

LA STRUCTURE DES OPÉRATEURS MONOTONES

EDUARDO H. ZARANTONELLO

Dédié à Mischa Cotlar à l'occasion de son 75^e anniversaire

Les sousdifférentielles des fonctions convexes, les applications antisymétriques, et les restrictions de leurs sommes sont les exemples courants d'opérateurs monotones. Quoique l'énumération ne soit pas complète, car, par exemple, on n'y compte pas les opérateurs monotones dans R^2 définis par les fonctions holomorphes non linéaires ayant dérivées à partie réelle positive, on reste sous l'impression que d'une façon ou l'autre tous les opérateurs monotones sont déjà contenus dans les sommes des sousdifférentielles et des applications antisymétriques. En tout cas il est évident que pour les en tirer il faut mettre à main un nouvel instrument en outre la simple restriction. Un tel instrument, nous nous proposons de démontrer, est l'opération de "réduction" permettant de passer d'un opérateur agissant dans une dualité d'espaces vectoriels à un autre qui agit dans une sousdualité. Par cette voie on non seulement obtient tous les opérateurs monotones, mais à la fois on les obtient à partir des sousdifférentielles des fonctions indicatrices des convexes et des applications antisymétriques. La construction que nous allons faire est une extension à toute cardinalité d'une construction discrète que nous avons utilisé dans la solution d'un problème d'interpolation d'opérateurs monotones [1].

Comme préparation pour la définition formelle de réduction remarquons que si une forme bilinéaire $\langle x, y \rangle$ met en dualité sépa

rée deux espaces vectoriels X et Y , alors elle met en dualité séparée toute couple de sousespaces X_1 et Y_1 tels que $X_1 \cap Y_1^\perp = \{0\}$, $X_1^\perp \cap Y_1 = \{0\}$; on appelle cette nouvelle dualité une *sousdualité* de l'antérieure.

DÉFINITION. Si $M: X \rightarrow 2^Y$ est un opérateur agissant dans une dualité $\{X, Y, <, >\}$ son réduit à une sousdualité $\{X_1, Y_1, <, >\}$ est l'opérateur $M_1: X_1 \rightarrow 2^{Y_1}$ défini par

$$(1) \quad M_1 x_1 = M(x_1 + Y_1^\perp) \cap Y_1, \quad \forall x_1 \in X_1.$$

Il faut aussi accommoder la notion d'application antisymétrique en la libérant de l'univocité et de la linéarité, ce qui donne lieu à l'idée d'opérateur "atone", dont voici la définition:

DÉFINITION 2. Un opérateur $A: X \rightarrow 2^Y$ agissant dans une dualité d'espaces vectoriels est dit *atone* si

$$(2) \quad \langle x_1 - x_2, y_1 - y_2 \rangle = 0, \quad \forall x_1, x_2 \in D(A), \quad \forall y_1 \in Ax_1, \quad \forall y_2 \in Ax_2.$$

Un opérateur atone maximal est un opérateur atone qui n'admet pas des extensions atones propres.

Quant à la discussion des opérateurs atones le lecteur est prié de consulter la première partie de l'article cité ci-dessus; ici nous utilisons la même notation.

LEMME 1. La monotonie, la monotonie cyclique, et l'atonicité sont invariantes relativement à l'opération de réduction.

Dém. Soit M_1 un réduit de M . Alors $y_1^{(i)} \in M_1 x_1^{(i)}$, $i=1,2$ sont équivalentes à l'existence de deux vecteurs $u^{(1)}$ et $u^{(2)}$ dans $Y_1^\perp$ tels que $y_1^{(i)} \in M(x_1^{(i)} + u^{(i)})$, $i=1,2$, et on peut écrire

$$\langle x_1^{(1)} - x_1^{(2)}, y_1^{(1)} - y_1^{(2)} \rangle = \langle x_1^{(1)} - x_1^{(2)} + u^{(1)} - u^{(2)}, y_1^{(1)} - y_1^{(2)} \rangle$$

d'où il suit que si M est monotone ou atone M_1 en est aussi. Un argument tout à fait pareille démontre l'invariance de la monotonie cyclique.

La discussion qui suit est indépendante de la topologie mais le langage topologique y est souvent convenable. Donc, chaque fois que nous envisageons une dualité, nous supposons les espaces doués de topologies d'espaces vectoriels compatibles avec la dualité; la seule notion topologique dont il aura lieu est celle d'adhérence d'un convexe, laquelle, comme on sait, est indépendante de la topologie choisie.

LEMME 2. Soit $\hat{X}$ un espace vectoriel et $\hat{Y}$ l'espace vectoriel de toutes les fonctionnelles linéaires sur $\hat{X}$, mis en dualité par la relation fonctionnelle. Tout opérateur monotone $\hat{M}: \hat{X} \rightarrow \hat{Y}$ défini sur un ensemble $D(\hat{M})$ de points affinement indépendents admet une extension de la forme $\hat{A} + \partial\psi_{\hat{\Delta}}$, où $\hat{A}$ est un opérateur atone maximal de domaine $\text{affD}(\hat{M})$, et $\psi_{\hat{\Delta}}$ la fonction indicatrice de l'ensemble $\hat{\Delta} = \overline{\text{coD}}(\hat{M})$; on peut mettre un opérateur constant à la place de $\hat{A}$ si et seulement si $\hat{M}$ est cycliquement monotone.

Dém. Dès que la monotonie peut être exprimée par

$$(3) \quad \langle \hat{x}_1 - \hat{x}_2, \hat{y}_1 \rangle \geq \langle \hat{x}_1 - \hat{x}_2, \hat{y}_2 \rangle, \quad \forall \hat{x}_1, \hat{x}_2 \in D(\hat{M}), \quad \forall \hat{y}_1 \in \hat{M}\hat{x}_1, \quad \forall \hat{y}_2 \in \hat{M}\hat{x}_2,$$

il existe, pour toute couple ordonnée de points $\hat{x}_1, \hat{x}_2$ dans $D(\hat{M})$, une quantité séparatrice $h(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ telle que

$$(4) \quad \langle \hat{x}_1 - \hat{x}_2, \hat{y}_1 \rangle \geq h(\hat{x}_1, \hat{x}_2) \geq \langle \hat{x}_1 - \hat{x}_2, \hat{y}_2 \rangle, \quad \forall \hat{y}_1 \in \hat{M}\hat{x}_1, \quad \forall \hat{y}_2 \in \hat{M}\hat{x}_2.$$

Si on échange le rôle de $\hat{x}_1$ et $\hat{x}_2$ on obtient

$$(5) \quad \langle \hat{x}_1 - \hat{x}_2, \hat{y}_1 \rangle \geq -h(\hat{x}_2, \hat{x}_1) \geq \langle \hat{x}_1 - \hat{x}_2, \hat{y}_2 \rangle, \quad \forall \hat{y}_1 \in \hat{M}\hat{x}_1, \quad \forall \hat{y}_2 \in \hat{M}\hat{x}_2,$$

d'où en écrivant $k(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = \frac{1}{2} (h(\hat{x}_1, \hat{x}_2) - h(\hat{x}_2, \hat{x}_1))$ il suit

$$(6) \quad \langle \hat{x}_1 - \hat{x}_2, \hat{y}_1 \rangle \geq k(\hat{x}_1, \hat{x}_2) \geq \langle \hat{x}_1 - \hat{x}_2, \hat{y}_2 \rangle, \quad \forall \hat{y}_1 \in \hat{M}\hat{x}_1, \quad \forall \hat{y}_2 \in \hat{M}\hat{x}_2,$$

$$(7) \quad k(\hat{x}_1, \hat{x}_2) + k(\hat{x}_2, \hat{x}_1) = 0.$$

Pour tout $\hat{x}_1 \in D(\hat{M})$ fixe les vecteurs $\{\hat{x}_1 - \hat{x}_2 : \hat{x}_1 \neq \hat{x}_2, \hat{x}_2 \in D(\hat{M})\}$ forment un système linéairement indépendant dont les combinaisons linéaires remplissent un espace linéaire fixe ne dépendant pas du choix de $\hat{x}_1$. Il y a une seule fonctionnelle linéaire sur cet espace prenant les valeurs $k(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ aux points $\hat{x}_1 - \hat{x}_2$, fonctionnelle que peut être étendue à l'espace entier et représentée par un élément $\hat{z}_1 \in \hat{Y}$. Selon cette construction

$$(8) \quad \langle \hat{x}_1 - \hat{x}_2, \hat{z}_1 \rangle = k(\hat{x}_1, \hat{x}_2), \quad \hat{x}_1 \neq \hat{x}_2,$$

et par suite

$$(9) \quad \langle \hat{x}_1 - \hat{x}_2, \hat{z}_1 - \hat{z}_2 \rangle = k(\hat{x}_1, \hat{x}_2) + k(\hat{x}_2, \hat{x}_1) = 0, \quad \hat{x}_1 \neq \hat{x}_2.$$

Autrement dit, l'application $\hat{x} \rightarrow \hat{z}$ de $D(\hat{M})$ dans $\hat{Y}$ est atone. Alors, en vertu de [1, Lemme 3.2] il existe un opérateur atone maximal $\hat{A}: \hat{X} \rightarrow \hat{Y}$ tel que $\hat{z} \in \hat{A}\hat{x}$, $\forall \hat{x} \in D(\hat{M})$. De (6) et (9) il découle

$$(10) \quad \langle \hat{x}_1 - \hat{x}_2, \hat{y}_1 - \hat{z}_1 \rangle \geq 0, \quad \forall \hat{x}_1, \hat{x}_2 \in D(\hat{M}), \quad \forall \hat{y}_1 \in \hat{M}\hat{x}_1,$$

ce qui dit que $\hat{y}_1 - \hat{z}_1$ est une normale extérieure du convexe $\hat{\Delta} = \overline{\text{co}D(\hat{M})}$ au point $\hat{x}_1$, c'est à dire, que $\hat{y}_1 - \hat{z}_1 \in \partial\psi_{\hat{\Delta}}(\hat{x}_1)$. De ce que nous venons de dire il suit

$$(11) \quad \hat{y} \in \hat{z} + \partial\psi_{\hat{\Delta}}(\hat{x}) \subset \hat{A}\hat{x} + \partial\psi_{\hat{\Delta}}(\hat{x}) = (\hat{A} + \partial\psi_{\hat{\Delta}})\hat{x}, \quad \forall \hat{x} \in D(\hat{M}), \quad \forall \hat{y} \in \hat{M}\hat{x},$$

ce qu'est précisément la première partie de la proposition à démontrer.

Que la monotonicté cyclique soit nécessaire pour qu'on puisse mettre un opérateur constant à la place de A est conséquence du fait que alors $\hat{A} + \partial\psi_{\hat{\Delta}}$ est cycliquement monotone. Montrons maintenant la suffisance en supposant, comme point de départ, que $\hat{M}$ soit cycliquement monotone. Sous cette condition il est bien connu que

$$(12) \quad g(\hat{x}) = \sup \sum_0^k \langle \hat{x}_{i+1} - \hat{x}_i, \hat{y}_i \rangle,$$

où le sup est pris par rapport à toutes les suites finies $(\hat{x}_0, \hat{y}_0), (\hat{x}_1, \hat{y}_1), \dots, (\hat{x}_{k-1}, \hat{y}_{k-1})$ de points du graphe de $\hat{M}$ telles que $\hat{x}_0$ soit un point fixe et $\hat{x}_{k+1} = \hat{x}$, est une fonction convexe propre semicontinue inférieurement dont la sousdifférentielle est une extension de $\hat{M}$, c'est à dire,

$$(13) \quad \hat{M}\hat{x} \subset \partial g(\hat{x}) \quad , \quad \forall \hat{x} \in D(\hat{M}).$$

Comme tout sousespace affine de $\hat{X}$ est fermé on a $\overline{\text{coD}}(\hat{M}) \subset \text{affD}(\hat{M})$, et par suite, à cause de l'indépendance linéaire, tout $\hat{x} \in \overline{\text{coD}}(\hat{M})$ admet une représentation univoque de la forme $\hat{x} = \sum_0^t t_i \hat{x}_i$, $\sum_0^n t_i = 1$, $\hat{x}_i \in D(\hat{M})$, $i=1,2,\dots,n$. D'après cette remarque on peut définir une nouvelle fonction:

$$f(\hat{x}) = \begin{cases} \sum_0^n t_i g(\hat{x}_i), & \text{si } \hat{x} = \sum_0^n t_i \hat{x}_i \in \overline{\text{coD}}(\hat{M}), \sum_0^n t_i = 1, \hat{x}_i \in D(\hat{M}), i=1,2,\dots,n \\ +\infty & , \text{ si } \hat{x} \notin \overline{\text{coD}}(\hat{M}). \end{cases}$$

Notons d'abord que par construction,

$$(14) \quad g(\hat{x}) = f(\hat{x}) \quad , \quad \forall \hat{x} \in D(\hat{M}) \quad ,$$

$$(15) \quad g(\hat{x}) \leq f(\hat{x}) \quad , \quad \forall \hat{x} \in \hat{X}.$$

Dès que sur $\overline{\text{coD}}(\hat{M})$ f est une fonction affine elle y coïncide avec une fonction de la forme $\langle \hat{x}, \hat{z} \rangle + \text{const}$, et on peut écrire

$$(16) \quad f(\hat{x}) = \langle \hat{x}, \hat{z} \rangle + \text{const} + \psi_{\hat{\Delta}}(\hat{x}) \quad , \quad \hat{\Delta} = \overline{\text{coD}}(\hat{M}) \quad ;$$

en particulier, f est convexe propre semicontinue inférieurement. Mais alors, f étant une majorante de g que coïncide avec elle aux points de $D(\hat{M})$, on déduit

$$(17) \quad \partial g(\hat{x}) \subset \partial f(\hat{x}) \quad , \quad \forall \hat{x} \in D(\hat{M}) \quad ,$$

ce qui entraîne

$$\hat{M}\hat{x} \subset \partial g(\hat{x}) \subset \partial f(\hat{x}) = \hat{z} + \partial \psi_{\hat{\Delta}}(\hat{x}) \quad , \quad \forall \hat{x} \in D(\hat{M}).$$

Comme rien ne change si on remplace ici $\hat{z}$ par la classe $\hat{Z}$ des restes modulo $((\text{aff} D(\hat{M}))^\top)^\perp$ qui contient $\hat{z}$ on a démontré que $\hat{M}$ admet une extension de la forme $\hat{A} + \partial \psi_{\hat{\Delta}}$, où $\hat{A}$ est l'opérateur monotone maximal (constant) qui à tout point de $\text{aff} D(\hat{M})$ fait correspondre $\hat{Z}$.

THÉOREME 1. *Tout opérateur monotone maximal $M: X \rightarrow 2^Y$ agissant dans une dualité d'espaces vectoriels quelconque s'obtient par réduction d'un opérateur de la forme $\hat{A} + \partial \psi_{\hat{\Delta}}: \hat{X} \rightarrow 2^{\hat{Y}}$, où $\hat{A}$ est un opérateur atone maximal et $\partial \psi_{\hat{\Delta}}$ la sousdifférentielle de la fonction indicatrice d'un convexe fermé $\hat{\Delta}$; si M est cycliquement monotone on peut prendre pour $\hat{A}$ un opérateur constant.*

Dém. Soit U un espace vectoriel de dimension égale à la cardinalité de $D(M)$, V l'espace de toutes les fonctionnelles linéaires sur U , et $\tilde{Y}$ l'espace de toutes les fonctionnelles linéaires sur X . A l'aide de ces espaces on construit deux nouveaux espaces: $\hat{X} = X \oplus U$, $\hat{Y} = \tilde{Y} \oplus V$, qu'on met en dualité par la dualité induite par celles reliant X et U avec $\tilde{Y}$ et V respectivement. De cette façon $\hat{Y}$ représente la totalité des fonctionnelles linéaires sur $\hat{X}$. Les espaces X et Y seront pensés comme plongés dans $\hat{X}$ et $\hat{Y}$ en les identifiant avec $X \oplus \{0\}$ et $Y \oplus \{0\}$ respectivement. Le cadre fixé, procédons maintenant à la construction de $\hat{A}$ et $\partial \psi_{\hat{\Delta}}$. A partir d'une application $u: D(M) \rightarrow U$ à valeurs affinement indépendantes, dont l'existence est assurée par le choix qu'on a fait de U , on envisage l'opérateur $\hat{M}: \hat{X} \rightarrow 2^{\hat{Y}}$ défini par l'équation

$$\hat{M}(x + u(x)) = Mx.$$

$\hat{M}$ est monotone, car si $\hat{x}_i = x_i + u(x_i)$, $\hat{y}_i \in \hat{M}\hat{x}_i = Mx_i$, $i=1,2$, alors

$$\langle \hat{x}_1 - \hat{x}_2, \hat{y}_1 - \hat{y}_2 \rangle = \langle x_1 - x_2 + u(x_1) - u(x_2), \hat{y}_1 - \hat{y}_2 \rangle = \langle x_1 - x_2, \hat{y}_1 - \hat{y}_2 \rangle \geq 0 \quad ,$$

à cause de la monotonie de M ; son réduit, et, a fortiori, le réduit de

toute extension à la dualité $\{X, Y, <, >\}$ est une extension monotone de M , donc égale à M en vertu de la maximalité. Finalement, comme $D(\hat{M}) = \{x + u(x) \mid x \in D(M)\}$ est un ensemble affine indépendant, $\hat{M}$ satisfait aux hypothèses du Lemme 2 et par suite il admet une extension de la forme $\hat{A} + \partial\psi_{\hat{\Delta}}$, dont M - parce que nous venons de dire - en est le réduit. Si M est cycliquement monotone $\hat{M}$ en est aussi, et on peut choisir $\hat{A}$ entre les opérateurs constants. Le théorème est démontré.

Pour les opérateurs cycliquement monotones le théorème que nous venons de démontrer n'est nullement une nouveauté, au contraire, il est une version affaiblie de la construction qui permet de calculer la sousdifférentielle d'une fonction convexe à partir de la sousdifférentielle de la fonction indicatrice de son épigraphe.

Nous avons fait la construction de $\hat{A}$ et $\partial\psi_{\hat{\Delta}}$ à notre aise en prenant beaucoup d'espace, en fait, $\hat{X}$ et $\hat{Y}$ sont des espaces énormes. Évidemment une telle amplitude n'est pas toujours nécessaire, comme on voit dans le cas cycliquement monotone où il suffit d'ajouter une seule dimension aux espaces originaux. Elle n'est non plus désirable, car dans cette immensité on finit pour perdre les propriétés spécifiques des opérateurs de départ; la construction sera autant plus utile le plus ajustée elle reste des données. Peut-être cet ajustement ne sera possible qu'en abandonnant l'idée d'une représentation en faveur d'une approximation de l'opérateur.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] ZARANTONELLO, E.H., *Piecewise atone interpolation of monotone operators*, Rend.Sc.Norm.Sup.Pisa, Serie IV, Vol.IX, N°4, (1981), 497-528.

Centro Regional de Investigaciones
Científicas y Tecnológicas
Casilla de Correo 131
Mendoza, Argentina

Recibido en febrero de 1989.