Revista de la
Unión Matemática Argentina
Vol. 35 1990.

CONSECUENCIAS DEL TEOREMA "TOPOLOGICO" DE HELLY

BEATRIZ AMBROSIO

Abstract. The topological version of Helly's Theorem, published in 1930, remains almost unexploited, in constrast with its geometrical counterpart. The purpose of this paper is to use this remarkable theorem to obtain a new proof of Krasnoselsky's Theorem in the plane as well as several other results regarding finitely starshaped sets.

1. Introducción. Resultados básicos.

El teorema de Helly en su versión "topológica" [3] ha sido muy poco empleado, en contraste con la versión clásica [2], de la cual hay muchas extensiones, generalizaciones y aplicaciones. El propósito de este trabajo es dar una nueva demostración del teorema de Krasnoselsky en el plano, así como varios resultados acerca de conjuntos finitamente estrellados, utilizando esta versión "topológica" de Helly y una variante simplificada en el plano, demostrada por Molnár [5] en 1956.

Denotaremos con (x,y) al segmento abierto de extremos x e y. El agregado de uno o ambos extremos se indicará cambiando el paréntesis correspondiente por un corchete cuadrado. Diremos que x *ve* α y *vía* S si $[x,y] \subset S$. La *estrella de x en* S es el conjunto st (x,S) de todos los puntos de S que ven a x vía S. Diremos que $t \in S$ es un *punto radiante de* S si st (t , S) = S . El *mirador de* S es el conjunto de todos los puntos radiantes de S. Diremos que S es *estrellado* si mir S $\neq \emptyset$. En cambio, S será *finitamente estrellado* si para todo subconjunto finito $M \subset S$ existe un punto $x \in S$ que ve a cada uno de los puntos de M vía S. Precisamente, el estudio de los conjuntos finitamente estrellados que no son estrellados será el tema principal del último parágrafo de este trabajo. La cápsula convexa de S se denotará conv S. Un conjunto S es L_n (donde n es un número natural), si para cada par de puntos de S existe una poligonal de, a lo más, n lados que une dichos puntos y está incluida en S.

Salvo mención en contrario, los conjuntos que se definirán a continuación serán subconjuntos del espacio euclídeo n-dimensional $\mathbf{R}^n$. Diremos que S es *contráctil* si la aplicación idéntica de S en S es homotópica a la aplicación constante. Un subconjunto S del plano será *simplemente conexo* si toda curva cerrada en S es contráctil. Una *célula de homología* es un conjunto S compacto, no vacío y homológicamente trivial en todas las dimensiones, es decir que los grupos de homología de S son triviales en todas las dimensiones.

Vamos a enunciar a continuación tres teoremas importantes a los que haremos abundante referencia a continuación. El primer resultado es el conocido teorema de Helly sobre intersecciones de familias de conjuntos convexos. Es, seguramente, el teorema más importante de la Teoría de Convexidad. El segundo teorema también pertenece a E. Helly, y es una generalización topológica del primero. Es el resultado aludido en el título de esta nota. El tercer teorema es una versión simplificada del teorema "topológico" de Helly, demostrada por Molnár, y válida solamente en el plano.

Teorema 1.1 (Helly, [2]) *Sea F una familia de conjuntos convexos compactos de* $\mathbf{R}^n$ *que contiene por lo menos n + 1 miembros.Una condición necesaria y suficiente para que F tenga intersección no vacía es que todas las subfamilias de n + 1 miembros de F tengan intersección no vacía.*

Teorema 1.2 (Helly, [3]) *Sea F una familia de conjuntos de* $\mathbf{R}^n$ *tal que la intersección de cualquier subfamilia de hasta n elementos de F sea una célula de homología y la intersección de n+1 miembros de F sea no vacía. Entonces la intersección de todos los miembros de F es una célula de homología.*

Teorema 1.3 (Molnár, [5]) *Sea F una familia de conjuntos compactos y simplemente conexos del plano, tal que la intersección de cada dos elementos de F sea simplemente conexa, y la intersección de cada tres sea no vacía. Entonces la intersección de todos los elementos de F es no vacía.*

2 . Nueva demostración del teorema de Krasnoselsky en el plano.

El Teorema de Krasnoselsky, demostrado en 1946 [4], es un resultado central que permitió estructurar la Teoría de Conjuntos Estrellados. Enunciamos a continuación la versión bidimensional de este famoso teorema.

Teorema 2.1 (Krasnoselsky, [4]) *Sea* S *un subconjunto compacto del plano.* S *es estrellado si y solo si toda terna de puntos de* S *es visible vía* S *desde un punto común.*

Si observamos que el mirador de un conjunto es la intersección de las estrellas de sus puntos, resulta evidente que la demostración de este teorema se obtiene aplicando el teorema 1.1 a la familia de las estrellas de los puntos de S. Sin embargo, dichas estrellas pueden no ser convexas. Krasnoselsky resuelve la dificultad técnica mediante el siguiente lema, de demostración engorrosa.

Lema 2.2 (Krasnoselsky, [4]) *Sea* S *un subconjunto cerrado del plano,* $x \in \mathbf{R}^2$ *e y* $\in$ S *tales que* [x,y] *no está incluído en* S. *Entonces existe un punto* z $\in$ S *y una recta que pase por* z *y separe a* x *de* st(z,S).

Este lema implica de manera casi inmediata que mir S es la intersección de todos los conjuntos K_x= conv (st (x,S)) con x $\in$ S. Estos conjuntos son claramente convexos y compactos, y el teorema 1.1 resulta aplicable a dicha familia. Sin embargo, resulta natural preguntarse si no será posible obtener el teorema 2.1 aplicando directamente el teorema 1.2 a la familia de estrellas de puntos de S. Eso es precisamente lo que haremos en el resto de este parágrafo.

Lema 2.3 *Sea* S *un subconjunto compacto del plano tal que toda terna de puntos de S es visible vía* S *desde un punto común. Entonces* $\forall$ x $\in$ S *es* st(x,S) *un conjunto compacto y simplemente conexo. Más aún, para todo par* {x ; y} $\subset$ S *la intersección* st(x,S) $\cap$ st(y,S) *es simplemente conexa.*

Demostración: De la compacidad de S se deduce de inmediato la compacidad de st(x,S), cualquiera sea x $\in$ S. Sea C una curva simple cerrada incluída en st(x,S), A la región abierta y acotada encerrada por C, y z $\in$ A. Denotemos L (x,z) a la recta que pasa por x y por z. Entonces la intersección C $\cap$ L(x,z) contiene al menos dos puntos z_1 y z_2 tales que z está entre z_1 y z_2. Además, como estos puntos están en la estrella de x, resulta que $[z_1,x] \subset$ S y $[z_2,x] \subset$ S. Pero z debe estar contenido en uno de esos dos segmentos, luego [z,x] $\subset$ S. Esto a su vez implica que A $\subset$ st(x,S), de donde se deduce que st(x,S) es simplemente conexa. Análogamente, si C es una curva simple cerrada incluída en la intersección st(x,S) $\cap$ st(y,S), la región abierta y acotada A encerrada por C estará incluída tanto en st(x,S) como en st(y,S), y por lo tanto en su intersección. Entonces, dicha intersección resulta ser simplemente conexa.

Demostración del teorema 2.1: Es claro que si S es estrellado toda terna de puntos de S es visible desde cualquier punto del mirador. Recíprocamente, si se cumple la condición de Krasnoselsky para las ternas de puntos de S, dicho conjunto satisface las hipótesis del Lema 2.3. Pero entonces, la familia

$$F = \{ \mathrm{st}\,(x,S) \mid x \in S \}$$

cumple las hipótesis del teorema 1.3 de Molnár, luego la intersección de todos los miembros de F es no vacía, y por lo tanto S será estrellado.

3 . Nueva demostración de un resultado de M. Breen.

Observemos que en la demostración del teorema "topológico" 1.2 de Helly en el plano, o lo que es lo mismo, el teorema 1.3 de Molnár, la hipótesis de compacidad de los elementos de la familia solo se usa para a) Asegurar que los elementos de F y las intersecciones de pares de esos elementos sean conexos por arcos; b) Aprovechar la propiedad de intersección finita de los conjuntos compactos para asegurar que la intesección de todos los elementos de F sea no vacía. Por lo tanto, si aplicamos una demostración análoga a la de dicho teorema es posible probar el siguiente resultado:

Lema 3.1 *Sea F una familia de conjuntos simplemente conexos del plano tal que la intersección de cada par de miembros de F sea simplemente conexa y conexa por arcos, y la intersección de cada terna de miembros de F sea no vacía. Entonces la intersección de cualquier subfamilia finita de F es no vacía.*

Veamos un sencillo resultado preparatorio que nos permitirá aplicar el lema previo a la familia de estrellas de puntos de un conjunto finitamente estrellado para obtener una nueva demostración del teorema de M. Breen aludido en el título de este parágrafo.

Lema 3.2 *Sea* S *un conjunto simplemente conexo del plano. Entonces la intersección de las estrellas de dos puntos cualesquiera de* S *es un conjunto* L_2.

Demostración: Sean $x_1 \in S$, $x_2 \in S$, $S_{12} = \mathrm{st}(x_1 , S) \cap \mathrm{st}(x_2 , S)$, $y \in S_{12}$, $z \in S_{12}$, L(z,y) la recta determinada por estos dos puntos. Debemos determinar una poligonal de, a lo sumo, dos segmentos que tenga un extremo en z y el otro en y, y que esté incluída en S_{12}. Si $[y,z] \subset S_{12}$ no hay nada que demostrar. Consideremos entonces tres alternativas: (i) x_1 y x_2 están en distintos semiplanos respecto de L (z,y). Llamemos

$$p = [x_1 , z] \cup [z , x_2] \cup [x_2 , y] \cup [y , x_1] .$$

Esta poligonal es una curva simple cerrada incluida en S_{12} y , a fortiori, en S que es simplemente conexo. Por lo tanto, si llamamos A a la región abierta y acotada encerrada por p , resulta que $[y,z] \subset A$ que a su vez está incluída en S. Razonando de la misma forma con la poligonal $p_1 = [x_1 , y] \cup [y , z] \cup [z , x_1]$ obtenemos que

$$[y , z] \subset \mathrm{conv}\,(\{x_1 ; y ; z\}) \subset \mathrm{st}\,(x_1 , S) .$$

Si en este último argumento sustituímos x_1 por x_2 todo sigue siendo válido. La conjunción de las dos conclusiones implica que $[y,z] \subset S_{12}$.

(ii) x_1 y x_2 están en el mismo semiplano respecto de L(y,z) y uno de los dos puntos con subíndice está en la cápsula convexa de los otros tres puntos. Supongamos, sin restricción de generalidad, que

$$x_2 \in \text{conv}(\{x_1 ; y ; z\}).$$

Designando con p y A a los conjuntos definidos en la alternativa anterior, resulta que $A \subset S$ y $([y, x_2] \cup [x_2, z]) \subset S_{12}$.

(iii) x_1 y x_2 están en el mismo semiplano respecto de L(y,z), pero además vale $(y, x_1) \cap (z, x_2) \neq \emptyset$ o bien $(y, x_2) \cap (z, x_1) \neq \emptyset$. Sin restricción de generalidad, supongamos que $\exists$ w $\in (y, x_2) \cap (z, x_1)$. La poligonal $[x_1, w] \cup [w, y] \cup [y, x_1]$ es una curva cerrada en S. Por lo tanto conv $(\{y ; w ; x_1\}) \subset S$. Esto implica que $[y, w] \subset \text{st}(x_1, S)$. Pero por construcción vale $[y, w] \subset [y, x_2] \subset \text{st}(x_2, S)$. Entonces $[y, w] \subset S_{12}$. Con un razonamiento análogo resulta que $[w, z] \subset S_{12}$. En definitiva, la poligonal $[y, w] \cup [w, z]$ está incluída en S_{12}.

Teorema 3.3 (M. Breen, [1]) *Sea S un subconjunto del plano que verifica int cl* S - S = $\emptyset$. *S es finitamente estrellado si y solo si toda terna de puntos de* S *es visible vía* S *desde un punto común.*

Demostración: En un lema previo a la demostración de su teorema, M.Breen prueba que si S es un subconjunto del plano con las hipótesis del presente teorema, S es simplemente conexo. Usando este resultado es posible aplicar el Lema 3.2 al conjunto S. Por lo tanto la intersección de las estrellas de dos puntos cualesquiera de S es conexa por arcos. Razonando como en el Lema 2.3 (donde la compacidad no se usa en la última parte de la demostración) resulta que en S cada estrella es simplemente conexa, y la intersección de dos estrellas cualesquiera también lo es. Entonces la familia

$$F = \{ \text{st}(x,S) \mid x \in S \}$$

satisface las hipótesis del Lema 3.1. Por lo tanto, toda subfamilia finita de F tiene intersección no vacía. Pero esto es lo mismo que afirmar que S es finitamente estrellado.

4. Conjuntos finitamente estrellados.

Sea $S \subset \mathbf{R}^n$, $p \in S$. Diremos que S tiene *visibilidad acotada en* p si el conjunto st (p,S) es acotado. S tiene *visibilidad acotada* si tiene visibilidad acotada en cada uno de sus puntos. Denotaremos con S_{n-1} a la superficie esférica unitaria centrada en el origen.

Teorema 4.1 *Sea* S *un conjunto cerrado, estrellado y no acotado de* $\mathbf{R}^n$, *y* x *un punto radiante de* S. *Entonces existe una semirrecta con origen en* x *e incluída en* S.

Demostración: Sea $x \in$ mir S. Para cada $u \in S_{n-1}$ se puede definir

$$p(u) = \sup \{\lambda > 0 \mid x + \lambda u \in S\}.$$

Supongamos que S no contiene semirrectas con origen en x. Entonces, para todo $u \in S_{n-1}$ vale $p(u) < +\infty$. Ahora bien, como S no es acotado,

$$\forall k \in \mathbf{N} \; \exists \, u_k \in S_{n-1} \text{ tal que } \rho(u_k) > k.$$

Como S_{n-1} es compacta, existe al menos un punto u_0 de acumulación de la sucesión $\{u_k\}$. Pero $p(u_0) = p < +\infty$. Sea $z_k = x + 2p\, u_k$. A partir de un cierto índice k en adelante la sucesión $\{z_k\}$ está en S, y el punto $z_0 = x + 2\, p\, u_0$ es un punto de acumulación de dicha sucesión. Pero, por construcción, z_0 no pertenece a S. Esto contradice el hecho de ser S cerrado. Entonces existirá al menos un $u \in S_{n-1}$ tal que $\rho(u) = +\infty$. Entonces

$$\{y \in \mathbf{R}^n \mid y = x + \lambda\, u \text{ con } \lambda \in \mathbf{R}^+\}$$

es una semirrecta con origen en x e incluída en S.

Corolario 4.2 *Sea S un subconjunto cerrado de* $\mathbf{R}^n$. *Las siguientes proposiciones son equivalentes:*

(i) S *tiene visibilidad acotada.* (i i) S *no incluye semirrectas.*

Demostración: (i) ⇒ (i i). Si S incluyera una semirrecta, la estrella del origen de dicha semirrecta no sería acotada, contradiciendo (i) . (i i) ⇒ (i) . Para todo $x \in S$, st(x , S) es un conjunto cerrado, estrellado y que no contiene semirrectas. Por el contrarrecíproco del Teorema 4.1 resulta que st(x,S) debe ser acotado.

Corolario 4.3 *Sea* K *un conjunto convexo y cerrado de* $\mathbf{R}^n$. K *no es acotado si y solo si* K *contiene al menos una semirrecta con origen en cada uno de sus puntos.*

Demostración: Es evidente que si K contiene una semirrecta no es acotado. Recíprocamente, como K es convexo, mir K = K. Aplicando el Teorema 4.1 al conjunto K resulta la existencia de una semirrecta con origen en cada punto de K, e incluída en K.

Teorema 4.4 *Sea* S *un subconjunto de* $\mathbf{R}^n$, *cerrado, finitamente estrellado y de visibilidad acotada. Entonces* S *es compacto y estrellado.*

Demostración: Sea $F = \{st(x, S) \mid x \in S\}$. Como S es de visibilidad acotada y cerrado, cada miembro de F resulta compacto. Pero como S es finitamente estrellado, toda subfamilia finita de F tiene intersección no vacía. Por la propiedad de intersección finita de los conjuntos compactos, la intersección de todos los miembros de F resulta ser no vacía. Es decir que S es estrellado. Sea x un punto radiante de S. Entonces S = st(x , S) que es un compacto.

Corolario 4.5 *Un conjunto de* $\mathbf{R}^n$ *que sea cerrado, finitamente estrellado y no acotado debe incluir semirrectas.*

Demostración: Si S no incluyera semirrectas resultaría de visibilidad acotada por el Corolario 4.2. Pero en tal caso se podría aplicar el Teorema 4.4 y S sería compacto, contradiciendo una de las hipótesis.

Vamos a terminar esta nota con un resultado que mejora el Teorema de Krasnoselsky en el plano, enunciado aquí como Teorema 2.1.

Teorema 4.6 *Sea* S *un subconjunto cerrado del plano que no incluye semirrectas.* S *es estrellado si y solo si toda terna de puntos de* S *es visible vía* S *desde un punto común.*

Demostración: Si S es estrellado, la condición de Krasnoselsky se cumple trivialmente. Recíprocamente, sea S un conjunto cerrado, sin semirrectas y que verifica la condición de Kràsnoselsky sobre visibilidad de ternas. Entonces int cl S - S = ∅ y el Teorema 3.3 de Breen es aplicable. Luego S resulta ser finitamente estrellado. Pero además S debe ser de visibilidad acotada según el Corolario 4.2. Es decir que estamos precisamente en las hipótesis del Teorema 4.4. Luego S es estrellado.

Referencias

[1] BREEN, M. *Clear visibility, starshaped sets and finitely starlike sets*, J. of Geometry 19 (1982) 183-196.

[2] HELLY, E. *Uber Mengen konvexer Korper mit gemeinschaftlichen Punkten*, Jber. Deustch. Math. Verein. 32 (1923) 175-176.

[3] HELLY, E. *Uber Systeme abgeschlossener Mengen mit gemeinschaftlichen Punkten, Monatsh. Math. 37 (1930) 281-302.*

[4] KRASNOSELSKY, M. A. *Sur un critére pour qu' un domain soit etoilé*, Mat. Sb. (61) 19 (1946), 309-310.

[5] MOLNAR, J. *Uber eine Verallgemeinerung auf die Kugelflache eines topologischen* Satzes von Helly, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 7 (1956), 107-108.

Departamento de Matemática
Universidad de Buenos Aires
Pabellón 1, Ciudad Universitaria
(1428) Buenos Aires, ARGENTINA

Recibido por U.M.A. el 16 de mayo de 1989.