.

En un trabajo reciente, obtuvimos resultados similares al caso de los espacios clásicos de Lebesgue en el cuadro más general de los espacios de Orlicz ([L-T]).

Una *función de Orlicz* es una función $\varphi: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ creciente, continua, estrictamente positiva en $(0, \infty)$, nula y continua

en 0.

En un espacio Ω con una tribu A y una medida $\mu: A \rightarrow R_+$, el *modular* asociado a φ es la funcional

$$\rho_{\varphi}(x) = \int_{\Omega} \varphi(|x(\omega)|) d\mu(\omega)$$

definida para x A -medible a valores complejos.

El "*gran*" espacio de Orlicz

$$L^{\varphi} \equiv L^{\varphi}(\Omega, A, \mu) = \{x; \rho_{\varphi}(tx) < +\infty \text{ para un } t > 0\}$$

es un espacio vectorial. La topología definida tomando $\{x + rB^{\varphi}(r); r > 0\}$ como base de entornos de la función x , donde $B^{\varphi}(r) = \{\tilde{x}; \rho_{\varphi}(\tilde{x}) \leq r\}$, hace de L^{φ} un espacio vectorial topológico.

El "*pequeño*" espacio de Orlicz

$$L_0^{\varphi} = \{x; \rho_{\varphi}(tx) < +\infty, \text{ para todo } t > 0\}$$

es un subespacio vectorial cerrado de L^{φ} .

La *funcional de Minkowski* $v_{\varphi}(x) = \inf\{\lambda > 0; \rho_{\varphi}(x/\lambda) \leq 1\}$ define una norma en L^{φ} cuando φ es convexa. En particular, para $\Omega = (0,1)$ con la medida de Lebesgue (ó $\Omega = N$ con la medida que cuenta los puntos) y si $\varphi_p(t) = t^p$, $1 \leq p < +\infty$, el espacio de Orlicz $L^{\varphi_p}(0,1)$ (ó $\ell^p(N)$) es el clásico $L^p(0,1)$ (ó ℓ^p).

Supondremos siempre $\Omega = (0,1)$ ó $\Omega = N$ ó $\Omega = R$.

Trabajamos con dos nociones de contracción: $T: B \subset L^{\varphi} \rightarrow B$ es una ρ_{φ} -contracción si para x, y en B , $\rho_{\varphi}(Tx - Ty) \leq \rho_{\varphi}(x - y)$, T es v_{φ} -contracción si $v_{\varphi}(Tx - Ty) \leq v_{\varphi}(x - y)$.

El dominio B será *estrellado* con respecto a un centro u en B , o sea $(1-\lambda)u + \lambda x \in B$ si $x \in B$ y $0 \leq \lambda \leq 1$. Además B será τ -compacto para la topología τ de la convergencia en medida. Una bola $B^{\varphi}(r)$ en ℓ^{φ} es τ -compacta, así extendemos (Ka). Un subconjunto τ -compacto de $L^p(0,1)$, $1 < p < \infty$ es débilmente compacto pero no la inversa, lo que hace esta hipótesis topológica

más restrictiva que en (B-G-K) pero el dominio B es sólo estrellado, no necesariamente convexo. Finalmente un τ -compacto, débilmente compacto de $L^1(0,1)$ es compacto para la norma, así evitamos el ejemplo de Alspach.

El resultado más simple es el

TEOREMA 1. Sea B un subconjunto τ -compacto y estrellado de L^φ que verifica $\sup\{\rho_\varphi(x); x \in B\} < +\infty$. Supongamos φ subaditiva y estrictamente creciente en $\mathbb{R}_+$. Entonces una ρ_φ -contracción de B deja un punto fijo.

Para el resultado siguiente introducimos modos de crecimiento de φ , diciendo que φ tiene exponentes de crecimiento no nulos si φ es estrictamente creciente, no acotada en $\mathbb{R}_+$ y verifica para cada $\lambda \in (0,1)$

$$\lim_t \sup \frac{\varphi(\lambda t)}{\varphi(t)} < 1 \quad (1)$$

donde $t \rightarrow +\infty$ si $\Omega = (0,1)$, $t \rightarrow 0$ si $\Omega = \mathbb{N}$ y $t \rightarrow 0$ y $+\infty$ si $\Omega = \mathbb{R}$.

Además, es clásica la noción φ verifica la condición Δ_2 si en (1) el límite superior es finito para $\lambda = 2$.

TEOREMA 2. Sea B un subconjunto τ -compacto y estrellado de L_0^φ que verifica $\sup\{\rho_\varphi(x-y) < +\infty, x, y \in B\} < +\infty$. Supongamos que φ tiene exponentes de crecimiento no nulos y que verifica la condición Δ_2 . Entonces una ρ_φ -contracción de B deja un punto fijo.

Introducimos ahora una condición sobre φ inspirada de [B-L], φ verifica BL_k si

$$\lim_{\lambda \uparrow 1} \lim_t \sup (\varphi(t) - \varphi(\lambda t)) / \varphi(kt) = 0$$

donde t converge como en (1).

TEOREMA 3. Sea B un subconjunto τ -compacto y estrellado de L_0^φ . Supongamos que φ tiene exponentes de crecimiento no nulos, que verifica la condición BL_k y para el mismo k, $\sup\{\rho_\varphi(k(x-y)); x, y \in B\} < +\infty$. Entonces una ρ_φ -contracción de B deja un punto fijo.

Para v_φ -contracciones tenemos el

TEOREMA 4. Sea B como en el teorema 2 que además verifique para todo $K \in \mathbb{R}_+$

$$\begin{aligned} \sup\{\rho_\varphi(K(x-y)); x, y \text{ en } B\} &< +\infty \\ \text{y} \quad \sup\{v_\varphi(x-y); x, y \text{ en } B\} &< +\infty \end{aligned}$$

Supongamos que φ verifica BL_k para un $k \geq 1$. Entonces una v_φ -contracción de B deja un punto fijo.

Ejemplos típicos de funciones φ para estos resultados son $\varphi_p(t) = t^p$, $0 < p \leq 1$, $\psi(t) = \psi(t^p)$ con ψ convexa y $0 < p < 1$.

Contrariamente al caso de Banach, no es obvio de ver una contracción como límite de contracciones estrictas en estos espacios de Orlicz. Por ejemplo si ℓ^φ es localmente no acotado, ($\varphi(t) = -1/\log t$, $0 < t \leq 1/e$, $\varphi(t) = te$, $t > 1/e$ como un caso), entonces toda ρ_φ -contracción estricta de una "bola" $B^\varphi(r)$ es constante.

Finalmente otro problema abierto es encontrar un convexo cerrado y acotado C de ℓ^2 tal que para cada renormamiento equivalente de ℓ^2 , cada contracción de C para el renormamiento deje un punto fijo.

REFERENCIAS

- [A] ALSPACH, D., Proc. AMS 82(1981), 423-424.
- [BL] BREZIS, H., LIEB, E., Proc. AMS 88(1983), 486-490.
- [LT] LAMI DOZO, E., TURPIN, P., Studia Math. LXXXVI (1987), 155-188.

Departamento de Matemática, Universidad de Buenos Aires
e, Instituto Argentino de Matemática, CONICET.

Recibido en mayo de 1989.