

**MODELOS HIDRODINAMICOS UNIDIMENSIONALES CON
ESTRUCTURAS ESPACIALES COMPLEJAS**

PABLO MIGUEL JACOVKIS

Resumen . Una red fluvial compleja puede representarse con un grafo en el cual los nodos son los extremos abiertos de la red y los puntos de confluencia de tres tramos fluviales, que según el sentido del flujo serán dos afluentes y un efluente o un afluente y dos efluentes. Los arcos del grafo serán los tramos fluviales existentes entre nodos. Las ecuaciones del flujo son las ecuaciones diferenciales $\partial w / \partial t + A \partial w / \partial x = 0$ con $t \geq 0$, $x \in a$, a arco del grafo, $w = (w_1(t,x), w_2(t,x))$; para simplificar el análisis el sistema se considera homogéneo y con matriz A de orden 2 con coeficientes reales y constantes y con autovalores reales distintos. Estos sistemas están sujetos a condiciones iniciales en cada arco a , a condiciones de contorno en extremos abiertos de la red, y a condiciones de compatibilidad en cada confluencia. Demostraremos que si los autovalores de A son de distinto signo, existe una solución única suave del problema diferencial para ciertas condiciones iniciales y de compatibilidad, y ciertas condiciones de contorno de cada uno de los extremos abiertos de la red. Analizaremos también los problemas que se presentan si los autovalores tienen el mismo signo y para sistemas de orden mayor que 2.

Abstract. A complex fluvial network may be represented by means of a graph where the vertices are the open extreme points of the network and the junction points of three fluvial reaches. According to the direction of the flow two reaches will be tributaries or two reaches will be effluents. The arcs of the graph will be the reaches between vertices. The flow equations are the differential equations $\partial w / \partial t + A \partial w / \partial x = 0$ where $t \geq 0$, $x \in a$, a arc of the graph, $w = (w_1(t,x), w_2(t,x))$; in order to simplify the analysis the differential system will be considered homogeneous and A will be a real constant matrix of order 2 with real different eigenvalues. These systems are subject to initial conditions in each arc a , to boundary conditions in open extreme points of the network, and to compatibility conditions at the junctions. If the eigenvalues have different sign we will prove that a unique smooth solution exists for certain initial and compatibility conditions with boundary conditions in each open extreme point. The situations in which both eigenvalues have the same sign and the order of the system is greater than 2 will also be studied.

1. Introducción

Supongamos tener una red fluvial unidimensional compleja, es decir, un conjunto de tramos de ríos o canales en cada uno de los cuales se considera un flujo unidimensional no estacionario de agua de modo que cada tramo comienza y termina en un extremo abierto de la red o en un punto donde se produce una confluencia, o sea en un punto donde dos tramos afluyen a un tercero o un tramo se bifurca en dos, dependiendo del sentido del flujo (ver figura 1). Equivalentemente, se puede decir que la red fluvial es un grafo dirigido (el sentido está dado por el sentido del flujo) cuyos nodos son los extremos abiertos de la red y los puntos de confluencia de tres tramos fluviales. Los extremos de la red son los nodos del grafo cuyo grado de entrada es 0 (extremos abiertos aguas arriba) o cuyo grado de salida es 0 (extremos abiertos aguas abajo). Los extremos

abiertos tienen grado 1; los demás nodos tienen grado 3: el grado de entrada es 2 (y el de salida 1) cuando dos tramos afluyen a un tercero, y el grado de entrada es 1 (y el grado de salida es 2) cuando un tramo se bifurca en dos. Los tramos fluviales simples son los arcos del grafo. Si el flujo es gradualmente variado y puede ser representado mediante las ecuaciones de aguas poco profundas sobre superficie libre y fondo fijo, se tendrá (ver Stoker [1957]) un sistema de dos ecuaciones hiperbólicas casilineales en cada uno de los tramos de la red fluvial, usualmente llamadas de Saint-Venant en homenaje a quien primero las planteó (Saint-Venant [1871]). En su forma completa, esas ecuaciones son

$$(1.1) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial z}{\partial x} + g \frac{Q |Q|}{D^2} = 0$$

$$(1.2) \quad \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$$

donde $S = S(Z(t, x), x)$ es la sección transversal mojada en el instante t en el punto x , $Q = Q(t, x)$ es el caudal, $u = u(t, x) = Q/S$ es la velocidad media del agua en el sentido del eje longitudinal del cauce, g es la aceleración de la gravedad, $Z = Z(t, x)$ es la altura de la superficie libre del agua a partir de un plano de referencia, y $D = D(Z(t, x), x)$ es un indicador de resistencia llamado coeficiente de conducción (ver figura 2). Naturalmente serán necesarias condiciones iniciales sobre las dos funciones que se consideren como incógnitas y de las cuales dependen las demás. Se pueden elegir, por ejemplo, Z ó S y u ó Q .

De cualquier manera queda planteado vectorialmente un sistema

$$(2) \quad \partial w / \partial t + A(w) \partial w / \partial x = g(w, x)$$

siendo $w = (w_1(t, x), w_2(t, x))$, y cuyos autovalores son $\lambda_{1,2} = u \pm \sqrt{gS/B}$, con

$$B = B(Z(t, x), x) = dS / dz$$

el ancho de la superficie libre. El sistema (2) es casilineal y estrictamente hiperbólico (es decir, tiene dos autovalores reales y distintos) para $S > 0$.

Cuando se analiza un tramo fluvial aislado es necesario dar condiciones de contorno sobre uno o ambos extremos del tramo (el extremo aguas arriba y el extremo aguas abajo) y se tiene un problema mixto (con condiciones iniciales y de contorno). Si los autovalores tienen distinto signo será necesario prescribir una condición de contorno en cada extremo (ver por ejemplo Rozdestvenskii y Janenko [1983]) y estaremos en el caso de régimen subcrítico; si los autovalores tienen el mismo signo será necesario prescribir ambas condiciones de contorno en el extremo aguas arriba, y estaremos en el caso supercrítico.

Para redes fluviales complejas es necesario dar las condiciones de compatibilidad en las confluencias. De acuerdo a Stoker, éstas serán

$$(3.1) \quad Q(t, x_i) \pm Q(t, x_j) = Q(t, x_k)$$

$$(3.2) \quad Z(t, x_i) = Z(t, x_j) = Z(t, x_k)$$

donde el signo positivo en (3.1) indica que x_i y x_j son extremos aguas abajo de dos tramos que afluyen a un tercero del cual x_k es extremo aguas arriba, y el signo negativo indica que x_i es extremo aguas abajo de un tramo que se bifurca en dos cuyos extremos aguas arriba son x_j y x_k . Ambos casos se pueden ver en la figura 1. A una confluencia indicativa de dos tramos que afluyen a un tercero la llamaremos *punto de afluencia*, y a una bifurcación *punto de efluencia*. Es decir,

volviendo a la terminología de grafos, un punto de afluencia es un nodo tal que su grado de entrada es 2 y su grado de salida es 1, mientras que un punto de efluencia es un nodo tal que su grado de entrada es 1 y su grado de salida es 2.

(3.1) es simplemente la ecuación de conservación de la masa .

(3.2) es una simplificación de la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento. Una deducción de (3.2) es su forma más detallada puede verse en Li *et al.* [1983]; las ecuaciones planteadas en dicho trabajo son

$$(3.2') \quad Z(t, x_k) - Z(t, x_j) = (u(t, x_k) + u(t, x_j)) \cdot (u(t, x_j) - u(t, x_k)) / (2g)$$

$$Z(t, x_k) - Z(t, x_j) = (u(t, x_k) + u(t, x_j)) \cdot (u(t, x_j) - u(t, x_k)) / (2g)$$

Se observa que si las velocidades son "razonables", (3.2) es una buena aproximación de (3.2').

Si se considera el caso sencillo de un canal de sección transversal rectangular de ancho constante unitario, con pendiente de fondo nula, y sin considerar el término de resistencia, se llega a las ecuaciones

$$(4.1) \quad \partial u / \partial t + u \partial u / \partial x + g \partial h / \partial x = 0$$

$$(4.2) \quad \partial h / \partial t + h \partial u / \partial x + u \partial h / \partial x = 0$$

donde ahora $h = h(t, x)$ indica la altura desde el fondo del canal, a la cual habrá que agregar las condiciones iniciales

$$(5) \quad h(0, x) = h_0(x) \quad u(0, x) = u_0(x)$$

y las ecuaciones de compatibilidad, que en este caso serán

$$(6.1) \quad u(t, x_j) \pm u(t, x_i) = u(t, x_k)$$

$$(6.2) \quad h(t, x_j) = h(t, x_i) = h(t, x_k)$$

Estas ecuaciones son las usualmente denominadas de aguas poco profundas, y, si bien representan situaciones simplificadas, tienen la ventaja de ser equivalentes a las ecuaciones isentrópicas de dinámica de gases politrópicos, sobre las cuales se ha investigado mucho, tanto en física experimental como desde el punto de vista de las ecuaciones hiperbólicas casilineales (que se pueden expresar en forma de leyes de conservación vectoriales), y en este caso tanto teórica como numéricamente. En particular, el caso subcrítico de las ecuaciones de aguas poco profundas corresponde al caso subsónico en dinámica de gases y el caso supercrítico al caso supersónico.

El problema que se plantea en modelización fluvial de redes complejas, tanto de tipo arborescente (cuencas fluviales) como deltaico, y que puede extenderse al caso de modelización de flujo en cañerías, es qué condiciones de contorno es necesario prescribir, y dónde. En este trabajo analizaremos las ecuaciones diferenciales (4), (5), (6) en forma simplificada, es decir, consideramos un sistema diferencial lineal.

$$(4') \quad \partial w / \partial t + A \partial w / \partial x = 0$$

con $w = (u, h)$, siendo A la matriz real con coeficientes constantes

$$\begin{bmatrix} U & g \\ H & U \end{bmatrix}$$

donde los coeficientes U y H son valores "representativos" de u y h , respectivamente, tales que $U^2 \neq gH$. En este caso, los autovalores de A son $U \pm \sqrt{gH}$. Demostraremos que en régimen subcrítico ($U^2 < gH$) es necesario dar una condición de contorno en cada extremo abierto de la red para que exista solución única suave dadas condiciones iniciales suaves; generalizaremos las condiciones de contorno y compatibilidad admisibles, y estudiaremos los problemas que se presentan en régimen supercrítico ($U^2 > gH$) y cuando el sistema diferencial es de orden mayor que dos (por ejemplo, cuando se considera que el fondo puede variar debido al arrastre de material, para lo cual es necesario añadir una tercera ecuación, de continuidad de la masa sólida).

2. El caso subcrítico

Comenzaremos demostrando el teorema básico de este trabajo.

Teorema 1.: *Sea una red fluvial compleja. Entonces el problema (4'), (5), (6), con condiciones de contorno*

$$(7) \quad b_{1,L} \cdot w = b_{1,L} u(t, x_L) + b_{2,L} h(t, x_L) = f_L(t)$$

en cada uno de los extremos abiertos x_L de la red tiene solución única $w \in C^1$ en cada tramo simple que constituye la red fluvial, siempre que w_{M110} y f_L (para todo extremo abierto x_L) sean C^1 y consistentes con las condiciones iniciales en $Dt = 0$, A tenga autovalores reales distintos y de distinto signo $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$, y $b_{1,L}$ y $b_{2,L}$ sean variables binarias 0/1 tales que su suma de 1. La solución existe para todo $t > 0$.

Demostración:

Sea $\Lambda = S^{-1}AS$, con Λ matriz diagonal de los autovalores y $S = (s_{ij})$ matriz de transformación de A en Λ . Sea $y = (v, z)$ tal que $w = Sy$. El problema (4'), (5), (6), (7) equivale entonces al problema de encontrar la solución de

$$(8) \quad \partial v / \partial t + \lambda_1 \partial v / \partial x = 0$$

$$\partial z / \partial t + \lambda_2 \partial z / \partial x = 0$$

con condiciones iniciales

$$(9) \quad y_0(x) = y(0, x) = S^{-1} w_0(x)$$

condiciones de contorno

$$(10) \quad b_L \cdot Sy(t, x_L) = c_L \cdot y(t, x_L) = c_{1,L} v(t, x_L) + c_{2,L} z(t, x_L) = f_L(t)$$

y condiciones de compatibilidad

$$(11) \quad s_{11} v(t, x_i) + s_{12} z(t, x_i) + s_{11} v(t, x_j) + s_{12} z(t, x_j) \\ - s_{11} v(t, x_k) - s_{12} z(t, x_k) = 0$$

$$s_{21} v(t, x_i) + s_{22} z(t, x_i) - s_{21} v(t, x_j) - s_{22} z(t, x_j) = 0$$

$$s_{21} v(t, x_i) + s_{22} z(t, x_i) - s_{21} v(t, x_k) - s_{22} z(t, x_k) = 0$$

Para cada tramo simple m de extremos (x_{m1}, x_{m2}) con $x_{m1} < x_{m2}$ sea $T_m > 0$ tal que $x_{m1} - \lambda_1 T_m < x_{m2}$ y tal que $x_{m1} < x_{m2} - \lambda_2 T_m$, es decir, las características que llegan a los extremos se originan en el mismo tramo en el instante inicial. Sea $0 < T = \min_m T_m$, y sea $0 < t < T$:

Tomemos un punto extremo abierto aguas arriba x_L . Se tiene

$$c_{1,L} v(t, x_L) + c_{2,L} z(t, x_L) = f_L(t)$$

Supongamos que $c_{2,L} \neq 0$. Definimos $v(t, x_L) = v_0(x_L - \lambda_1 t)$, que está en el mismo tramo simple pues $t < T$, y por lo tanto $z(t, x_L) = (f_L(t) - c_{1,L} v(t, x_L)) / c_{2,L}$. Sea ahora un extremo abierto aguas abajo x_B . Se tiene

$$c_{1,B} V(t, x_B) + c_{2,B} z(t, x_B) = f_B(t)$$

y definiendo

$$z(t, x_B) = z_0(x_B - \lambda_2 t)$$

obtenemos también el valor de $v(t, x_B)$, siempre que $c_{1,B} \neq 0$. Dejaremos para el final la demostración de que $c_{2,L} \neq 0$ si x_L es un extremo abierto aguas arriba y $c_{1,B} \neq 0$ si x_B es el extremo abierto aguas abajo.

Sea ahora una confluencia $\{x_i, x_j, x_k\}$, donde x_i y x_j son extremos aguas abajo de tramos simples m_i, m_j , afluentes al tramo m_k cuyo extremo aguas arriba es x_k ; es decir, un punto de afluencia, según la terminología antes adoptada. Definimos $z(t, x_i) = z_0(x_i - \lambda_2 t)$, $z(t, x_j) = z_0(x_j - \lambda_2 t)$, $v(t, x_k) = v_0(x_k - \lambda_1 t)$, y, como $t < T$, $x_i - \lambda_2 t, x_j - \lambda_2 t$, y $x_k - \lambda_1 t$ pertenecen, respectivamente, a los tramos simples m_i, m_j , y m_k . Pasando los términos que contienen como factores a $z(t, x_i)$, $z(t, x_j)$ y $v(t, x_k)$ al lado derecho de las igualdades (11), se tienen definidas $v(t, x_i)$, $v(t, x_j)$ y $z(t, x_k)$ siempre que la matriz

$$D = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{11} & -s_{12} \\ s_{21} & -s_{21} & 0 \\ s_{21} & 0 & -s_{22} \end{bmatrix}$$

no sea singular. Supondremos también por ahora que D no es singular.

Sea ahora x interior a un tramo simple. Entonces puede pasar lo siguiente:

a1) $x - \lambda_1 t$ pertenece al tramo simple. En ese caso, se define $v(t, x) = v_0(x - \lambda_1 t)$.

a2) Existe t_1 tal que $0 < t_1 < t$ y tal que $x_B - x = \lambda_1 (t_1 - t)$, siendo x_B el punto extremo aguas abajo del tramo simple. En ese caso $t_1 = t_1(x, t) = (x_B - x) / \lambda_1 + t$, y se define $v(t, x) = v(t_1, x_B)$, o sea

$$v(t, x) = [f_B(t_1(x, t)) - c_{2B} z_0(x_B - \lambda_2 t_1(x, t))] / c_{1B}$$

si el extremo es un extremo abierto aguas abajo y

$$\begin{aligned}
 & s_{11} v_0 (v_k - \lambda_1 t_1(x, t)) + \\
 & r_{12} (-s_{22} z_0(x_B - \lambda_2 t_1(x, t)) + s_{22} z_0(x_j - \lambda_2 t_1(x, t))) + \\
 & r_{13} (-s_{22} z_0(x_B - \lambda_2 t_1(x, t)) + s_{21} v_0(x_k - \lambda_1 t_1(x, t)))
 \end{aligned}$$

si el tramo simple termina en un punto de afluencia $\{x_B, x_j, x_k\}$, donde x_B y x_j son extremos aguas abajo de tramos que afluyen al tramo del cual x_k es extremo aguas arriba, y los r_{1i} son los elementos de la primera fila de la matriz inversa de D .

b1) $x - \lambda_2 t$ pertenece al tramo simple. En ese caso, se define $z(t, x) = z_0(x - \lambda_2 t)$.

b2) Existe t_2 tal que $0 < t_2 < t$ y tal que $x_L - x = \lambda_2(t_2 - t)$, siendo x_L el punto extremo aguas arriba del tramo simple m . En ese caso también $t_2 = t_2(x, t) = (x_L - x) / \lambda_2 + t$ y se define $z(x, t)$ en forma análoga a la usada en a).

Análoga demostración vale si la confluencia es en realidad un punto de efluencia, intercambiando los papeles que cumplen v y z .

Es inmediato que v y z así definidas cumplen las ecuaciones diferenciales (8) —pues t_1 y t_2 son funciones C^∞ de x y de t en un entorno conveniente —, las condiciones iniciales (9), las condiciones de contorno (10) y las condiciones de compatibilidad (11), o sea el problema está resuelto en el intervalo $0 \leq t \leq T$. Pero tomando ahora como condiciones iniciales $y_0(x) = y(T, x)$, se puede extender la solución al intervalo temporal $T \leq t \leq 2T$, y así sucesivamente. Y "pegar" en forma continuamente diferenciable las soluciones sobre $T, 2T, 3T, \dots$, no ofrece ninguna dificultad.

Sólo nos queda por demostrar que efectivamente $C_{2L} \neq 0$ si x_L es extremo abierto aguas arriba, $C_{1B} \neq 0$ si x_B es extremo abierto aguas abajo, y la matriz D tiene inversa.

La matriz S es

$$S = \begin{bmatrix} g & g \\ -\sqrt{gH} & \sqrt{gH} \end{bmatrix}$$

$c_L = b_L \cdot S_L = (b_{1L} g - b_{2L} \sqrt{gH}, b_{1L} g + b_{2L} \sqrt{gH})$ y ninguna de sus dos componentes es 0, pues las b_{iL} son variables binarias una de las cuales vale 1 y la otra 0.

Finalmente, la matriz D será

$$D = \begin{bmatrix} g & g & -g \\ -\sqrt{gH} & \sqrt{gH} & 0 \\ -\sqrt{gH} & 0 & -\sqrt{gH} \end{bmatrix}$$

cuyo determinante es $-3g^2H \neq 0$. Con esto queda demostrado el teorema.

La condición de que los b_L sean variables binarias 0 / 1 se debe a que es usual que las condiciones de contorno de un modelo hidrodinámico de aguas poco profundas sean o caudal o velocidad o altura, aunque esto no es excluyente: se puede dar también como condición de contorno en un extremo abierto una relación funcional implícita $F(Q, h) = 0$ (ley altura caudal). Por consiguiente podemos generalizar la demostración a situaciones que contemplen una linealización de esta relación, y aun más.

En efecto, se puede observar que para la demostración basta que A , S y b sean tales que:

- i) A tenga autovalores reales $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$;
- ii) $b_{1B} s_{11} + b_{2B} s_{21} \neq 0$ si x_B es extremo abierto aguas abajo;
- iii) $b_{1L} s_{12} + b_{2L} s_{22} \neq 0$ si x_L es extremo abierto aguas arriba;

iv)

$$0 \neq \det \begin{bmatrix} s_{11} & s_{11} & -s_{12} \\ s_{21} & -s_{21} & 0 \\ s_{21} & 0 & -s_{22} \end{bmatrix}$$

La condición iv) es una generalización de las condiciones de compatibilidad de Stoker (11). Las condiciones ii) y iii) son condiciones de contorno que relacionan u y h en forma lineal.

3. El caso supercrítico

La demostración anterior se basa simplemente en plantear un sistema hiperbólico en su forma canónica. Si los dos autovalores de A son positivos, $0 < \lambda_1 < \lambda_2$, v y z están definidos en (t, x) por sus valores en $(0, x - \lambda_1 t)$ y $(0, x - \lambda_2 t)$, respectivamente, si esos valores están en el segmento al cual pertenece x. Si el extremo aguas arriba x_L de dicho segmento es tal que $x_L = x - \lambda_1 (t - t_1)$ y/o $x_L = x - \lambda_2 (t - t_2)$, para t_1 y/o t_2 mayores que 0, el valor de v y/o z se define en función del valor en (t_1, x_L) y/o (t_2, x_L) . Si x_L es un extremo abierto, basta dar como condiciones de contorno $v(t, x_L)$ y $z(t, x_L)$. Pero sea ahora x_L un extremo cerrado perteneciente a una confluencia en que dos tramos afluyen al que comienza en x_L , y supongamos que x_i y x_j sean los extremos aguas abajo de los tramos que desembocan en el que comienza en x_L , (es decir, el punto de afluencia es $\{x_i, x_j, x_L\}$). Entonces $v(t, x) = v_0(x - \lambda_1 t)$, $z(t, x) = z_0(x - \lambda_2 t)$, y análogamente con los valores en (t, x_j) . Quiere decir que en el sistema (11) hay 4 variables conocidas, y la matriz deducida de las ecuaciones de compatibilidad (11)

$$\begin{bmatrix} -s_{11} & -s_{12} \\ 0 & 0 \\ -s_{21} & -s_{22} \end{bmatrix}$$

debe tener rango dos, lo cual es cierto. Pero es necesario que se cumpla también la condición adicional

$$(12) \quad s_{21} v(t, x) + s_{22} z(t, x) - s_{21} v(t, x_j) - s_{22} z(t, x_j) = 0.$$

Ahora bien, (12) equivale a

$$(13) \quad s_{21} v_0(x_j - \lambda_1 t) + s_{22} z_0(x_j - \lambda_2 t) - s_{21} v_0(x_j - \lambda_1 t) - s_{22} z_0(x_j - \lambda_2 t) = 0,$$

condición que no tiene por qué cumplirse. Por consiguiente, las condiciones linealizadas de Stoker no son normalmente compatibles con el caso supercrítico.

De hecho, la incompatibilidad de (13) con condiciones iniciales normales indica algo muy simple: en régimen supercrítico, se tienen dos características positivas, y por consiguiente las condiciones de contorno solamente pueden darse aguas arriba. Intuitivamente, nada asegura que, dados determinados caudales y alturas en los extremos aguas arriba de dos tramos, el agua llegue a la confluencia de ambos con las alturas coincidentes.

Veamos qué pasa en la situación inversa, es decir, cuando se tiene un cauce que se bifurca en dos: la confluencia es un punto de efluencia donde x_i es el extremo aguas abajo del tramo que se bifurca, y x_j y x_k son los extremos aguas arriba de los tramos efluentes resultantes; es decir, el punto de efluencia es $\{x_i, x_j, x_k\}$. Aquí se tienen conocido solamente $v(t, x_i) = v_0(x_i - \lambda_1 t)$ y $z(t, x_j) = z_0(x_j - \lambda_2 t)$, o sea de (11) se deduce que queda una variable indeterminada: intuitivamente, esto indica que para alturas y caudales dados en el extremo agua arriba del tramo que se bifurca, existen infinitas maneras de distribuir los caudales en los dos tramos efluentes.

4. Sistemas de dimensión mayor que 2

Consideremos ahora un sistema

$$(14) \quad \partial w / \partial t + B \partial w / \partial x = 0,$$

donde B es una matriz real de $n \times n$ con coeficientes constantes y autovalores reales distintos $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, y $w = (w_1(t, x), w_2(t, x), \dots, w_n(t, x))$ es una función continuamente diferenciable en cada tramo de una red espacial análoga a la red fluvial antes descrita. Es decir, seguiremos usando la terminología anterior, aunque nuestro sistema (14) no tenga nada que ver con los ríos.

Las condiciones iniciales en cada tramo son

$$(15) \quad w(0, x) = w_0(x).$$

Interesa determinar qué condiciones de compatibilidad es necesario dar en cada confluencia, y qué condiciones de contorno es necesario dar en los extremos abiertos de la red. Consideremos primero el caso n par, es decir, $n = 2m$, $m > 1$, y supongamos que hay m autovalores negativos $\lambda_1 < \dots < \lambda_m$, y m autovalores positivos $\lambda_{m+1} < \dots < \lambda_n$. Sea además S la matriz de transformación formada por autovectores de B , de modo que si Λ es la matriz diagonal formada por los autovalores de B , será $\Lambda = S^{-1} B S$, y supongamos también que en cada confluencia $\{x_i, x_j, x_k\}$ hay $3m$ condiciones de compatibilidad lineales

$$(16) \quad \sum_{s=1}^n c_{rsi} w_s(t, x_i) + \sum_{s=1}^n c_{rsj} w_s(t, x_j) + \sum_{s=1}^n c_{rsk} w_s(t, x_k) = d_r$$

$$r = 1, \dots, 3m$$

y que en cada extremo abierto L hay m condiciones de contorno

$$(17) \quad \sum_{s=1}^n b_{rsL} w_s(t, x_L) = f_{rL}(t)$$

$$r = 1, \dots, m$$

Si C_i es la matriz de $3m \times n$ cuyos elementos son los (c_{rsi}) , con r indicando fila y s indicando columna, sea $D_i = C_i S$. Definimos entonces por D a la matriz de $3m \times 3n$ ($D_i D_j D_k$) constituida adjuntando las tres matrices. Denotaremos a sus elementos como (d_{rsi}) , (d_{rsj}) o (d_{rsk}) donde el tercer subíndice i, j o k indica en forma obvia a qué parte de la matriz pertenece el elemento.

Análogamente la matriz B_L de $m \times n$ indicará la constituida por los elementos (b_{rsL}) de la ecuación (17), y definimos E_L como $E_L = B_L S$, denotando a sus elementos por (e_{rsL}) .

Entonces podemos enunciar el siguiente

Teorema 2: *El sistema diferencial lineal estrictamente hiperbólico (14), con n par, con coeficientes constantes, con condiciones iniciales (15), con condiciones de compatibilidad (16) y con condiciones de contorno (17) tiene una única solución $w \in C^1$ en cada tramo, siempre que :*

i) $w_0(x) \in C^1$ en cada tramo ;

ii) Cada f_L sea C^1 para $t > 0$ y consistente con las condiciones iniciales para $t = 0$;

iii) Las matrices cuyas filas son

$$d_{r1i} \quad d_{r2i} \quad \dots \quad d_{rmi} \quad d_{r1j} \quad d_{r2j} \quad \dots \quad d_{rmj} \quad d_{r,m+1,k} \quad d_{r,m+2,k} \quad \dots \quad d_{rnk}$$

$$r = 1, \dots, 3m$$

sean no singulares, cuando $\{x_i, x_j, x_k\}$ forman un punto de efluencia;

iv) Las matrices cuyas filas son

$$e_{r,m+1,L} \quad e_{r,m+2,L} \quad \dots \quad e_{r,nL}$$

$$r = 1, \dots, m$$

sean no singulares para cada x_L extremo abierto "aguas arriba", y las matrices cuyas filas son

$$e_{r1B} \quad e_{r2B} \quad \dots \quad e_{rmb}$$

$$r = 1, \dots, m$$

sean no singulares para cada x_B extremo abierto "aguas abajo" de la red .

La demostración de este teorema es prácticamente igual a la del teorema 1 , teniendo en cuenta simplemente el cambio de dimensión que, en particular, implica que en lugar de requerirse que un número sea distinto de cero – el $c_{2,L}$ o $c_{1,B}$ del teorema 1 – sea no singular una matriz de $m \times m$.

Si el número de autovalores positivos es mayor que el de autovalores negativos, entonces se tiene, como antes, que si $\{x_i, x_j, x_k\}$ es un punto de afluencia, se tendrán condiciones de compatibilidad incompatibles, y si $\{x_i, x_j, x_k\}$ es un punto de efluencia, se tendrán condiciones indeterminadas. Esto, si se mantiene en m el número de condiciones de compatibilidad; lo que se puede observar es que en este caso el número de condiciones de compatibilidad dependerá de la cantidad de autovalores positivos: si el número de autovalores positivos es $m + p$, con $p \leq m$, serán necesarias $2n - m - p$ condiciones de compatibilidad en un punto de afluencia y $n+m+p$ condiciones de compatibilidad en un punto de efluencia, sujetas, en ambos casos, a que las matrices correspondientes sean no singulares .

Sea ahora n impar, es decir, $n = 2m + 1$. Supongamos que se tienen m autovalores negativos y $m+1$ autovalores positivos, $\lambda_1 < \dots < \lambda_m < 0 < \lambda_{m+1} < \dots < \lambda_n$.

Analícemos en primer lugar el caso en que se tiene un punto de afluencia $\{x_i, x_j, x_k\}$. En este caso, como se pueden obtener, en la forma habitual, valores en (t, x_i) de $z_r(t, x_i)$ a partir

de los valores iniciales $z_{0s}(x_i - \lambda_s t)$ para $s = m + 1, \dots, n$ (donde $w = Sz$), valores de $z_s(t, x_j)$ también para $s = m + 1, \dots, n$, y valores de $z_s(t, x_i)$ para $s = 1, \dots, m$, se puede observar que se necesita resolver un sistema lineal en las restantes variables, que son $3m + 1 = m + n + 1$. Es decir, se necesitan dar $3m + 1$ ecuaciones de compatibilidad en un punto de afluencia. En forma similar se puede observar que se necesitan dar $3m + 2$ ecuaciones de compatibilidad si lo que se tiene es un punto de efluencia. Naturalmente, en los extremos "aguas arriba" se necesitan dar tantas condiciones de contorno como autovalores positivos haya, y en los extremos "aguas abajo" tantas condiciones de contorno como autovalores negativos.

Si $n = 3$, el caso puede considerarse, por ejemplo, una simplificación, en base a la linealización indicada en las secciones anteriores, de las ecuaciones de aguas poco profundas para canales con fondo móvil, es decir, con un fondo en el cual, de acuerdo a la velocidad del agua, puede producirse transporte de material sólido que cambia la altura del fondo del cauce. Las ecuaciones, para un tramo simple de un canal de sección transversal rectangular de ancho unitario, son, tal como puede verse en Gradowczyk [1968].

$$(18.1) \quad \partial u / \partial t + u \partial u / \partial x + g \partial (h + e) / \partial x = 0$$

$$(18.2) \quad \partial h / \partial t + \partial (uh) / \partial x = 0$$

$$(18.3) \quad \partial e / \partial t + \partial Q_s / \partial x = 0$$

donde ahora se ha despreciado el término de fricción en (18.1); e es la altura desde un plano de referencia hasta el fondo del canal (ver figura 3), y $Q_s = Q_s(u, h)$ es el caudal sólido transportado. (18.3) es la ecuación de continuidad del caudal sólido. La matriz B de (18) es

$$B = \begin{bmatrix} U & g & g \\ H & U & 0 \\ Q_1 & Q_2 & 0 \end{bmatrix}$$

donde U, H, Q_1 y Q_2 son valores (constantes) representativos de $u, h, \partial Q_s / \partial u$ y $\partial Q_s / \partial h$, respectivamente. El sistema (18) es estrictamente hiperbólico si Q_1 y Q_2 son suficientemente pequeños (que es el caso que nos interesa, pues Q_s variará muy poco respecto de u y h debido a que la velocidad del material sólido es mucho menor que la del agua); en efecto

Lema : Para Q_1 y Q_2 suficientemente pequeños, los autovalores de B son reales y distintos.

Demostración : Los autovalores de B son las raíces del polinomio $\det B$, o sea

$$(19) \quad F(\lambda, Q_1, Q_2) = \lambda^3 - 2U\lambda^2 + (U^2 - gH - gQ_1)\lambda + g(UQ_1 - HQ_2) = 0$$

En los puntos $(\lambda, Q_1, Q_2) = (0, 0, 0)$, $(U + \sqrt{gH}, 0, 0)$ y $(U - \sqrt{gH}, 0, 0)$, que son solución de (19), se cumple que $\partial F / \partial \lambda \neq 0$, como se observa inmediatamente. Por consiguiente, por el teorema de la función implícita, podemos obtener, en un entorno de cada uno de esos tres puntos, funciones $\lambda = \lambda(Q_1, Q_2)$ que representarán cada una de las raíces reales (y distintas) de λ para Q_1 y Q_2 pequeños. En particular, además de las raíces positiva y negativa en los entornos de $U + \sqrt{gH}$ y $U - \sqrt{gH}$, λ_1 y λ_3 , respectivamente, habrá otra raíz, que indica la pendiente de la característica correspondiente al caudal sólido. Si esa raíz λ_2 es positiva, y el régimen del río o canal simplificado es subcrítico, se tendrá que dar una condición

de compatibilidad más (conservación del caudal sólido en una confluencia) para un punto de afluencia; para un punto de efluencia, además de la conservación del caudal sólido será necesario otra condición adicional, si tal cosa es razonable físicamente; de lo contrario, no se puede modelizar matemáticamente un punto de efluencia de un flujo subcrítico con fondo móvil sin que se produzca una indeterminación.

El análisis realizado es lineal, y por lo tanto, por supuesto, muy simplificado; sin embargo, creemos que se puede adaptar al caso, más realista, de no linealidad en las ecuaciones de conservación, aunque la demostración de existencia de solución del sistema de red fluvial, en tal caso, es mucho más difícil (y las soluciones serán soluciones débiles). La no linealidad se puede extender a las ecuaciones de compatibilidad (3), considerando las ecuaciones (3.2) cuando la aproximación (3.2') no sea satisfactoria.

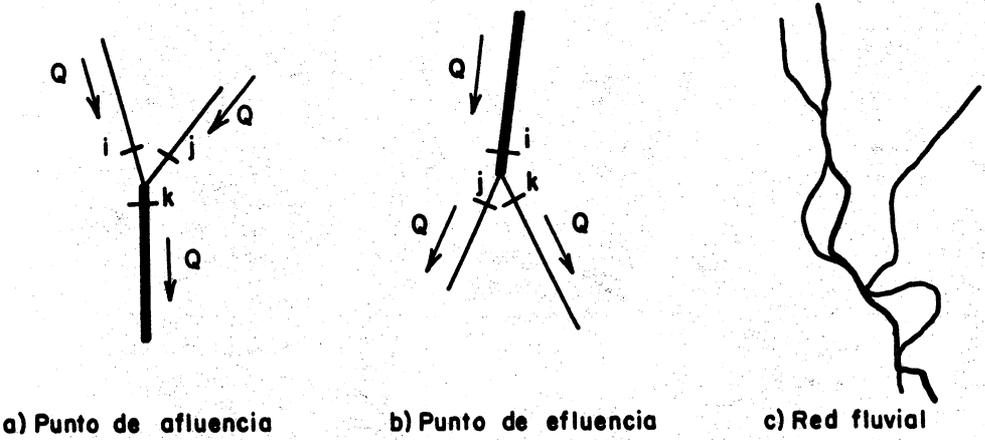
Referencias

- [1] GRADOWCZYK, M.H. *Wave propagation and boundary instability in erodible-bed channels*, Journal of Fluid Mechanics, 33, 93 -112, 1968.
- [2] LI, Z.C., ZHAN L.J. y WANG H.L. *Difference methods of flow in branch channel*, * Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, 109, 424 - 446, 1983.
- [3] ROZDEST VENSKII, B.L. y JANENKO N.N. *Systems of quasilinear equations and their application to gas dynamics*, Translations of Mathematical Monographs, Vol. 55, American Mathematical Society, Providence, 1983.
- [4] SAINT-VENANT, B. *Théorie du mouvement non-permanent des eaux avec application aux crues des rivières et à l'introduction des marées dans leur lit*, Comptes Rendues de l'Académie des Sciences de Paris, 73, 148 -154 y 237 - 240, 1871.
- [5] STOKER, J.J. *Water waves*, Intersciences, Nueva York, 1957.

NOTA: Una versión preliminar de este trabajo fue expuesto como comunicación a la XXXVIII Reunión Anual de la Unión Matemática Argentina, San Juan, 19 al 22 de octubre de 1988.

PABLO MIGUEL JACOVKIS
Departamento de Computación
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires

Recibido por UMA el 16 de mayo de 1989.



a) Punto de afluencia

b) Punto de efluencia

c) Red fluvial

FIGURA 1

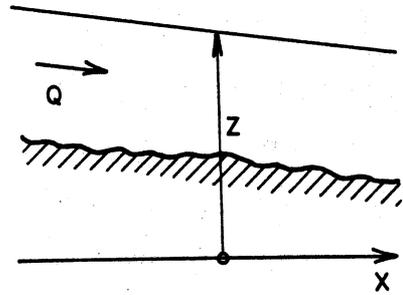
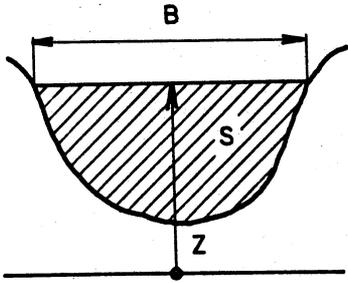


FIGURA 2

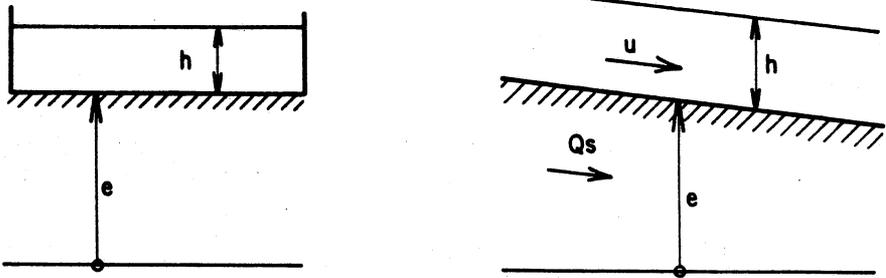


FIGURA 3