Revista de la
Unión Matemática Argentina
Vol. 35 1990.

LA OBRA DE REY PASTOR EN GEOMETRIA Y TOPOLOGIA

L. A. SANTALO

REY PASTOR fue un espíritu eminentemente geométrico. Veía y captaba la matemática por los ojos y por esto la concebía y la transmitía como una obra de arte, enseñando a quererla y a gozarla. Aun en muchos de sus trabajos de Análisis (representación conforme) o de Algebra (método de Gräffe) aflora el sabor geométrico con su fragancia original del antiguo Egipto o de la clásica Grecia.

Claro que una parte grande de este espíritu debió ser congénita, pero también contribuyó, sin duda, la influencia contagiosa del medio. Veamos, someramente, el panorama de la matemática mundial al aparecer en escena la figura de Rey Pastor.

A principios del siglo XIX había nacido la Geometría proyectiva, por obra principalmente de Poncelet (1788-1867) *(Traité des Proprietés projectives des Figures, 1822)* y de Chasles (1793-1880) *(Traité de Géométrie Superieure, 1837)*. Por su belleza y como una reacción a la geometría en coordenadas de Fermat (1601-1665) y Descartes (1596-1650), potente pero pesada, la nueva geometría sintética, ligera y elegante, entusiasmó a los matemáticos, que se dedicaron a reconsiderar los conocimientos geométricos anteriores desde los flamantes puntos de vista. El apogeo de la nueva geometría se alcanzó con Cayley (1821-1899), al explicar proyectivamente las propiedades métricas de las figuras y acuñar la famosa frase: "La Geometría proyectiva es toda la Geometría". Casi al mismo tiempo nacieron las Geometrías no-euclidianas, por obra de Lobatchewski (1793-1856) *(Pangeometrie ou precis de géométrie fondée sur une theorie génerale et rigoureuse des paralleles, 1855*; anticipada en exposiciones menos conocidas de 1836 y 1840), de J. Bolyai (1802-1860) *(Ciencia absoluta del espacio, 1832)* y de Gauss (1777-1855) (cuyos trabajos al respecto no se publicaron hasta después de su muerte, pero fueron escritos alrededor de 1831).

Se planteó con ello el problema de repasar los fundamentos de toda la geometría, lo que dió lugar a varias construcciones axiomáticas necesarias para reemplazar la obra incompleta, aunque genial, de Euclides. Tales fueron las obras básicas de Staudt (1798-1867) *(Geometrie der Lage, 1847)* y Pasch (1843-1931) *(Vorlesungen über neuere Geometrie, 1882*, traducida al castellano por J. Alvarez Ude y Rey Pastor en 1912) entre otras, que culminaron con los *Grundlagen der Geometrie (1899)* de Hilbert (1862-1943).

Aparte de estas obras fundamentales, la literatura sobre Geometría proyectiva y su fundamentación axiomática, fue muy abundante durante la segunda mitad del siglo XIX y comienzos del presente. Acompañando a los muchos trabajos de investigación y como sedimento de las conquistas logradas por ellos, fueron apareciendo textos enciclopédicos, como los tres volúmenes de Reye (1838-1919) *(Die Geometrie der Lage, primera edición, 1866)* *(Introduzioni alla Geometria Proiettiva degli iper-spazi, 1906)* de E. Bertini (1846-1935), y otros más elementales y didácticos para uso de los primeros años universitarios, como los clásicos de Enriques (1871-1946) *(Lezioni di Geometria Proiettiva, 1904)*, F. Schur (1856-1932) *(Grundlagen der Geometrie, 1909)* y Veblen Young *(Projective Geometry, vol. I, 1910 y vol.* **II**, *Veblen solo, 1918)*, de todos los cuales hubo sucesivas ediciones.

No es de extrañar, por tanto, que este auge de la Geometría, que iluminaba el edificio matemático con nuevas luces, después de la preponderancia casi exclusiva del cálculo infinitesimal durante el siglo XVIII, y resucitaba con nuevos ímpetus y perspectivas los sabores y proyectos de la matemática griega, tuviera gran aceptación en todas partes. Tenía la ventaja, además, de ser un campo de la matemática en formación, y por tanto no difícil de incorporarse a él y poder contribuir con el esfuerzo propio a su crecimiento y desarrollo. En España, por ejemplo, hubo las notables contribuciones de Ventura Reyes Prosper *(Sur la Géométrie non Euclidienne, Math. Annalen, vol. 29, 1887, y Sur les propietés graphiques des figures centriques, Math. Annalen, vol. 32, 1888)* la segunda de ellas importante por demostrar sin necesidad de utilizar elementos ideales, el teorema de Desargues de los triedros perspectivos, y también que la geometría de las rectas y planos por un punto del espacio, puede ser identificada con la geometría del plano proyectivo real, siendo los puntos del plano las rectas del espacio y las rectas del plano los planos del espacio *(Coxeter, Non-euclidean Geometry, 3ra. edición, 1957, pág. 165).*

El exponente de la geometría proyectiva en España, durante los años finiseculares y comienzos del siglo actual, fue Eduardo Torroja, con su extenso tratado (816 páginas) titulado *Geometría de la Posición y sus Aplicaciones a la teoría de la Medida, Madrid, 1899,* y la hermosa publicación *Teoría Geométrica de la líneas alabeadas y de las superficies desarrollables (Madrid, 1904),* las cuales fueron importantes obras de consulta e inspiración para todos los matemáticos españoles de la época. Rey Pastor, que de estudiante en Zaragoza había recibido la información europea por intermedio de su maestro Zoel García de Galdeano, y con ella respirado los aires impregnados de Geometría Proyectiva que venían del otro lado de los Pirineos, se sintió cómodo al llegar a Madrid a cursar el Doctorado, y en su tesis doctoral y primer trabajo de envergadura fue de pura geometría *(Correspondencia de figuras elementales, 1910)* en el que generaliza el principio de correspondencia de Chasles, sentando el principio fundamental de que dos figuras de primera categoría relacionadas de tal manera que a cada elemento de la primera correspondan m de la segunda y a cada una de la segunda n de la primera (correspondencia (m,n)), si tienen la misma base real, tienen $m + n$ elementos de coincidencia, principio "cuya demostración en el estado actual de la Geometría no parece posible dentro de esta ciencia, mas esto no autoriza a dudar de su veracidad, pues su demostración algebraica legitima su empleo". Rey Pastor hace aplicación de este principio al estudio de las curvas y sus puntos singulares, en especial las cúbicas planas y las cuárticas alabeadas, iniciando el camino que desarrollará ampliamente en su *Teoría Geométrica de la Polaridad de 1912.* También hace algunas aplicaciones elementales que fueron incorporadas como problemas en la clásica y voluminosa obra francesa *Exercices de Géométrie de F.G.M. (5ta. edición, París, 1924).*

Durante la década 1910-1920, las obras fundamentales de Rey Pastor fueron de Geometría, a saber: *Fundamentos de la Geometría Proyectiva Superior*, premiada por la Real Academia Española de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, con el premio Duque de Alba en 1913 y publicada en 1916 (volumen de 444 páginas) y la *Teoría Geométrica de la Polaridad,* también premiada por la misma Real Academia en 1912, pero publicada muchos años más tarde, en 1929 (volumen de 294 páginas).

Los *Fundamentos* tuvieron muy buen éxito de crítica. L. Bieberbach los comenta en el *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik (vol. 46, pág. 480)* en los siguientes términos: "... brillante síntesis panorámica de las ideas y métodos de este dominio. Con frecuencia da nuevos resultados y en muchos casos nuevos métodos de demostración; muy especialmente su análisis comparativo de las diversas teorías de los elementos imaginarios ha sido exitosamente logrado. Por otra parte, hace progresar la teoría de las colineaciones con un algoritmo vectorial proyectivo. Introduce en la geometría muchos conceptos del análisis, como curvas analíticas, superficies de Riemann, representación conforme. También deseo hacer resaltar la bella demostración del principio de correspondencia de Chasles-Jonquieres".

Por su parte, J. Pères, en el *Bulletin des Sciences Mathématiques (Vol.42, 1918, págs. 61-67)* en una extensa y detallada crítica, dice entre otras cosas: "El autor hace gala de apreciables cualidades de claridad y finura en la exposición crítica de algunas teorías clásicas y en ciertas partes, por ejemplo en la teoría proyectiva de los hiperespacios, completa los trabajos de sus predecesores. Los capítulos en que el autor acomete el estudio, por métodos puramente sintéticos, de cuestiones tratadas hasta el presente tan solo por procedimientos analíticos, me parecen por demás interesantes. El estudio que hace de la proyectividad entre dos formas lineales complejas, mediante lo que llama la representación de Gauss, es notablemente más simple y más elegante que las teorías igualmente sintéticas de Staudt y Kötter. Lamento no poder dar una idea de las demostraciones que, en la parte final del libro, son muy personales. Si bien los métodos puramente sintéticos que utiliza el autor son actualmente inferiores a los métodos analíticos, no hay razón para dejar de lado tentativas como la presente que, aparte su curiosidad, pueden resultar fructíferas en el futuro".

La influencia de los *Fundamentos* en el campo de la geometría, puede juzgarse a través del estudio de F. Amodeo en su libro *Origine e Sviluppo della Geometria Proiettiva (1938)*, traducido al castellano por Nicolás y José Babini en las "Publicaciones del Instituto de Matemática de la Universidad Nacional del Litoral" (Rosario, Argentina, 1939, Vol. I, n° 3), principalmente en los capítulos dedicados a la geometría compleja, a la axiomatización de la geometría y al estudio particular de ciertos grupos de transformaciones como base de la geometría moderna.

El interés de los *Fundamentos* de Rey Pastor es doble. En primer lugar, dió un sistema de axiomas que mejoraron a los de Pasch y Schur en las obras ya citadas, para fundamentar rigurosamente la geometría proyectiva real. En aquellos tiempos, en que las estructuras algebraicas del Algebra Moderna todavía no estaban suficientemente difundidas ni sistematizadas, los razonamientos geométricos, supletorios de trasfondos algebraicos, debían ser sutiles y quedaban propensos a falta de rigor. Por otra parte, Rey Pastor introduce el razonamiento sintético en la geometría compleja. Había llamado mucho la atención de los geómetras de fines de siglo, en especial al español Eduardo Torroja, la manera como Staudt definía los pares de elementos imaginarios conjugados de la recta real como una involución elíptica, consiguiendo además individualizarlos mediante un sentido de la recta. Rey Pastor explota esta idea para llegar más allá, definiendo sintéticamente los hilos (curvas analíticas planas) y las cadenas de la geometría proyectiva del plano complejo, junto con la representación conforme proyectiva a través de la proyección estereográfica. También estudia el espacio de cualquier número de dimensiones complejo y consigue definir en el mismo, por vía sintética, las homografías y anti-homografías, deduciendo notables consecuencias.

Su dominio de la Geometría proyectiva, hizo que aparte del denso volumen de los *Fundamentos*, Rey Pastor siguiera publicando notas y dirigiendo algunas tesis doctorales en el mismo sentido. Cabe mencionar, por ejemplo, las tesis de Olegario Fernández Baños *(Estudio sintético de los espacios complejos de n dimensiones, Madrid, 1917)*, de Roberto Araujo *(Las curvas W, 1919)* y de J. M. Iñíguez Almech *(Sobre correspondencias, 1919)*. Complementos y aplicaciones de las ideas de los *Fundamentos* y sus relaciones con el programa de Erlangen de Klein, se encuentran en varias notas publicadas por Rey Pastor en distintas oportunidades (por ejemplo, en *Systematization de la Géométrie au moyen de la Theorie des Groupes, Scientia, Milano, 1918)*.

En la *Teoría Geométrica de la Polaridad*, se pone de manifiesto la vastedad de conocimientos y la claridad conceptual de Rey Pastor. El tema es importante, a pesar de que ya en su época, como el mismo autor reconoce en el prólogo "por su extrema dificultad y por cambio de rumbo en las investigaciones geométricas atraídas por otros problemas, ha sido abandonado casi totalmente, no solo desde el punto de vista del método, sino de los problemas mismos". La idea de fundar una teoría general de las curvas algebraicas sin ayuda de la geometría en coordenadas, prolongación natural de la exitosa teoría sintética de las cónicas, es debida a varios geómetras de la segunda mitad del siglo pasado: Chasles (1852), Jonquieres (1857), Cremona (1862) y Thieme (1878) entre otros. En 1884 y de nuevo en 1886, la Academia de Ciencias de Berlín propuso como tema de concurso para el premio Steiner, el estudio de una teoría puramente geométrica de las curvas planas algebraicas, siendo el premio concedido a Kötter *(Grundzüge eine rein geometrischen Theorie der algebraichen Curven, Berlín, 1887)*, quien estableció los fundamentos de una tal teoría mediante un estudio preliminar de la involución, llegando a la generación geométrica de las curvas por medio de haces proyectivos, pero sin entrar en la teoría de la polaridad. La obra de Rey Pastor llena esta laguna, sistematizando además muchos resultados anteriores. Basándose en resultados de Kötter, completados de manera adecuada, estudia la polaridad de curvas y haces de curvas, con las clásicas aplicaciones a las curvas covariantes, fórmulas de Plücker y a ciertas curvas especiales. Todo ello por vía sintética, dejando para el final, en un apéndice, la comprobación analítica de las propiedades demostradas geométricamente. Un análisis de la obra se encuentra en la *Sintesi storica-critica della Geometria delle curve algebrische (Cap. X) de F. Amodeo (1945)*.

Es importante señalar, por las perspectivas que todavía hoy permanecen vigentes, las consideraciones y puntos de vista que contiene el Cap. VI de la obra de Rey Pastor. Dice textualmente: "En la época en que se escribió la obra de Kötter, estaba en su infancia la tendencia crítica que caracteriza a la geometría actual; no es extraño, pues, no encontrar en ella ninguna referencia sobre la misma. Modernamente han adquirido tan extraordinario desarrollo las investigaciones entonces comenzadas, que en todo trabajo geométrico es casi forzoso dedicar algún espacio para aquilatar cual es su posición respecto de los fundamentos y sobre qué grupos de axiomas está edificado. Esta labor crítica no es posible en nuestra obra, por hallarse su argumento muy apartado de los fundamentos hasta ahora establecidos con rigor, los cuales no alcanzan más allá de lo necesario para construir la Geometría real de las figuras elementales. Sin embargo, ya que no sea factible esta edificación rigurosamente lógica, ni, por tanto, una interpretación literal de las condiciones impuestas en la convocatoria, hemos creído conveniente dedicar este capítulo al estudio de las relaciones existentes entre las teorías desarrolladas hasta aquí y los axiomas más importantes. Es sabido que cada uno de estos produce una bifurcación de la geometría en varias ramas, según se acepte o no. Así han nacido las geometrías no euclideanas, no arguesianas, no arquimedianas, etc. Un estudio completo de nuestro tema exigiría, pues, examinar cuáles propiedades son válidas para cada geometría y qué otras dejan de subsistir. Fácilmente se comprende cuán prematura es aún esta revisión. Nos limitaremos, pues, a señalar la amplitud del campo que se ofrece a la investigación y a emprender, por vía de ejemplo, este examen en un caso concreto, el que se deriva del axioma quinto de Euclides. Para lograr esto, empezaremos por exponer, en breve síntesis y a grandes rasgos, cómo se puede llegar rigurosamente a esta bifurcación de la geometría con sus propios recursos, analizando en los artículos siguientes la interpretación de los resultados generales hasta aquí obtenidos en cada una de las geometrías derivadas de la solución dada a la cuestión del paralelismo. Finalmente llegamos hasta la demostración de las más importantes propiedades métricas de las curvas en relación con la polaridad, sin acudir a los recursos analíticos con los cuales se obtenían hasta ahora".

Trata luego con detalle cómo puede estudiarse la teoría de las curvas planas algebraicas desde el punto de vista de la geometría no euclidiana (centros de simetría, diámetros, ejes, asíntotas y focos de una curva algebraica en la geometría no euclidiana) a través de la involución absoluta de la recta y del plano. En la segunda y tercera década del siglo actual se desarrolló la llamada Algebra Moderna y con ello se revolucionó toda la Geometría Algebraica, con la introducción en ella de los cuerpos de características finita y más tarde de otras estructuras vinculadas con la Topología. Toda la obra de Kötter y de Rey Pastor podría ser revisada a la luz de estos conceptos modernos. Ver, por ejemplo, los *Methods of Algebraic Geometry de Hodge y Pedoe, Cambridge, 1947*, así como otros trabajos más modernos de Zariski, H. Cartan, Serre, Thom, Grotendieck y Dieudonné.

Estas dos obras básicas de Rey Pastor, escritas en su juventud y antes de su derivación hacia el Análisis, entran en la Geometría proyectiva cuando esta rama estaba ya en decadencia y en vías de extinción, por haberse agotado, al parecer, todas sus posibilidades. Hemos visto como ello lo reconoció el mismo Rey Pastor al publicarse la *Teoría Geométrica de la Polaridad en 1929*. La Geometría proyectiva, al nivel mundial, tuvo una vida relativamente efímera, de poco más de un siglo, dentro de la historia de la matemática. Después de haber formado parte como tema obligado de estudio en las Facultades de Ciencias de todas las Universidades del mundo, llegó al agotamiento, por falta de ideas renovadoras y para dar paso al avance arrollador de las nuevas Algebra y Topología. A mediados del siglo actual, la Geometría proyectiva sintética desapareció prácticamente de todos los planes de estudio y los mismos textos, de tanto éxito en las décadas anteriores (como los de Pasch, Reye, Torroja, Enriques, Severi) fueron desapareciendo del mercado por agotarse las ediciones que no se volvieron a reeditar. Los profesores de Geometría proyectiva de las universidades, entre ellos el autor de estas líneas, tuvieron que pasar por el trance, no sin tristeza, de abandonar la enseñanza de una asignatura querida, que consideraban ejemplo de elegancia y perfección, pero que ya no encajaba en los nuevos rumbos de la matemática bourbakista. Es un ejemplo típico de una rama de la Ciencia, que al igual que cualquier ser viviente, en poco más de un siglo nació, floreció con excelentes y sabrosos frutos, y falleció por la seca de sus raíces y falta de perspectiva de su follaje, si bien dejando su impronta imperecedera en muchos brotes de la matemática posterior. Rey Pastor, aunque dándose cuenta del agotamiento de la geometría sintética fue derivando sus intereses hacia el Análisis, conservó siempre su primer amor por la proyectiva y así, a mediados de la década de los años treinta escribió una *Geometría Proyectiva* al estilo de los textos de Enriques y Severi, mejoradas por el tiempo y la sagacidad expositiva de Rey Pastor, que no llegó a salir a luz, por "haberse quemado la edición en su totalidad cuando en 1936, rojos, blancos y verdes se solazaban prendiendo incendios en la hermosa ciudad de Toledo" (ver *Julio Rey Pastor Matemático*, de Ríos-Santaló- Balanzat, Madrid, 1979, pág. 127). De la existencia de tal libro puede dar fe el autor de esta reseña, por haber colaborado en la corrección de pruebas en el Seminario Matemático de la calle del Duque de Medinacelli de Madrid, en los años 1934-35.

Por su dominio de la Geometría proyectiva, Rey Pastor estaba en condiciones ideales para explotar la interpretación proyectiva de las geometrías no euclidianas dada por F. Klein *(Ueber die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie, Math. Annalen 4, 1871, 573-621; también Math. Annalen 6, 1873, 112-145)*. Ya hemos mencionado como en su *Teoría Geométrica de la Polaridad* inicia la generalización a las geometrías no euclidianas de las propiedades algebraicas de las curvas planas. Interesante es el trabajo *Un teorema erróneo de la Geometría no euclidiana del triángulo* (Contribuciones al Estudio de las Ciencias, La Plata, Vol. II, 1918, No. 38) en el cual llama la atención sobre la necesidad de revisar toda la geometría del triángulo para ver cuáles son las propiedades que se conservan al pasar a las geometrías no euclidianas y cuáles no se conservan rebatiendo una afirmación de Schröder, recogida por F. Schur en sus ya citados *Grundlagen der Geometrie (1909)*, de que las relaciones existentes entre los puntos y rectas notables del triángulo son independientes del postulado de Euclides. El contraejemplo dado por Rey Pastor consiste en la demostración de que en general no es cierto, en las geometrías no euclidianas, que el punto de intersección de las medianas, el punto en que concurren las alturas y el punto en que se cortan las perpendiculares en los puntos medios de los lados, estén en línea recta (recta de Euler), lo cual (en las geometrías no euclidianas) vale únicamente para los triángulos isósceles. Rey Pastor termina proponiendo que se haga un estudio sistemático de las propiedades euclidianas que subsisten en el caso no euclidiano. Se trata de un campo elemental, pero interesante, en el que se pueden todavía cosechar seguramente atractivos resultados. La interpretación proyectiva de las propiedades métricas de las geometrías no euclidianas, conduce a veces a propiedades notables, como la señalada por Coxeter de que el hecho de que las tres bisectrices de un triángulo concurren en un punto es equivalente al clásico teorema de Brianchon referente a los exágonos circunscriptos a una cónica *(Coxeter, Non euclidian Geometry, 3ra. edición, 1957, pág. 200).*

Interesante es el trabajo *Sobre la equivalencia de poliedros* (Rev. Mat. Hispano-Americana, Vol. 7, 1925, 255-259) en el cual Rey Pastor trata el problema de Hilbert (Congreso Internacional de Matemáticos de París, 1900) sobre la existencia de poliedros de igual volumen pero no descomponibles en poliedros congruentes. El teorema dado por Rey Pastor dice: "Si dos poliedros P y P'son equivalentes (es decir, son descomponibles en poliedros congruentes), entonces la suma de las medidas de sus ángulos diedros interiores, contado cada uno un cierto número de veces, difieren en un número entero de ángulos llanos". De aquí se deduce, puesto que los ángulos diedros de los poliedros regulares (excepto el cubo) son inconmensurables, que ningún cubo puede ser equivalente a un poliedro regular distinto del mismo. Esta es una contribución al problema de Hilbert, referente al cual Dehn *(Ueber den Rauminhalt, Math. Annalen, 55, 1901, 465-478)* fue el primero en dar condiciones necesarias para que sea posible tal descomponibilidad, estando todavía por dilucidar si ellas son suficientes. Contribuciones más recientes e historia del problema pueden verse en el libro de *Hadwiger, Vorlesungen ueber Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie, Springer, Berlín, 1957.*

Aunque Rey Pastor no cultivó la Geometría Diferencial, dió varios cursos al respecto y publicó varias notas de interés, lo mismo que dejó sus huellas de planificador y hábil diagramador de textos, con ideas originales propias, en la *Geometría Integral* (en colaboración con Santaló, Buenos Aires, 1951) y en la *Geometría Analítica* (en colaboración con Santaló y Balanzat, Buenos Aires, 1955).

Respecto de la Topología, Rey Pastor, a través de cursos, conferencias y publicaciones, hizo aportes tanto a la topología combinatoria al estilo de Veblen (1880-1960) *(Analysis Situs, 1921),* como a la topología general en el sentido de Brouwer (1881-1966) y Frechet *(Sur quelques points du calcul fonctional, Rend. Circ. Mat. Palermo, 22, 1906, 1-74; Les Espaces Abstraits, París, 1928).*

Como generalización de los espacios métricos de Frechet, introduce Rey Pastor en 1940 los espacios D_0 (Rev. de Mat. y Fis. teórica de la Univ. Nac. de Tucumán, Vol. I, 1940, 105-124) en los que está definida una distancia xy que cumple los axiomas: a) $xy \geq 0$, b) $xx = 0$, c) $xz \leq xy + yz$, pero no exige la condición d) Si $xy = 0$, entonces $x = y$, ni la condición e) $xy = yx$, de los espacios métricos usuales. Los espacios D_0 que verifican las condiciones clásicas a), b), e) de los espacios de Riesz, no tienen porqué verificar la condición c) y, por tanto, no son en general espacios accesibles. Si a la distancia entre dos puntos se le obliga a ser nula únicamente cuando los puntos coinciden, pero no se le obliga a ser simétrica, se obtienen los espacios cuasimétricos de Wilson (1931) que verifican la condición c) de Riesz y son, por tanto, accesibles.

Rey Pastor hace una aplicación de los espacios D_0 a los espacios cuyos puntos son conjuntos de puntos de otro espacio, que se supone compacto, edificando una teoría que "viene a ser respecto de la doctrina general de los espacios, como el análisis funcional es respecto del análisis ordinario ... mediante la noción de distancia orientada, las relaciones de acumulación y convergencia encuentran su sencilla y natural expresión". Para introducir, a partir de la distancia no simétrica AB entre conjuntos, una distancia simétrica en el sentido usual, define la "distancia simétrica" de dos conjuntos A y B como la mayor de las distancias AB y BA. Con estos conceptos se generalizan los clásicos de acumulación, entorno, límite, etc. obteniendo resultados complementarios a trabajos de Nikodym (1930), Wilson (1931) y Kakutani (1936). Los espacios D_0 dieron lugar a varios trabajos de Balanzat (1941, 1945) en los cuales demuestra, entre otras cosas, la existencia de espacios D_0 que son separables y no perfectamente separables, estudiando también los conjuntos compactos y separables en los espacios D_0 de Rey Pastor.

Otra contribución de Rey Pastor a la Topología es una demostración del teorema de Jordan para variedades poliedrales cerradas del espacio de n dimensiones *(Teorema de Jordan para las variedades poliedrales cerradas, Revista de la Unión Mat. Argentina, Vol. 9, 1943, 89-95)* demostración ingeniosa y más simple que las conocidas anteriormente. Un detallado estudio de la demostración de Rey Pastor y su comparación con otras demostraciones de Severi (1931), Courant-Robbins (1941) y Whyburn (1942), haciendo resaltar sus méritos matemáticos y didácticos, ha sido hecho por Eladio Dominguez *(Contribución de Julio Rey Pastor al teorema de las curvas de Jordan, Actas del I Simposio sobre Julio Rey Pastor, Instituto de Estudios Riojanos, Logroño, 1983, págs. 175-183).*

Otro importante aporte de Rey Pastor a la Topología, es el trabajo sobre *Los últimos teoremas de Poincaré y sus Aplicaciones, (Memorias y Monografías de la Unión Mat. Argentina, Buenos Aires, Vol. 1, No.4, 1944).* Es bien sabido que el llamado último teorema de Poincaré consiste en lo siguiente: sea A el anillo circular limitado por dos circunferencias concéntricas c y C y sea H un homeomorfismo que transforma A en sí mismo de modo que c se transforma en c y C en C, sin puntos invariantes en c ni en C. Se supone que los sentidos de los homeomorfismos inducidos sobre c y C son opuestos y que H admite un invariante integral positivo. En tales condiciones, H admite por lo menos un punto invariante. El teorema fue enunciado, pero no demostrado, por Poincaré en 1912 *(Sur un theoreme de Géométrie, Rend. Circ. Mat. de Palermo, 33, 1912, 375-407)* y demostrado por Birkhoff en 1913 *(Proof of Poincaré's geometric theorem. Trans. Amer. Math. Soc. 14, 1913, 14-22)*, con una demostración indirecta, por reducción al absurdo. Posteriormente se dieron otras demostraciones y algunas generalizaciones por el mismo Birkhoff (1926, 1931), por Kerekjarto (1928) y por Scorza-Dragoni (1933) entre otras. La demostración de Rey Pastor tiene la ventaja de ser directa y constructiva y se basa en ideas ya esbozadas en su tesis doctoral para demostrar la existencia y hacer el cálculo de los puntos invariantes en las transformaciones continuas uniformes, aunque no sean biunívocas. Consiste el método en formar la función continua $w = f(z) - z$, donde $f(z)$ indica el transformado de z en el homeomorfismo dado, y aplicar la teoría del índice para determinar los ceros contenidos en un recinto por el método de las subdivisiones sucesivas, que tiene carácter constructivo. La única restricción inherente al método es la finitud del número de ceros, quedando excluido el caso de que haya infinitos puntos invariantes, en el cual, sin embargo, ya se verifica el teorema de Poincaré por la sola hipótesis.

Trata también Rey Pastor el llamado segundo teorema topológico de Poincaré, que afirma que, con las hipótesis mencionadas, en el anillo A existe una curva cerrada que circunda a la circunferencia interior y tal que no tiene punto común con su transformada por el homeomorfismo H. Hace luego Rey Pastor consideraciones sobre las aplicaciones clásicas del teorema de Poincaré al billar curvilineo (en particular al billar elíptico), a las cuerdas isoclinas de un óvalo y a la existencia de trayectorias periódicas descriptas por la sucesión de segmentos recorridos por un punto en sus reflexiones sucesivas sobre el contorno de una curva cerrada convexa.

Dada la versatilidad de Rey Pastor, que no le impidió, más bien ayudó, a profundizar en casi todos los campos de la matermática, principalmente en la Geometría y el Análisis, se comprende que la teoría de los espacios topológicos, de esencia geométrica, pero de aplicaciones fundamentales a la teoría de funciones analíticas, fuera uno de sus temas predilectos, sobre todo a partir de 1940. Hay que mencionar, como más notables, su *Teoría de los Espacios Topológicos (Ciencia y Técnica, Revista del Centro de Estudiantes de Ingeniería, Vol. 101, No. 494 y siguientes, 52 páginas, 1943)*, que quiere ser expositivo, pero que contiene novedosos e interesantes puntos de vista y la memoria *Funciones Complejas en Espacio Topológico (Revista de Matemáticas y Física Teórica de la Univ. Nacional de Tucumán, Vol. 4, 1944, 159-216)*, cuyo plan es "abordar el estudio general de las funciones complejas continuas definidas en espacio topológico y muy especialmente en superficies de género finito o infinito, aunque sin aspirar a la conservación de aquellos teoremas clásicos que ya dieron su máximo rendimiento, pero tratando clasificaciones muy amplias que permitirán estudiar sistemáticamente cualquier función continua, generalizando el concepto de variación acotada de Banach e introduciendo la riemanniana de cada función continua. Mientras en la teoría de Stoilow (1928 y 1938) el plano múltiple no difiere esencialmente del introducido por Riemann, y de él se deduce por homeomorfismo, en cambio, en esta teoría general, la diferencia es inmensa. Defórmese arbitrariamente una superficie cerrada cualquiera, de género finito o infinito, suprímase de ella recintos arbitrarios, suturando los contornos, redúzcanse curvas o continuos a puntos, operación que llamaremos estrangulamiento, y después de deformada así, con la sola condición de la continuidad, proyectémosla sobre el plano complejo w : he ahí la riemanniana de la función continua $w = f(z)$ definida sobre la superficie primitiva, que no es la más general de las funciones continuas. El área de este plano múltiple, sea finita o infinita, es la variación total de la función $f(z)$. La teoría que esbozamos puede considerarse como confluencia de dos tipos de generalizaciones: la que parte de las funciones analíticas (Pompeiu, Calugareanu, Kasner, Kondó,...) que ha sido muy cultivada entre nosotros, y la que prolonga la teoría de las funciones de variable real, como han hecho Banach, Cacciopoli, Schauder, Radó, Reichenfelder,... trasladando los conceptos de variación total, continuidad absoluta, etc". Más concretamente, dice también Rey Pastor "La teoría general de las funciones complejas de variable compleja coincide con la teoría de las correspondencias entre los puntos de dos planos o dos superficies esféricas. El estudio de estas funciones o de estas correspondencias geométricas ha sido hecho ya muy ampliamente en dos casos especiales: cuando la función o correspondencia es biunívoca y bicontinua, recibe el nombre de homeomorfismo y constituye el tema de la topología plana; cuando la correspondencia viene expresada por funciones $u(x,y)$, $v(x,y)$ derivables, su estudio forma parte de la geometría diferencial. La teoría de las funciones contimuas no biunívocas, expresada por funciones no diferenciables sobre un espacio topológico E_z, está todavía por elaborar y a ella se dedica esta memoria".

Parecería que colocándose en un punto de vista tan general, con la sola hipótesis de la continuidad, tendrían que ser pocos los resultados interesantes posibles. Sin embargo Rey Pastor logra algunos de ellos bien significativos. Por ejemplo, define el índice de un dominio respecto de un punto, que generaliza el residuo logarítmico de la clásica teoría de las funciones analíticas y también el índice de un punto, que generaliza en cierto modo el orden de multiplicidad del punto en la misma teoría clásica. El orden de multiplicidad es siempre igual o mayor que el índice. Hace una clasificación de los puntos de una función uniforme y continua (puntos regulares, de estricción, de retroceso, semiregulares,...) y analiza las propiedades de las funciones topológicas en un abierto (función continua que lo transforma en otro abierto), por ejemplo, prueba que si $f(z)$ es topológica en un espacio compacto toma en el mismo todos los valores, pero si el dominio no es compacto, cabe que el conjunto homólogo tenga frontera y sea acotado, lo que hace que el teorema de Liouville clásico pierda validez y deba considerarse como una de las propiedades básicas de las funciones analíticas que no subsisten para el tipo general de las funciones topológicas. Una función topológica en un dominio Z puede que no lo sea en otro dominio Z' contenido en Z, lo que induce a llamar funciones topológicas "regulares" en Z a las que también lo son en cada dominio contenido en Z. Estas funciones topológicas regulares coinciden con las transformaciones "interiores" de Stoilow, con lo cual la teoría de Rey Pastor viene a ser una extensión de las funciones estudiadas por ese matemático en varias memorias y en el libro *Leçons sur les principes topologiques de la théorie des fonctions analytiques, París, 1938.*

No hemos analizado los numerosos textos elementales (para la enseñanza media) que escribió Rey Pastor sobre geometría. En realidad, muchos de ellos estuvieron condicionados por los programas oficiales de la Argentina, a los que debían adaptarse, y también por las exigencias españolas, para cuya adaptación contó Rey Pastor con la valiosa colaboración de Puig Adam. De aquí las oscilaciones de los textos de Rey Pastor entre Geometría Racional (1926, 1927, 1933, 1934, 1935) y Geometría Intuitiva (1928, 1937, 1938, 1939), de los cuales son interesantes los prólogos, en los cuales Rey Pastor se justifica de las exageraciones hacia la abstracción o hacia la intuición que se ha visto obligado a adoptar. "Hemos procurado siquiera atenuar el peligro de la abstracción y huir del dogmatismo, esforzándonos en justificar el origen empírico de los postulados, sin perder contacto con la realidad física, donde tienen su origen las abstracciones matemáticas. Para que la enseñanza de la geometría merezca el dictado de racional, no basta que las demostraciones de los teoremas estén de acuerdo con las leyes lógicas de la razón, que nos conducen a admitirlos como **ciertos**; es preciso también que se llegue a los postulados por la vía psicológica que nos lleva de modo natural a admitirlos como **verdaderos**, lo cual concuerda con el origen histórico y etimológico de la geometría. En la geometría llamada abstracta se establecen los postulados como convenciones arbitrarias, sólo sujetas a la condición de compatibilidad. La demostración de esta compatibilidad, sin la cual carece de toda consistencia el edificio geométrico, exige recurrir a la geometría analítica abstracta. Pero aún admitida la compatibilidad, la introducción de tal sistema abstracto en la segunda enseñanza sería, como dice el profesor Pascal sobre asunto análogo, didácticamente equivocado, históricamente absurdo, conceptualmente hipertrófico y científicamente inútil".

Cuando, unos años más tarde, se pasó de la geometría abstracta a la geometría intuitiva, Rey Pastor escribió "Excelente orientación es, sin duda, la de abandonar por fin la fracasada enseñanza axiomática de la geometría, pero esta reacción, excesiva como todas las reacciones, ha ido más allá de lo justo y por salir de un mal ya reconocido, ha ido a caer en el opuesto". Esto prueba cuán difícil es, cuando se quiere pontificar de lo alto, sin consultas ni experiencias previas, mantenerse en el jústo medio en los proyectos educativos. Se trata de una tendencia bastante generalizada de ir de los programas a los textos, en vez de ir de los textos ya probados a los programas.

Dedicatoria :

No quisiéramos terminar esta reseña sin mencionar, sobre todo para las nuevas generaciones de matemáticos de habla hispana que no lo conocieron de manera directa, que la obra trascendental de Rey Pastor, no hay que buscarla tanto en su obra escrita, como en el entusiasmo por la investigación matemática que despertaba en los ambientes en que le tocó actuar y por la pasión contagiosa que irradiaba en sus cursos, conferencias y conversaciones particulares.

Algunos que no convivieron su actuación o no estuvieron bajo la influencia directa de su palabra, han criticado el estilo hagiográfico de algunas biografías de Rey Pastor escritas por sus discípulos directos, lo cual es cierto y, tal vez sea difícil de comprender por quienes no lo conocieron o trataron, que no podía ser de otra manera. La influencia desbordante de Rey Pastor sobre sus discípulos, no era tanto por lo que enseñaba, que aun siendo mucho podía haberse aprendido en los libros, suyos o de otros autores, sino por la atracción de su palabra incitando siempre a incursionar por la "terra incognita", en busca de novedades, con la angustia y el placer de la invención, templando los espíritus para la lucha con las dificultades de lo desconocido, todo ello con pasión y fanatismo. Entre ironías sutiles, anécdotas brillantes, verdades claras y palabras precisas, Rey Pastor despertaba la inteligencia y avivaba el sentimiento. "Un sabio sin vocación apasionada -decía- incapaz de sentir el latido heroico que acompaña a toda creación, es un alma en pena, un sacerdote sin fé".

En la matemática española y argentina, quedarán siempre bien marcadas las épocas de antes, durante y después de Rey Pastor. Antes, un mundo estancado, del cual los meritorios esfuerzos de unos pocos no bastaron para empujar el progreso general hacia niveles internacionales. Durante, en que Rey Pastor rompe las compuertas del estancamiento y abre de par en par las ventanas de nuestros ambientes a los aires frescos y vitalizadores de los países que iban a la vanguardia de la creación matemática, luchando a brazo partido para abrir bibliotecas, publicar revistas, crear instituciones, organizar intercambios e introducir la matemática como cosa viva en continua evolución y creación. Después, ya incorporada la matemática de habla hispana al movimiento universal, gracias a su obra, se inicia la marcha codo a codo de sus representantes con los matemáticos del mundo, con aportes originales al progreso general y buen conocimiento de los problemas que interesan y los métodos para su ataque.

Los matemáticos argentinos y españoles aprendieron de Rey Pastor el "oficio" de matemático, para convertirse en trabajadores que contribuyen a la construcción del edificio matemático, buscando novedades y transmitiendo a sus alumnos la llama del quehacer creativo "que no actúa a sueldo ni a destajo" sino que se siente estimulado por el afán y la curiosidad de conocer, buscando novedades por el solo placer de crear en el mundo de las ideas, placer que es la única, pero grande, recompensa.

Recibido por la U.M.A. el 16 de mayo de 1989 .-