Revista de la
Unión Matemática Argentina
Volumen 34, 1988.

PROPIEDADES HIPERBOLICAS DE SOLUCIONES DE CIERTAS ECUACIONES PARABOLICAS

JULIO E. BOUILLET

Conferencia pronunciada durante las Jornadas Matemáticas en honor del Prof. Mischa Cotlar, 18-19 de abril de 1988. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires.

Las ecuaciones a las que se refiere el título tienen la forma $u_t = \alpha(u)_{xx}$, x y t son variables reales, $t > 0$, y α es una función monótona creciente; supondremos una condición inicial $u(x,0) = u_I(x)$, que será una función tan buena como sea necesario, dentro de límites razonables, para que la exposición resulte fluida. A este tipo de ecuaciones pertenece la ecuación del calor, $u_t = u_{xx}$, y la de la difusión no lineal, escrita por lo general así: $u_t = (\alpha'(u).u_x)_x$, con $\alpha'(u) > 0$.

Quizás el caso más estudiado sea el de la ecuación de los medios porosos, cuando $\alpha(u) = |u|^{m-1}u = u^m$ con $u \geqslant 0$ y $m > 1$. Es en este caso que hallamos los primeros ejemplos de comportamientos "hiperbólicos", debido a que la ecuación, que formalmente es parabólica, pierde su tipo donde $u(x,t) = 0$: como $\alpha'(0) = mu^{m-1}|_{u=0} = 0$, resulta que el operador $u_t - \alpha'(u)u_{xx} - \alpha''(u)(u_x)^2$ "pierde" la segunda derivada u_{xx}. El comportamiento antes citado consiste en que un dato inicial $u_I \geqslant 0$ con soporte compacto en la recta evoluciona como solución de la ecuación $u_t = (u^m)_{xx}$ conservando el soporte acotado en x para $t > 0$. Esta propiedad contrasta con las soluciones de la ecuación clásica $u_t = u_{xx}$, para las cuales, si $u_I \geqslant 0$ y no nulo, resulta $u(x,t) > 0$ para todo x y $t > 0$; recuerda además la velocidad finita de propagación de perturbaciones, típica de la ecuación de las ondas $u_{tt} = u_{xx}$ y de las leyes de conservación de primer orden, $u_t + u_x = 0$, por ejemplo.

Una importante herramienta técnica y fuente de ejemplos y propiedades para el caso $\alpha(u) = u^m$, $u \geqslant 0$, es la solución explícita de Barenblatt (1952):

$$u_B(x,t) = t^{-1/(m+1)} \left\{ \left[\xi_0^2 - \frac{m-1}{2m(m+1)} \left(\frac{|x|}{t^{1/(m+1)}} \right)^2 \right]^+ \right\}^{1/(m+1)},$$

donde $(.)^+ = \max\{(.),0\}$, ξ_0 es una constante relacionada con $\int u(x,t)dx = M$, independiente de t, y $u_B(x,t)$ tiende en D' a la masa M concentrada en x=0. Es fácil ver aquí la propiedad de compacidad del soporte de u_B.

El comportamiento de las interfaces de soluciones $u(x,t) \geqslant 0$ de la ecuación $u_t = (u^m)_{xx}$, $m > 1$ está muy bien estudiado. Supongamos que $\{x: u(x,t) > 0\} = \{x: x < s(t)\}$, con $s(0) = 0$. Se sabe que

$$D^+s(t) = \lim_{x \to s(t)^-} - \frac{(u^m)_x(x,t)}{u(x,t)},$$

que recuerda la condición de Rankine-Hugoniot para discontinuidades (choques) de leyes de conservación.

La aparición de una derivada lateral en la fórmula anterior se debe a la posible existencia de un *tiempo de espera* no nulo, eso es, un intervalo $[0,t^*]$ con $s(t) \equiv s(0)$ constante para $t \in [0,t^*]$, y $s(t)$ estrictamente monótono (creciente, en nuestro caso) si $t \in (t^*,+\infty)$. Entonces se sabe que

$$D^+s(t^*) = 0 \quad \text{si} \quad p_I(x) \equiv \frac{m}{m-1} u_I^{m-1}(x) = o(x^2),\ x \nearrow 0,$$

$$D^+s(t^*) > 0 \quad \text{si} \quad p_I(x) = 0(x^2)\ ,\ x \nearrow 0.$$

Que la concentración $u > 0$ a la izquierda de $s(t) = 0$ no invada la zona vacía $x > 0$ en el lapso $[0,t^*]$ es otro fenómeno que recuerda la propagación por características en una ley de conservación de primer orden.

Veamos unos resultados más recientes: si escribimos

$$u_t + (-u^m)_{xx} = u_t + \left(-\frac{mu^{m-1}u_x}{u}\, u\right)_x = 0$$

como ley de conservación para u, la *velocidad local* es

$$v \equiv -\frac{m\,u^{m-1}}{u}\, u_x = -\left(\frac{m}{m-1}\, u^{m-1}\right)_x = -p_x\ ,$$

$$\text{con} \quad p \equiv \frac{m}{m-1}\, u^{m-1} \quad \text{(p es la presión).}$$

La velocidad satisface

$$v_t + (v^2)_x = (m-1)(p\ v_x)_x\ .$$

La presión satisface

$$p_t - (p_x)^2 = (m-1)p.p_{xx}\ ,$$

que pueden considerarse como perturbaciones (para $m-1 \to 0$) de

$$v_t + (v^2)_x = 0 \ :\ \text{Ley de conservación (ec.de Burgers)}$$
$$p_t - (p_x)^2 = 0 \ :\ \text{ec. de tipo Hamilton-Jacobi}$$

que son ecuaciones (hiperbólicas) de primer orden.

La desigualdad *a priori*

$$p_{xx} \geqslant -\frac{1}{(m+1)t} \quad \text{(Aronson-Bénilan)},$$

válida para soluciones de la ecuación de los medios porosos, se puede escribir, en función de la velocidad v,

$$v_x \leqslant \frac{1}{(m+1)t}$$

esto es una condición de entropía para soluciones v de una ley de conservación tipo Burgers.

Es de observar que la velocidad de las soluciones de Barenblatt es

$$v_B(x,t) = \frac{x}{(m+1)t} \qquad \text{donde} \quad u_B > 0.$$

Este perfil, llamado "onda N" por su forma, es un típico perfil asintótico, para $t \to \infty$, de las soluciones de leyes de conservación de la forma $u_t + (|u|^{m+1})_x = 0$.

Si $m \to 1$ en el problema $u_m = u$, $u_t = (u^m)_{xx}$, $u(x,0) = u_I(x) \geqslant$ $\geqslant 0$, con u_I *fijo* , entonces se puede probar que $u_m \to u_1$, solución de $u_t = u_{xx}$ con dato inicial u_I. Pero si $u_I = u_{Im}$ es tal que

$$p_m(x,0) = p_I(x) = \frac{m}{m-1} (u_{Im}(x))^{m-1}$$

permanece *fijo*, entonces la sucesión $p = p_m(x,t)$ de soluciones de

$$p_t = (m-1)p\, p_{xx} + p_x^2 \quad ; \quad p(x,0) = p_I(x)$$

converge cuando $m \to 1$ a una solución del problema

$$p_t = p_x^2 \quad , \quad p(x,0) = p_I(x)$$

mientras que las respectivas velocidades $v_m = -p_{mx}$ convergen a una solución de la ley de conservación, en un espacio adecuado.

Una versión detallada de estos y otros resultados, con abundante bibliografía, puede hallarse en [1] y [6]. Las propiedades citadas de las leyes de conservación pueden verse en [4].

Aún más reciente es el estudio de otro límite para $u_t = (u^m)_{xx}$: cuando $m \to \infty$, $u_m(x,t)$, solución de

$$u_t = (u^m)_{xx},\ t > 0,\ x \in R \ ; \quad u(x,0) = u_I(x)$$

tiende - en adecuado sentido débil - a un límite $u_\infty(x)$; este límite es de la forma

$$u_\infty(x) = \chi_\Omega(x) + u_I(x).\chi_{R\setminus\Omega}(x) \ ,$$

donde χ indica función característica y Ω es el conjunto de no-coincidencia de la inecuación variacional

$$-w_{xx} \geqslant u_I - 1 \quad , \quad w \geqslant 0 \quad , \quad (-w_{xx} - u_I + 1)w = 0.$$

Si w es solución de la misma se tiene $u_\infty = u_I + w_{xx}$, y $u_\infty = u_I$ si $u_\infty < 1$, siendo $u_\infty \equiv 1$ donde $-w_{xx} = u_I - 1$ (cf. [2], [3]).

Es instructivo ilustrar esta solución $u_\infty(x)$ en el caso en que $u_I(x) > 1$ en un intervalo acotado (a,b), y $u_I < 1$ fuera del mismo. Entonces $u_\infty \equiv 1$ en un intervalo que contiene a (a,b), y fuera del cual es $u_\infty \equiv u_I < 1$. El efecto del límite $m \to \infty$ es achatar el gráfico $\alpha(u) = u^m$ para $0 \leqslant u < 1$ y, por lo tanto, en ese rango la difusión se frena. La difusión es en cambio rapidísima para $u > 1$, causando entonces el aplastamiento de la cresta de u_I en (a,b): el compromiso entre los valores $u > 1$ y $u \leqslant 1$ conduce a la forma de u_∞, que recuerda la estructura geográfica de una *mesa*.

Una situación parecida surge si estudiamos el problema de valores iniciales

$$u_t = \{m(u-1)^+\}_{xx} \quad , \quad u(x,0) = u_I(x) \ :$$

Aquí $\alpha(u) = m(u-1)^+$ es $m(u-1)$ si $u > 1$, y cero si $u \leqslant 1$. En este caso, hacer $m \to \infty$ es equivalente a tomar el límite de $u(x,t)$ cuando $t \to \infty$ para la solución de

$$u_t = \{(u-1)^+\}_{xx} \quad , \quad u(x,0) = u_I \ ,$$

como puede verse por un cambio de escala en t.

Esta ecuación es parabólica (y es esencialmente la ecuación del calor) donde $u(x,t) > 1$ y degenera a hiperbólica de primer orden, $u_t = 0$, donde $u < 1$. Es decir que para todo $t > 0$ pequeño los datos $u_I(x) < 1$ se extenderían en forma constante en t, pues, siendo límites de $u(x,t)$ en algún sentido, debería tenerse $u(x,t) < 1$ y $u_t = 0$. Si $u_I(x) > 1$ en (a,b), para $x \in (a,b)$ y $t > 0$ pequeño u será solución de $u_t = u_{xx}$.

Veamos entonces el interés en considerar soluciones generalizadas de nuestra ecuación $u_t = \{(u-1)^+\}_{xx}$, posiblemente discontinuas, obtenidas por yuxtaposición de soluciones clásicas a lo largo de curvas suaves. A partir de la definición habitual de solución generalizada,

$$u,\ \alpha(u) \in L^1_{loc} \text{ tal que}$$

$$\forall\ \varphi \in C_0^\infty(R \times (0,\infty)) \ ,\ \iint(\varphi_t u + \varphi_{xx}\alpha(u)) = 0,$$

se puede razonar así: localmente en $t > 0$ sea $\gamma \in C^1$ un arco que separa dos dominios G_s y G_d, con $B = G_s \cup \gamma \cup G_d$ dominio contenido en $t > 0$. Sean $u_s(x,t)$ y $u_d(x,t)$ soluciones clásicas respectivamente en G_s y G_d, de la ecuación $u_t = \alpha(u)_{xx}$, que poseen límites - al igual que $\alpha(u_s)_x$, $\alpha(u_d)_x$ - sobre γ.

Se trata de ver si la función $u(x,t)$, definida p.p. en B como $u = u_s$ en G_s y $u = u_d$ en G_d, constituye una solución generalizada de la ecuación. Se elige una función de prueba $\varphi(x,t)$ con soporte contenido en B que interseque a γ, se divide la región de integración de la definición de solución generalizada y se integra por partes en G_s y G_d, y se llega a que $u(x,t)$ es solución generalizada de $u_t = \alpha(u)_{xx}$ si

(a) En caso que $\gamma = \{t=\text{constante}\} \cap B$, $u_s = u_d$ sobre γ ;

(b) En caso que $\gamma = \{(x,t): x = \gamma(t)\} \cap B$,

$\alpha(u_s) = \alpha(u_d)$ sobre γ, y $(u_d-u_s)\gamma'(t) = -\alpha(u_d)_x-(-\alpha(u_s)_x)$ sobre γ.

Esta última condición (que recuerda la condición de choque de Rankine-Hugoniot), cuando se la aplica al problema

$$u_t = \{(u-1)^+\}_{xx} \ , \ u(x,0) = u_I(x) \ , \ u_I > 1 \text{ en } (a,b)$$

permite enfocarlo como un clásico problema de tipo Stefan, con una sola fase, escrito en formulación entálpica (cf. [5]), con interfaces $\gamma_a(t) < \gamma_b(t)$, con $\gamma_a(0) = a$, $\gamma_b(0) = b$: en $\{(x,t): \gamma_a(t) < x < \gamma_b(t), \ t > 0\}$ la ecuación es $u_t = u_{xx}$; para $x < \gamma_a(t)$ ó $x > \gamma_b(t)$ resulta $u_t = 0$ y $u(x,t) = u_I(x)$ (< 1), y las condiciones de interfase, por ejemplo

$$\gamma_b'(t) = \frac{-\alpha(u_d)_x + \alpha(u_s)_x}{u_d - u_s} = \frac{u_{sx}(\gamma_b(t),t)}{u_I(\gamma_b(t)) - 1} \geqslant 0$$

poseen "calor latente variable" $1 - u_I(\gamma_b(t))$, que además puede tender a cero cuando $t \downarrow 0$.

Se puede probar que, cuando $t \to \infty$, $u(x,t)$ tiende a $u_\infty(x)$, la función ya encontrada al tratar la ecuación $u_t = (u^m)_{xx}$.

Dejemos este caso parabólico degenerado para considerar otro peor aún. Ya mencionamos el comportamiento de $\alpha(u) = \alpha_m(u) = |u|^{m-1}u$ cuando $m \to \infty$: se obtiene, formalmente, el gráfico $\alpha_\infty(u) = -\infty$ si $u < -1$, $\alpha_\infty(u) = 0$ si $-1 \leqslant u \leqslant 1$, $\alpha_\infty(u) = +\infty$ si $u > 1$. Pero hay otro comportamiento que nos interesa considerar: cuando $m \to 0^+$ se obtiene como límite el gráfico $\alpha_0(u) = \operatorname{sgn} u = -1$ si $u < 0$, $= 1$ si $u > 0$, y un dibujo nos sugeriría que $\alpha_0(0)$ es el segmento vertical $\{(0,y): -1 \leqslant y \leqslant 1\}$. Veremos enseguida la utilidad de disponer de este gráfico multivaluado.

En primer lugar vamos a cambiar las variables y considerar, en vez de sgn u, el gráfico de Heaviside desplazado a $u = 1$:

$$H(u-1) = 0 \text{ si } u < 1 \ , \ = [0,1] \text{ si } u = 1 \ , \ = 1 \text{ si } u > 1.$$

Encaremos el problema

$$u_t = \{H(u-1)\}_{xx}, \ u(x,0) = u_I(x) > 1 \text{ sólo en } (a,b).$$

Pensando en soluciones $u(x,t)$ clásicas por trozos, es claro que donde $u(x,t) > 1$ y donde $u(x,t) < 1$ resultará $u_t = 0$; pero no podemos yuxtaponer dos soluciones $u_s > 1$ y $u_d < 1$, por ejemplo, a uno y otro lado de un arco $\gamma = \{(x,t): x = \gamma(t), \gamma(0) = b\}$ dado que resultaría $H(u_s - 1) = 1 > H(u_d - 1) = 0$, contra las condiciones ya obtenidas para construir soluciones generalizadas.

La solución consiste en utilizar la parte multivaluada del gráfico $H(u - 1)$ y "ensanchar" el arco γ hasta obtener una región $\{(x,t): \gamma_1(t) < x < \gamma_0(t)\}$ donde pondremos $u(x,t) \equiv 1$ y *definiremos* una función $U(x,t) \in H(u(x,t)-1)$ que, por lo tanto, cumplirá $U(x,t) = 0$ si $u(x,t) < 1$, $U(x,t) = 1$ si $u(x,t) > 1$, y $0 \leqslant U(x,t) \leqslant 1$ para $\gamma_1(t) \leqslant x \leqslant \gamma_0(t)$, donde $u(x,t) \equiv 1$. Se tendrá además $U(\gamma_1(t),t) = 1 = H(u_s - 1)$, $U(\gamma_0(t),t) = 0 = H(u_d - 1)$ y, para satisfacer la definición de solución generalizada, deberá ser $U_{xx} = 0$ donde $u \equiv 1$, es decir, $U(x,t) = (x - \gamma_0(t))/(\gamma_1(t) - \gamma_0(t))$.

Con esta redefinición de $H(u - 1)$ para $u=1$ y empleando las condiciones para la yuxtaposición de soluciones suaves a lo largo de arcos suaves también, uno puede construir una solución del problema, localmente cerca de $(b,0)$, con sólo obtener $\gamma_0(t)$ y $\gamma_1(t)$, soluciones del sistema ordinario

$$\gamma_1'(t) = \frac{1}{1-u_I(\gamma_1(t))} \cdot \frac{1}{\gamma_0(t)-\gamma_1(t)} \quad (\leqslant 0) \;, \quad \gamma_1(0) = b$$

$$\gamma_0'(t) = \frac{1}{1-u_I(\gamma_0(t))} \cdot \frac{1}{\gamma_0(t)-\gamma_1(t)} \quad (\geqslant 0) \;, \quad \gamma_0(0) = b$$

(en forma análoga se obtienen arcos $\delta_0(t)$, $\delta_1(t)$, $\delta_0(a) = \delta_1(a) = a$ cerca de $(a,0)$). Es fácil imaginar la evolución del dato $u_I(x)$ regida por este operador $u_t - H(u-1)_{xx}$: el "cerro" formado por $\{x \in (a,b), u_I(x) > 1\}$ va siendo "excavado", cerca de $(a,0)$ y $(b,0)$ para todo $t > 0$, formándose la "planicie" $\{(x,t): \delta_0(t) < x < \delta_1(t)\}$ y $\{(x,t): \gamma_1(t) < x < \gamma_0(t)\}$, donde $u(x,t) \equiv 1$. Al mismo tiempo éstas avanzan sobre la zona $x < a$ y $b < x$, donde $u_I < 1$. La evolución termina cuando

$\delta_1(\bar{t}) = \gamma_1(\bar{t})$; a partir de $\bar{t}$, u no depende de t y $u \equiv 1$ en un cierto intervalo $(\delta_0(\bar{t}),\gamma_0(\bar{t}))$ que contiene a (a,b), siendo $u = u_I(x)$ fuera del mismo. Se puede probar que $u(x,\bar{t}) = u_\infty(x)$, la misma función (en forma de "mesa") obtenida anteriormente; la demostración puede basarse en otro hecho importante, a saber, la conservación, en ambos casos, de masa y primer momento.

Para concluir, digamos que hemos descripto propiedades de soluciones de ecuaciones de evolución que son, formalmente, de tipo parabólico, pero que degeneran fuertemente por anulación de derivadas en la variable espacial x. Esta anulación da lugar a la aparición de propiedades de las soluciones que son similares a las que exhiben las soluciones de ecuaciones de tipo hiperbólico. Cuando esta anulación tiene lugar en un rango de valores de la incógnita u se llega al extremo de poder fabricar soluciones discontinuas con una técnica totalmente análoga a la ya clásica para leyes de conservación de primer orden en dos variables independientes.

En esta conferencia hemos expuesto resultados obtenidos en colaboración con M.K.Korten y V.Márquez.

REFERENCIAS

[1] D.G.ARONSON, *The porous medium equation*, in "*Nonlinear Diffusion Problems*", (A.Fasano, M.Primicerio, eds.), Lecture Notes in Mathematics 1224, Springer-Verlag, 1986.

[2] L.A. CAFFARELLI , A.FRIEDMAN, *Asymptotic behaviour of solutions of* $u_t = \Delta u^m$ *as* $m \to \infty$, Tech.Rep.N°35, Purdue U., 1986, to appear in Indiana University Math.J.

[3] A.FRIEDMAN, K.HÖLLIG, *On the mesa problem*, J.Math.Analysis Appl.123(2), 1987,564-571.

[4] J.SMOLLER, *Shock waves and reaction-diffusion equations*, Springer-Verlag, N.York, 1983.

[5] A.FASANO, *Las zonas pastosas en el problema de Stefan*, en II Seminario sobre el problema de Stefan y sus aplicaciones (D.A.Tarzia,ed.), Cuadernos del Inst. de Matemática "Beppo Levi" N°13, Rosario, 1987.

[6] J.L.VAZQUEZ, *Hyperbolic aspects in the theory of the porous medium equation*, IMA vol. in Mathematics and its Applications, v.3: Metastability and Incompletely Posed Problems (S.Antman et al.,eds.), Springer-Verlag, 1987.

Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires.

Recibido en febrero de 1989.