

FORMULAS FUNDAMENTALES DE LA ESTEREOLOGIA USANDO SECCIONES POR VARIEDADES NO LINEALES

L. A. SANTALO

Dedicado al Profesor Mischa Cotlar, cordialmente.

SUMMARY. The classical fundamental mean-value formulae of Stereology ($V_V = A_A = L_L$, $S_V = (4/\pi)L_A = 2P_L$, $L_V = 2P_A$) as given for instance in UNDERWOOD [10] and STOYAN-KENDALL-MECKE [9], which refer to sections of a given convex body in E^3 by lines and planes, are generalized to the case of sectioning the body by curves or surfaces of arbitrary shape.

1. INTRODUCCION.

Sea X un cuerpo convexo del espacio euclidiano de tres dimensiones E^3 , que llamaremos una "muestra" y sea Y un conjunto contenido en X , llamado "fase", compuesto de curvas (dimensión $r=1$), superficies (dimensión $r=2$) o volúmenes (dimensión $r=3$), de forma arbitraria y dispuestos también de manera arbitraria dentro de X . Supongamos que todas las componentes de Y sean de la misma dimensión, es decir, Y puede ser un conjunto de hilos o filamentos ($r=1$), o un conjunto de superficies o láminas ($r=2$) o un conjunto de partículas o cuerpos ($r=3$). Para distinguir los tres casos, designaremos por Y_r a cada uno de ellos.

Supongamos primero el caso de hilos Y_1 . Si se corta X por un plano E dado al azar (según la ley de probabilidad usual en la teoría de Probabilidades Geométricas, ver [2] ó [6]), la sección $E \cap X$ será un dominio convexo plano cuya área representaremos por $A(E \cap X)$ y la intersección $E \cap Y_1$ será (salvo un conjunto de posiciones de E de medida nula) un conjunto discreto

de puntos, cuyo número representaremos por $P(E \cap Y_1)$. Sea $L(Y_1)$ la longitud total de Y_1 y L_V la longitud media de Y_1 por unidad de volumen de X . Sea P_A el número medio de puntos de $E \cap Y_1$ (convenientemente definido) por unidad de área de $E \cap X$. La primera fórmula clásica de la estereología dice que

$$(1.1) \quad L_V = 2 P_A.$$

Sea ahora el caso de superficies o láminas Y_2 contenidas en X , cuya área total representaremos por $A(Y_2)$ y por S_V representaremos el área media de Y_2 por unidad de volumen de X . Al cortar por un plano al azar E , la intersección $E \cap Y_2$ será un conjunto de curvas cuya longitud total representaremos por $L(E \cap Y_2)$ y la longitud por unidad de área de $E \cap X$ representaremos por L_A . La segunda fórmula estereológica fundamental es

$$(1.2) \quad S_V = (4/\pi) L_A.$$

Para el caso de partículas o cuerpos Y_3 de volumen total $V(Y_3)$ y cuyo volumen medio por unidad de volumen de X se representa por V_V , al cortar por un plano E , la intersección $E \cap Y_3$ es un conjunto de dominios planos cuya área total es $A(E \cap Y_3)$ y el área media por unidad de área de $E \cap X$ se representa por A_A . Vale entonces la tercera fórmula estereológica fundamental, a saber,

$$(1.3) \quad V_V = A_A.$$

Si en vez de cortar por un plano E , se corta por una recta al azar G (en el sentido de la teoría de Probabilidades Geométricas, ver [2] ó [6]), en el caso Y_2 resulta sobre el segmento $G \cap X$ un conjunto discreto de puntos $P(G \cap Y_2)$ cuyo número medio por unidad de longitud de $G \cap X$ representaremos por P_L , valiendo entonces la fórmula

$$(1.4) \quad S_V = 2 P_L.$$

Para el caso Y_3 , la intersección $G \cap Y_3$ es un conjunto de segmentos de longitud total $L(G \cap Y_3)$, cuya longitud por unidad

de longitud de $G \cap X$ se representa por L_L , valiendo entonces la fórmula

$$(1.5) \quad V_V = L_L.$$

Estas fórmulas (1.1) a (1.5) son las fundamentales de la estereología del espacio E^3 , las cuales permiten estimar L_V , S_V o V_V en X , a partir de los datos análogos en las intersecciones de X con un plano E o con una recta G . La demostración puede verse en el texto clásico de UNDERWOOD [10], en COLEMAN [2] o bien, desde otro punto de vista, en STOYAN-KENDALL-MECKE [9]. Para una exacta puntualización de las ideas básicas es importante el trabajo de MILES-DAVY [4].

El objeto del presente trabajo es demostrar que las mismas fórmulas (1.1) a (1.5) valen si, en vez de cortar X por planos o rectas, se corta por superficies o curvas cualesquiera. Este hecho fue observado por UNDERWOOD [10, pág.39], pero sin dar la demostración. Aquí seguiremos los puntos de vista de MILES-DAVY [4], pero en vez de utilizar las densidades clásicas para rectas o planos, utilizaremos la densidad cinemática de la Geometría Integral, que vale para superficies o curvas cualesquiera, móviles en el espacio sin deformación. Utilizaremos las fórmulas de Geometría Integral dadas por primera vez en [5] y de manera más general en [6] y [8]. También consideraremos (nº5) el caso de pares de variedades (curvas o superficies) que cortan a X , caso considerado por HILLIARD [1], UNDERWOOD [10, p.45 y 73], para el caso de rectas y planos.

Para una excelente puesta al día de los problemas y perspectivas de la Estereología, hasta 1987, ver el artículo de L.M. CRUZ ORIVE [3].

2. LA DENSIDAD CINEMATICA. (ver [5], [6], [7]).

Para determinar la posición de un objeto indeformable (curva, superficie o cuerpo) en E^3 , basta dar la posición de un sistema de ejes cartesianos ortogonales (ejes móviles), determinado por el origen P y tres versores ortogonales e_1, e_2, e_3 ,

invariabilmente unidos al objeto. La posición de este sistema de ejes está determinada por la posición del origen (de coordenadas x, y, z), la dirección del eje móvil e_3 (dada por las coordenadas θ, φ del punto que lo representa sobre la esfera unidad) y por una rotación α alrededor de e_3 . Si llamamos $dP = dx \wedge dy \wedge dz$ al elemento de volumen del espacio correspondiente al punto P , $d\theta^* = \sin\theta \, d\theta \wedge d\varphi$ al valor del elemento de área sobre la esfera unidad en el punto correspondiente a la dirección de e_3 y $d\alpha$ la rotación alrededor de e_3 , la llamada *densidad cinemática* de la Geometría Integral es igual a la forma diferencial

$$(2.1) \quad dK = dP \wedge d\theta^* \wedge d\alpha.$$

Se demuestra que esta forma es invariante por movimientos, es decir, es independiente de los ejes fijos que se toman para definir las variables $x, y, z, \theta, \varphi, \alpha$ y también de la posición del objeto móvil respecto de los ejes (P, e_1, e_2, e_3) . Debido a esta invariancia, se dice que dK es la densidad cinemática *isotrópica y uniforme*. Se suele representar por IU y a veces también por IUR (isotropic, uniform, random) para indicar que la posición del objeto ligado a los ejes se puede considerar dada al azar según la ley isotrópica (independiente de la orientación) y uniforme (invariante por traslaciones).

Los casos posibles en E^3 son los siguientes:

a) *Superficie móvil S y curva fija C_0* . Si la superficie S es móvil con la densidad cinemática dK y su área vale $A(S)$, para el número de puntos de intersección $n(S \cap C_0)$ con una curva fija C_0 de longitud $L(C_0)$, vale la fórmula (ver [5])

$$(2.2) \quad \int n(S \cap C_0) \, dK^S = 4\pi^2 A(S) L(C_0)$$

donde hemos indicado por dK^S a la misma densidad cinemática (2.1) con el índice S para indicar que el objeto móvil es la superficie S .

b) *Superficie móvil S y superficie fija S_0* . Llamando $L(S \cap S_0)$ a la longitud de la curva de intersección de S con S_0 vale la

fórmula integral (ver [5])

$$(2.3) \quad \int L(S \cap S_0) dK^S = 2\pi^3 A(S) A(S_0).$$

c) *Superficie móvil S y cuerpo fijo X*. Indicando por $V(X)$ el volumen de X (no necesariamente convexo) y por $A(S \cap X)$ al área de la intersección $S \cap X$ vale (ver [5])

$$(2.4) \quad \int A(S \cap X) dK^S = 8\pi^2 A(S) V(X).$$

d) *Curva móvil C y superficie fija S*. Es el mismo caso a) con el movimiento inverso, de manera que el resultado es, como antes

$$(2.5) \quad \int n(C \cap S) dK^C = 4\pi^2 L(C) A(S).$$

e) *Curva móvil C y cuerpo fijo X*. Vale la siguiente fórmula (ver [5])

$$(2.6) \quad \int L(C \cap X) dK^C = 8\pi^2 L(C) V(X).$$

Las fórmulas (2.2) a (2.6) se pueden ver en [5] y también en [6], condensadas en la fórmula única (15.20), pág.259. En los primeros miembros, la integración se puede considerar extendida a todo el espacio $(x, y, z, \theta, \varphi, \alpha)$ puesto que los integrandos son nulos cuando las curvas, superficies o cuerpos, no tienen puntos comunes.

3. DENSIDAD CINEMATICA PONDERADA.

MILES y DAVY [4], observaron, para el caso de rectas y planos, que para las aplicaciones a la estereología era mejor utilizar las llamadas *densidades ponderadas* (W , *weighted*) en lugar de las isotrópico-uniformes IU o IUR. Para el caso de la densidad cinemática, vamos a ver que ocurre algo parecido.

Sea X un cuerpo de E^3 (muestra) que contiene en su interior el conjunto Y (fase), que puede estar constituido por hilos, superficies o cuerpos (corpúsculos) que queremos estudiar.

Consideremos el caso de una superficie S , móvil en el espacio de manera indeformable. Si ella está invariablemente unida a los ejes móviles (P, e_1, e_2, e_3) ya sabemos que si queremos una medida invariante por movimientos, debemos tomar la integral de la medida cinemática IU (2.1). Pero otra manera de dar posiciones de S al azar, puede consistir en fijar S dando (P, e_1, e_2, e_3) y, además, el punto sobre S en el que se supone situado el origen P ; este punto sobre S estará determinado por el elemento de área $d\sigma$ de S . La *densidad cinemática ponderada* (weighted) se define entonces por

$$(3.1) \quad dK_W^S = d\sigma \wedge dP \wedge d\theta^* \wedge d\alpha.$$

Observemos que, fijados $dP, d\theta^*, d\alpha$, el elemento de área $d\sigma$ puede integrarse sobre el área $A(S \cap X)$, quedando

$$(3.2) \quad \int dK_W^S = \int A(S \cap X) dK^S$$

donde la integral del primer miembro está extendida a las posiciones de S en que corta a X .

En cierta manera es natural tomar, en estereología, esta densidad ponderada dK_W , puesto que si se quiere analizar la fase Y del interior de X por su comportamiento respecto de la intersección $S \cap X$, parece conveniente tomar S al azar pero de manera que las posiciones con $S \cap X$ grande resulten privilegiadas, es decir, tomar una densidad de probabilidad proporcional al área $A(S \cap X)$, como es (3.2).

Si la figura móvil es una curva C y su elemento de arco lo representamos por ds , tomando el origen P de los ejes móviles en ds , la densidad cinemática ponderada se escribe

$$(3.3) \quad dK_W^C = ds \wedge dP \wedge d\theta^* \wedge d\alpha.$$

Suponiendo que se elige ds en el interior de X , para cada posición de (P, e_1, e_2, e_3) se puede integrar ds a la intersección $C \cap X$, resultando

$$(3.4) \quad \int dK_W^C = \int L(C \cap X) dK^C.$$

Esta fórmula responde al método práctico de determinar al azar la curva C dando primero uno de sus puntos en el interior de X y luego tomar este punto como origen e integrar dk_W^C a todas las posiciones de C .

4. FORMULAS ESTEREOLOGICAS.

Veamos los distintos casos mencionados en el n°1.

a) *Estimación de longitudes mediante superficies de prueba.*

Supongamos que la fase Y_1 sea un conjunto de curvas o filamentos contenidos en X . Queremos estimar la longitud de los mismos por unidad de volumen de X o sea el cociente $L(Y_1)/V(X)$. Cortemos por una superficie de prueba S , la cual, en cada posición, cortará a Y_1 según cierto número de puntos $n(S \cap Y_1)$. Tomando la densidad ponderada dk_W^S (3.1) el valor medio o esperanza matemática de $n(S \cap Y_1)$ por unidad de área de $S \cap X$, resulta

$$(4.1) \quad E_W \left(\frac{n(S \cap Y_1)}{A(S \cap X)} \right) = \left(\int \frac{n(S \cap Y_1)}{A(S \cap X)} dk_W^S \right) \left(\int dk_W^S \right)^{-1}$$

o sea, según (3.2), (2.4) y (2.2)

$$(4.2) \quad E_W \left(\frac{n(S \cap Y_1)}{A(S \cap X)} \right) = \frac{L(Y_1)}{2V(X)}$$

que se acostumbra a escribir, simbólicamente,

$$(4.3) \quad P_A = (1/2) L_V,$$

que es la misma fórmula (1.1) extendida al caso en que, en lugar de planos, se corta al azar por superficies congruentes cualesquiera S . En otras palabras: $2P_A = 2 n(S \cap Y_1)/A(S \cap X)$ es un estimador insesgado de $L(Y_1)/V(X)$ = longitud de la fase por unidad de volumen de la muestra.

b) *Estimación de áreas mediante superficies de prueba.*

Supongamos que la fase sea ahora un conjunto de superficies (láminas) Y_2 contenidas en X , de área total $A(Y_2)$. Queremos estimar el área de Y_2 por unidad de volumen de X , o sea, $A(Y_2)/V(X) = S_V$.

Cortamos X por una superficie de prueba S , supuesta dada al azar con la densidad cinemática ponderada dK_W^S (3.1). El valor medio de la longitud de la intersección $S \cap Y_2$ por unidad de área de $S \cap X$ será

$$(4.4) \quad E_W \left(\frac{L(S \cap Y_2)}{A(S \cap X)} \right) = \left(\int \frac{L(S \cap Y_2)}{A(S \cap X)} dK_W^S \right) \left(\int dK_W^S \right)^{-1}$$

o sea, según (3.2), (2.3), (2.4),

$$(4.5) \quad E_W \left(\frac{L(S \cap Y_2)}{A(S \cap X)} \right) = \frac{\pi}{4} \frac{A(Y_2)}{V(X)}$$

que se suele escribir

$$(4.6) \quad L_A = \frac{\pi}{4} S_V$$

Esta fórmula tiene la misma forma que (1.2), generalizada al caso de cortar por superficies de prueba cualesquiera, en vez de cortar por planos. Es decir la expresión $(4/\pi)L_A = (4/\pi) L(S \cap Y_2)/A(S \cap X)$ es un estimador insesgado de $A(Y_2)/V(X) =$ área de la fase por unidad de volumen de la muestra.

c) Estimación de volúmenes mediante superficies de prueba.

Supongamos que la fase es ahora un conjunto de partículas o corpúsculos Y_3 , contenidos en X . Queremos estimar el volumen de Y_3 por unidad de volumen de X , o sea, el valor de $V(Y_3)/V(X)$, mediante superficies de prueba S . Cortemos X por una prueba S , dada al azar según la densidad cinemática ponderada dK_W^S (3.1). La intersección $S \cap Y_3$ estará compuesta por dominios sobre S cuya área, por unidad de área de $S \cap X$, tendrá por valor medio

$$(4.7) \quad E_W \left(\frac{A(S \cap Y_3)}{A(S \cap X)} \right) = \left(\int \frac{A(S \cap Y_3)}{A(S \cap X)} dK_W^S \right) \left(\int dK_W^S \right)^{-1}$$

o sea, según (3.2), (2.4),

$$(4.8) \quad E_W \left(\frac{A(S \cap Y_3)}{A(S \cap X)} \right) = \frac{V(Y_3)}{V(X)}$$

que se puede escribir

$$(4.9) \quad A_A = V_V$$

lo mismo que en el caso (1.3) en que las pruebas eran planos, mientras que aquí son superficies de forma cualquiera. Se puede enunciar: *la expresión $A_A = A(S \cap Y_3)$ por unidad de área de $S \cap X$, es un estimador insesgado de $V_V =$ volumen de la fase Y_3 por unidad de volumen de la muestra X .*

d) *Estimación de áreas mediante curvas de prueba.*

Sea Y_2 un conjunto de superficies contenidas en la muestra X . Cortemos por una curva C de longitud $L(C)$ y propongamos el problema de calcular el valor medio del número de puntos de intersección $n(C \cap Y_2)$ por unidad de longitud de la intersección $C \cap X$. Lo hacemos con la densidad cinemática ponderada (3.3). Se tiene

$$(4.10) \quad E_W \left(\frac{n(C \cap Y_2)}{L(C \cap X)} \right) = \left(\int \frac{n(C \cap Y_2)}{L(C \cap X)} dK_W^C \right) \left(\int dK_W^C \right)^{-1}$$

o sea, teniendo en cuenta (3.4), (2.5) y (2.6)

$$(4.11) \quad E_W \left(\frac{n(C \cap Y_2)}{L(C \cap X)} \right) = \frac{1}{2} \frac{A(Y_2)}{V(X)}$$

que se puede escribir, análogamente a (1.4)

$$(4.12) \quad P_L = (1/2) S_V,$$

referida ahora al caso de cortar X por curvas congruentes cualesquiera en lugar de rectas. Se puede enunciar:

$2P_L = 2n(C \cap Y_2)/L(C \cap X) =$ dos veces el número de puntos de intersección de la fase Y_2 con la prueba C , por unidad de arco de la intersección $C \cap X$, es un estimador insesgado del cociente $A(Y_2)/V(X) =$ área de la fase por unidad de volumen de la muestra.

e) Estimación de volúmenes mediante curvas de prueba.

Sea Y_3 un conjunto de partículas o corpúsculos (fase) contenidos en la muestra X . Cortemos con una curva C al azar según la densidad cinemática ponderada dK_W^C y sea $L(C \cap Y_3)$ la longitud total de la intersección $C \cap Y_3$. Queremos estimar el cociente $V(Y_3)/V(X)$ (volumen de Y_3 por unidad de volumen de X) a partir del cociente $L(C \cap Y_3)/L(C \cap X) =$ longitud de la intersección $C \cap Y_3$ por unidad de longitud de $C \cap X$. Tenemos

$$(4.13) \quad E_W \left(\frac{L(C \cap Y_3)}{L(C \cap X)} \right) = \left(\int \frac{L(C \cap Y_3)}{L(C \cap X)} dK_W^C \right) \left(\int dK_W^C \right)^{-1}$$

o sea, según (3.4) y (2.6),

$$(4.14) \quad E_W \left(\frac{L(C \cap Y_3)}{L(C \cap X)} \right) = \frac{V(Y_3)}{V(X)}$$

que se suele escribir

$$(4.15) \quad L_L = V_V,$$

es decir: el cociente entre la longitud de la intersección $C \cap Y_3$ y la longitud del arco $C \cap X$ es un estimador insesgado del volumen de Y_3 por unidad de volumen de X .

Hemos generalizado así (1.5) al caso de cortar la muestra X por una curva de prueba C de forma cualquiera, dada al azar según la densidad cinemática ponderada (3.3).

En todos los casos (4.3), (4.6), (4.9), (4.12) y (4.15) hemos supuesto que la superficie o curva de prueba era de cualquier forma pero indeformable. En realidad, como el resultado depende únicamente del área, si es superficie, o de la longitud, si se trata de una curva, la forma de estas pruebas no interesa, de manera que se puede suponer que se corta por pruebas de

forma variable, como superficies o hilos deformables, mientras conserven el área o la longitud según el caso. El resultado es tá expresado siempre por las fórmulas anteriores (4.3), (4.6), (4.9), (4.12), (4.15).

5. PRUEBA CON PARES DE CURVAS Y SUPERFICIES.

En vez de cortar la muestra X por una superficie S o por una curva C , se puede cortar por un par de curva más superficie, o por dos o tres superficies distintas. El método tal vez no sea útil en la estereología práctica, pero el tratamiento teórico no ofrece dificultad.

Nos vamos a limitar, como ejemplo, al caso considerado por UNDERWOOD [10], págs.45 y 73, tomado de un trabajo de HILLIARD [1]. Estos autores se refieren al caso de cortar X por pares de rectas y planos al azar, considerando los puntos de intersección P_V por unidad de volumen que quedan interiores a la fase Y , llegando a la fórmula

$$(5.1) \quad P_V = (1/2) L_V S_V$$

o a su equivalente

$$(5.2) \quad P_V = 2 P_A P_L.$$

Nosotros vamos a cortar por pares de curvas C y superficies S . Si la fase Y está formada por corpúsculos o cuerpos cualesquiera de volumen total $V(Y)$, la intersección $C \cap S \cap Y$ es un conjunto discreto de puntos (salvo posiciones de C y S de medida nula) y es conocida la fórmula

$$(5.3) \quad \int n(C \cap S \cap Y) dK^C dK^S = 32 \pi^4 L(C) A(S) V(Y),$$

la cual es un caso particular de la fórmula general (15.22) de [6], pág.259. Son conocidas también las fórmulas integrales

$$(5.4) \quad \int L(C \cap Y) dK^C = 8 \pi^2 V(Y) L(C)$$

$$(5.5) \quad \int A(S \cap Y) dK^S = 8 \pi^2 V(Y) A(S)$$

que pueden verse en [5], de las cuales se deduce

$$(5.6) \quad E(L(C \cap Y)/V(Y)) = \frac{8 \pi^2 L(C)}{\int dK^C}$$

$$(5.7) \quad E(A(S \cap Y)/V(Y)) = \frac{8 \pi^2 A(S)}{\int dK^S}$$

donde las integrales de los denominadores están extendidas a las posiciones de C y S en que cortan a Y.

Como C y S se suponen independientes, de (5.3) se deduce

$$(5.8) \quad E\left(\frac{n(C \cap S \cap Y)}{V(Y)}\right) = P_V = \frac{32 \pi^4 L(C) A(S)}{\int dK^C \int dK^S}$$

puesto que $\int dK^C dK^S = \int dK^C \int dK^S$.

De (5.6), (5.7) y (5.8) se deduce

$$(5.9) \quad P_V = \frac{1}{2} L_V S_V$$

que queríamos demostrar. Aplicando (1.1) y (1.4) resulta la fórmula (5.2) generalizada al caso de cortar por curvas C y superficies S.

Debemos notar que para la validez de estas fórmulas (5.9) y su equivalente (5.2) (para curvas y superficies), hemos tomado las densidades cinemáticas dK^C y dK^S , no las densidades ponderadas dK_W^C o dK_W^S . Antes del trabajo de MILES-DAVY [4] esta distinción no solía hacerse de manera explícita, lo que oscurecía la presentación de los resultados estereológicos.

BIBLIOGRAFIA

- [1] HILLIARD, J.E. *Specification and Measurement of Microstructural Anisotropy*, Trans. A I M E, 224, 1962, 1201.
- [2] COLEMAN, R. *An Introduction to Mathematical Stereology*, Department of Theoretical Statistics, University Aarhus, 1979.
- [3] CRUZ ORIVE, L.M. *Stereology: recent solutions to old problems and a glimpse into the future*, Acta Stereologica, Proc. Seventh International Congress for Stereology, Caen, 1987, 3-18.
- [4] MILES, R.E. - DAVY, P. *Precise and general conditions for the validity of a comprehensive set of stereological fundamental formulae*, J. of Microscopy, 107, 1976, 211-226.
- [5] SANTALO, L.A. *Integralgeometrie 5: Über das kinematische Mass im Raum*, Actualités Scient. et Industrielles, n°357 Hermann, Paris, 1936.
- [6] SANTALO, L.A. *Integral Geometry and Geometric Probability*, Addison-Wesley, Reading, 1976.
- [7] SANTALO, L.A. *Integral Geometry*, en el libro *Studies in Global Geometry and Analysis* (S.S.Chern, editor) p.147-195, Math.Assoc.America, Washington, D.C. 1967.
- [8] SANTALO, L.A. and FAVA, N. *Random Processes of Manifolds*, Zeitschr. Wahrscheinlichkeitstheorie und Gebiete, 50, 1979, 85-96.
- [9] STOYAN, D. - KENDALL, W.S. - MECKE, J. *Stochastic Geometry and its Applications*, Akademie Verlag, Berlin, D D R, 1987 (Cap.11).
- [10] UNDERWOOD, E.E. *Quantitative Stereology*, Addison-Wesley, Reading, 1970.

Departamento de Matemática
 Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
 Universidad de Buenos Aires.

Recibido en febrero de 1989.