Revista de la
Unión Matemática Argentina
Volumen 34, 1988.

MEDIDA Y REPRESENTACION

DANIEL GLUSCHANKOF y MIGUEL TILLI

M.Cotlar dio en 1961 un curso sobre la teoría de representación de grupos, publicado por la colección "*Cursos y seminarios*" del Departamento de Matemática de la FCEyN de la UBA ([Co]). Allí dedica una buena parte del trabajo a preparar herramientas para el tratamiento general de la teoría de representación de grupos a través de una idea original: la generalización de grupos a semigrupos "bajo el control" de una relación de orden. Como puede sugerirlo la lectura de la introducción de ese trabajo, estamos frente a los prolegómenos de una teoría general de la dimensión.

Aquí vamos a tomar un aspecto que creemos central en la teoría de la representación y su relación con dos teoremas no constructivos en el marco de una teoría axiomática de conjuntos: el teorema de Hahn-Banach (HB) y el del Ideal Primo (TIP).

Recordemos las formulaciones usuales de dichos teoremas:

<u>HB</u>: Sea S un subespacio de un espacio vectorial V, p: $V \to R$ una funcional sublineal y f: $S \to R$ una funcional lineal tal que $f \leq p_{|S}$ (para el orden heredado de $\mathbf{R}$), existe entonces una extensión $\tilde{f}$ de f definida sobre todo V tal que vale $\tilde{f} \leq p$.

<u>TIP</u>: Sea B un álgebra de Boole, $I \subseteq B$ un ideal propio, existe entonces un ideal primo $P \subseteq B$ tal que $I \subseteq P$.

Recordando la definición de *objeto inyectivo* para una categoría C, decimos que A es *inyectivo* si dados objetos B y C en la categoría tales que B es subobjeto de C y existe una flecha $f: B \to A$, entonces existe una extensión de f, $\tilde{f}: C \to A$.

Tenemos entonces que en la categoría $\mathcal{V}$ cuyos objetos son los pares (V,p) (donde V es un espacio vectorial real y p es un morfismo sublineal de V en R) y cuyas flechas son morfismos compatibles con los p, el teorema de Hahn-Banach afirma "$(R,|id|)$ es un objeto inyectivo".

Análogamente, se verifica sin dificultad que, dada un álgebra de Boole B y dado un ideal primo $P \subseteq B$ obtenemos un homomorfismo $f: B \to 2$ dado por $f = \chi_{B\setminus P}$, recíprocamente, todo morfismo en el álgebra de Boole 2 induce un ideal primo $(f^{-1}(0))$. Por lo tanto se deduce que el teorema del ideal primo afirma, para la categoría de las álgebras de Boole "2 es un objeto inyectivo".

Si bien vemos que ambos teoremas afirman la inyectividad de ciertos objetos en ciertas categorías, por lo demás parecería que se trata de teoremas esencialmente distintos, sin embargo no es así. Para verlo, escribiremos otra formulación equivalente para cada teorema.

<u>HB</u>: Sea X un conjunto, $I \subseteq \mathcal{P}(X)$ un ideal propio. Existe una medida simplemente aditiva μ sobre X a valores en el intervalo [0,1] tal que $\mu|_I = 0$. (Esta formulación es debida a W.A.J.Luxemburg, ver [Lu]).

<u>TIP</u>: Sea X un conjunto, $I \subseteq \mathcal{P}(X)$ un ideal propio. Existe una medida simplemente aditiva μ sobre X a valores en el conjunto {0,1} tal que $\mu|_I = 0$.

Es claro, entonces, que vale la implicación TIP $\Rightarrow$ HB, aunque la recíproca no es válida (ver [Pi]).

Veamos ahora la relación que existe entre estos teoremas y la teoría de representaciones:

El teorema de representación de Stone (equivalente a TIP) afirma "Toda álgebra de Boole es isomorfa a una subálgebra de $\mathcal{P}(X)$ para algún conjunto X adecuado" y cuya demostración resulta esencialmente del diagrama

$$\begin{tikzcd} B \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr] \arrow[rr, phantom, shift right=4ex, "\xleftarrow{Sp_i(\varphi)}"] & & C(Sp_i(B),i) \subseteq P(Sp_i(B)) \arrow[dl] \\ & i & \end{tikzcd}$$

donde i es un álgebra de Boole cualquiera, $Sp_i(B)$ es el conjunto de los morfismos de B en i (en el caso i=2 se puede pensar $Sp_2(B) = Sp(B)$ como el conjunto de los ideales primos de B) y se define φ por $\varphi(b)(x) = x(b)$ (que en el caso i=2 puede pensarse como $\chi_{B\setminus x}(b)$). La verificación de la inyectividad de φ no ofrece dificultades. Para verificar que φ es un epimorfismo, tenemos que la definición categorial dice que φ es epi si y solamente si $Sp_i(\varphi)$ es mono para toda álgebra de Boole i. Sin embargo, en nuestro caso particular basta con considerar el caso i=2. Entonces, decir que $Sp(\varphi)$ es un monomorfismo es lo mismo que decir que B "distingue puntos", es decir, que si $x,y \in Sp(B)$, $x \neq y$, existe entonces $b \in B$ tal que $\varphi(b)(x) \neq$ $\neq \varphi(b)(y)$, o sea $Sp(\varphi)(x) = \varphi^{-1}(x) \neq \varphi^{-1}(y) = Sp_i(\varphi)(y)$.

Consideremos ahora X un compacto de Boole (de Hausdorff) cualquiera, es dable proponerse el problema general: ¿en qué condiciones una subálgebra B de C(X,i) será "densa", es decir, la inyección φ: B $\hookrightarrow$ C(X,i) será un epimorfismo?. La respuesta resulta ser la análoga al caso particular anterior: si y solamente si $Sp_i(\varphi)$ es mono para el caso particular cuando i es 2 (es [0,1]).

La compactación de Stone-Čech resulta esencialmente de lo observado arriba y la prueba de su existencia es equivalente también a TIP.

La teoría general de la dualidad muestra que la cuestión central es el carácter epimórfico de φ. En el caso tradicional (Hausdorff) esto se traduce por denso, por lo que usaremos, como abuso de notación la expresión "denso" por epimórfico.

Se puede observar que, considerando el caso del álgebra de funciones C(X, [0,1]) en lugar de C(X,2), estamos en el teorema de Stone-Weierstrass y, poniendo C(X,D) ($D = \{z \in C \ / \ |z| \leqslant 1\}$), resulta ser el teorema de representación de Gel'fand para C^*-álgebras.

Veamos, para un caso particular, cómo aparece la existencia de medidas en estos teoremas: se trata de garantizar que existen suficientes caracteres (morfismos de álgebra de B en el objeto de representación de la categoría: 2, R, C).

Tomemos el caso de los R-espacios vectoriales reticulados (espacios de Riesz).

En [Co] y [Co'], Cotlar demuestra un teorema de extensión de funcionales para grupos abelianos ordenados (el que resulta igualmente válido para espacios vectoriales ordenados), usando el axioma de elección. En [GT] probamos que dicho teorema es, en realidad equivalente a HB. El esquema de la demostración es como sigue:

Sea S un subespacio (de Riesz) de V, $p: V \to \mathbf{R}$ un morfismo sublineal, $f: S \to \mathbf{R}$ un morfismo (de orden) lineal acotado por p. En [Co] y [Co'] se demuestra, en ZF (la parte constructiva de la teoría de conjuntos de Zermelo-Fränkel) que, para cada punto $g \in V \backslash S$ se puede construir una extensión (que preserva el orden) de f definida sobre $S \cup \{g\}$.

Ahora,para cada sucesión finita $x = (g_1,\ldots,g_n) \subseteq V$, (ordenada por los subíndices) podemos construir, iterando el procedimiento de arriba, una extensión $f_x: S \cup x \to \mathbf{R}$.

Sea $X = \{x = (g_1,\ldots,g_n)/g_1,\ldots,g_n \in V\}$.

Definimos una función $F: V \to \mathbf{R}^X$ poniendo:

$$F(g)(x) := \begin{cases} f_x(g) & \text{si} \quad g \in S \cup x \\ 0 & \text{si} \quad g \notin S \cup x \end{cases} \qquad (**)$$

Para cada $g,g' \in V$, definimos $H(g) = \{x \in X \,/\, g \notin S \cup x\}$.

Sea I el ideal de $\mathcal{P}(X)$ generado por la familia $(H(g))_{g\in V}$.

Si I no fuera propio, existiría un elemento de X, $x = (g_1,\ldots,g_n)$, tal que $\cup H(g_i) = X$ y por lo tanto tendríamos que $x \in H(g_i)$ para algún i, $1 \leqslant i \leqslant n$, contradiciendo la definición de $H(g_i)$.

Podemos entonces aplicar el segundo enunciado de HB y obtener una medida μ tal que $\mu(X) = 1$ y $\mu(a) = 0$ cada vez que $a \in I$.

Si g y $g' \in V$, tenemos que $\{x \in X \,/\, F(g+g')(x) \neq \neq F(g)(x)+F(g')(x)\} \subseteq H(g) \cup H(g') \cup H(g+g')$, cuya medida es cero. Entonces F es aditiva en casi todo punto (con respecto a μ). Análogamente se garantiza la acotación por p y la acción de R.

Como $F(g)$ es, para cada $g \in V$, una función acotada, definida sobre X, se puede construir explícitamente (en ZF) una sucesión de funciones simples (funciones "escalera") $(g_i)_{i\in N}: X \to R$ que convergen uniformemente a $F(g)$.

Entonces, para cada $g \in V$, podemos definir una integral tipo Lebesgue

$$\int_X F(g)(x)d\mu := \lim_{i\to\infty} \int_X g_i(x)d\mu.$$

La integral de la derecha se debe interpretar, cuando g_i es la función $c.\chi_Y$, $Y \subseteq X$, $c \in R$, como $\int_X c.\chi_Y d\mu = c.\mu(Y)$.

Tenemos entonces las funciones $V \xrightarrow{F} L^1(X,P(X),\mu,R) \xrightarrow{\int} R$ y la composición $\int \circ F = \int_X F(\ )(x)d\mu$ es una extensión aditiva y de orden de f a todo V.

Si consideramos ahora el caso reticulado, si bien el morfismo original f era de Riesz (i.e. preservaba las operaciones de reticulado), la extensión $\tilde{f}$ que preserva el orden, bien podría no preservar ínfimos y supremos. Consideremos ahora el conjunto $F = \{\tilde{f} \,/\, \tilde{f}$ extiende a f como morfismo de orden$\}$ que resulta ser un subconjunto convexo-compacto (ver [Lu]) de la bola unitaria del espacio $L(V,p)$. En [LS] se prueba que $\tilde{f} \in F$ es extremal si y solamente si es de Riesz. Usando una forma fuerte del teorema de Krein-Millman, se demuestra que existe algún extremal y, por lo tanto se concluye que existe una extensión $\tilde{f}$ de f a todo V que preserva también las operaciones de reticulado.

Vale la pena mencionar que la conjunción de los teoremas no constructivos usados en esta demostración (HB y la forma fuerte de Krein-Millman) es equivalente al axioma de elección.

REFERENCIAS

[Co] COTLAR, M., *Introducción a la teoría de representación de grupos*, Cursos y seminarios de Matemática, Nro.11, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, UBA, Buenos Aires, 1963.

[Co'] COTLAR, M., *Sobre la teoría algebraica de la medida y el teorema de Hahn-Banach*, esta Revista, XXVII (1955), 9-24.

[GT] GLUSCHANKOF, D. y M.TILLI, *On some extension theorems in functional analysis and the theory of Boolean algebras*, por aparecer en esta Revista.

[LS] LUXEMBURG, W.A.J. y A.R.SCHEP, *An extension theorem for Riesz Homomorphisms*, Proc.Kon.Ned.Akad.Wet., A, 82 2 (1979), 145-154.

[Lu] LUXEMBURG, W.A.J., *Reduced powers of the Real Number System and equivalents of the Hahn-Banach Extension Theorem*, Int.Symp. on the Appl.of Model Theory to Algebra, Analysis and Probabilities, CIT, NY, 1967, 123-137.

[Pi] PINCUS, D., *Independence of the Prime Ideal Theorem from the Hahn-Banach Theorem*, Bull. A.M.S. 78 (1972), 766-770.

Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires.

Recibido en febrero de 1989.