Revista de la
Unión Matemática Argentina
Vol. 35 1990.

INTEGRACION DE CAMPOS VECTORIALES Y GEOMETRIA DIFERENCIAL SINTETICA

EDUARDO J. DUBUC

Es una idea propuesta por F.W.Lawvere [11] la de trabajar en un contexto donde la construcción del fibrado tangente TM de una variedad (diferenciable) M sea *representable.* Más precisamente, considerar un topos E (en la práctica será una categoría de haces de conjuntos en el sentido de Grothendieck, [1]) munido de un objeto $D \in E$, $1 \xrightarrow{0} D$, el "intervalo infinitesimal", de manera que un vector tangente a M sea una "curva infinitesimal" $D \xrightarrow{\xi} M$. Así, $TM = M^D$, donde esta última expresión es la exponencial en E. El punto base es $1 \xrightarrow{\xi(0)} M$, y se tiene el fibrado tangente $M^D \xrightarrow{\pi} M$, donde π es la evaluación en 0. Para el desarrollo de esta propuesta puede consultarse el libro de A. Kock [9] y su amplia bibliografía .

Sea E un topos munido de un objeto anillo R, la línea, y sea $D \to R \overset{x^2}{\underset{0}{\rightrightarrows}} R$ el egalizador de x^2 con 0. Es decir, D está descripto por la fórmula

$$D = [\, x \mid x^2 = 0 \,]$$

1.Axioma de tipo línea ([9]). T se dice de tipo línea si la aplicación: $R \times R \to R^D$ (adjunta a la aplicación $R \times R \times D \to R$, $(a,b,d) \to a+bd$) que manda un "par" (a,b) en la "función" $D \xrightarrow{a+bx} R$ es un isomorfismo.

Este axioma expresa la validez interna de los enunciados:

i) $\forall f \in R^D \;\; \exists \;\; b \in R \;/\; \forall d \in D \;\; f(d) = f(0) + bd$

ii) $\forall d \in D \quad db = db' \;\Rightarrow\; b = b'$

Es decir, el gráfico de toda función de D en R es una recta. Dada una función $R \xrightarrow{f} R$, se define $b = f'(0)$. Así, la restricción de f a D, $D \subset R \xrightarrow{f} R$, queda caracterizada por su valor en cero f(0) y por el valor de su derivada en cero f'(0).

Más generalmente, cualquiera sea $s \in R$, se tiene para todo $d \in D$, $f(s+d) = f(s) + f'(s)d$. Escribimos también $\frac{df}{ds}(s) = f'(s)$.

Dado $M \in E$, un *campo vectorial* $M \xrightarrow{\xi} M^D$ es una sección del fibrado tangente $M^D \xrightarrow{\pi} M$, $\pi\,\xi = id_M$. La aplicación conjunta $M \times D \xrightarrow{\xi} M$, que satisface la ecuación $\xi(p, 0) = p \;\; \forall\, p \in M$ es un *flujo infinitesimal*, o *familia de curvas integrales infinitesimales*. Puede verse que para una clase de objetos M, llamados "infinitesimalmente lineales", (que incluye a todos los objetos de interés) se satisface en adición la ecuación:

$$\xi(\xi(p,c),d) = \xi(p,c+d) \quad \forall\ c,d \in D \ /\ c+d \ \in D\ .$$

Así en este contexto, todo campo vectorial *ya está integrado* infinitesimalmente.

Una familia de curvas $M x R \xrightarrow{f} M$ es un *flujo integral* del campo si sus "vectores velocidad" son los vectores del campo. Es decir, si:

$$f(p,0) = p \ \text{ y } \ f(p,s+d) = \xi(f(p,s),d) \quad \forall\ p \in M,\ s \in R,\ d \in D.$$

Supongamos que de alguna manera se tienen coordenadas en R para los puntos de M. El campo ξ será entonces de la forma:

$\xi(p,d) = p+g(p)d$ con g una función $M \xrightarrow{g} R^n$. El miembro izquierdo en la ecuación de arriba queda igual a :

$f(p,s) + \frac{df}{ds}(p,s)\,d$, mientras que el derecho es:

$f(p,s) + g\ (f(p,s))d$. Se sigue entonces que tener un flujo integral equivale a tener una solución de la ecuación diferencial:

$$f(p,0) = p \ \text{ y } \ \frac{df}{ds}(p,s) = g(f(p,s)) \quad \forall\ p \in M,\ s \in R\ .$$

En este par de charlas nos va a interesar el problema de la extensión de flujos infinitesimales (o sea, integración de campos vectoriales) en un modelo concreto E de esta teoría. Se espera que esto sirva también para que el lector pueda entender el *significado matemático concreto* de esta manera de hablar en el lenguaje interno de un topos.

2. Modelos bien adaptados ([4]) .Denotemos M a la categoría de variedades diferenciales C^∞ y funciones infinitamente diferenciables. Se recuerda que en M pueden construirse los *productos fibrados transversales*. Es decir, dado un diagrama de variedades C^∞.

$$\begin{array}{ccc} & P \\ & \downarrow \\ M \rightarrow & N, \end{array} \qquad \begin{array}{cc} & y \\ & \downarrow \\ x \rightarrow & z \end{array} \qquad \begin{array}{cc} & T_yP \\ & \downarrow \\ T_xM \rightarrow & T_zN \end{array}$$

Si para todo par $x \in M$, $y \in P$ que van a parar a un mismo punto $z \in N$ las imágenes de los vectores tangentes a x en M y a y en P engendran (o generan) todo el espacio tangente a z en N, entonces en el producto fibrado $S \subset M \times P$, $S = \{(x,y)$ de tales puntos$\}$ existe una única estructura de variedad diferenciable C^∞ que hace del diagrama

$$\begin{array}{ccc} S & \rightarrow & P \\ \downarrow & & \downarrow \\ M & \rightarrow & N \end{array}$$

un producto fibrado en M. (c.f.[8]).

Ejemplos típicos de esta situación son los ceros de funciones independientes $\mathbf{R}^n \xrightarrow{h_i} \mathbf{R}$, $i = 1, 2, \ldots, k$, con su estructura de variedad de dimensión n - k, y los productos de variedades:

$$\begin{array}{ccc} S & \longrightarrow & 1 \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle 0} \\ R^n & \longrightarrow & R^k \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} MxP & \longrightarrow & P \\ \downarrow & & \downarrow \\ M & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

Un modelo bien adaptado de la Geometría Diferencial Sintética es un topos E munido de un anillo de tipo línea R y de una inclusión (plenamente fiel) $M \to E$, $\mathbf{R} \to$ R, tal que:

0) $TM = M^D$

1) Preserva productos fibrados transversales

2) Preserva cubrimientos abiertos

donde denotaremos (salvo en el caso de **R**) con la misma letra a una variedad ya sea considerada en M o en E. El punto 1) no necesita aclaración, y 2) significa que los cubrimientos abiertos de una variedad son *familias epimorfas* (efectivas y universales) en E.

Esto último significa sencillamente que dado un cubrimiento $U_\alpha \subset M$, para construir una flecha $M \to X$ en un objeto cualquiera X de E, basta construir una familia $U_\alpha \to X$ compatible en las intersecciones.

3. Construcción de modelos bien adaptados.([4] [5])

Los modelos bien adaptados se construyen utilizando una clase de anillos, o más bien de **R**-álgebras, llamados *Anillos* C^∞. Las operaciones n-arias de la teoría de anillos C^∞ son *todas* las funciones C^∞ $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, y los axiomas son *todas* las ecuaciones válidas entre ellas. En particular tenemos la suma y el producto $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, lo que dice que todo anillo C^∞ es un anillo. Así como dado un anillo A y un polinomio en n-variables f, le corresponde una "función polinomial" $A^n \xrightarrow{f} A$, de la misma manera, dado un anillo C^∞ A y una función C^∞ en n-variables f, le corresponde una función $A^n \xrightarrow{f} A$. Un morfismo entre anillos C^∞ es una función que preserva (está claro) toda esta estructura. El anillo C^∞ libre en n-generadores es el anillo $C^\infty(\mathbf{R}^n)$ de todas las funciones C^∞ de n-variables (es decir, el conjunto de operaciones n-arias). Otros ejemplos típicos son los anillos $C^\infty(M)$ y $C^\infty_p(M)$ de funciones C^∞ a valores reales definidas en una variedad M, y de gérmenes de tales funciones definidos alrededor de un punto $p \in M$. También el anillo $\mathbf{R}[\varepsilon]$ de números duales ($\mathbf{R}[\varepsilon] = \{a + b\varepsilon \mid a, b \in \mathbf{R} \text{ y } \varepsilon^2 = 0\}$) así como toda álgebra en el sentido de Weil [13].

Proposición 1: Dado un anillo $C^\infty A$, todo ideal $I \subset A$ es una congruencia C^∞. ($a \sim b \Leftrightarrow a - b \in I$)

Demostración: Sea f: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ una función C^∞, y $a_i \sim b_i$ $i = 1, 2, \ldots, n$. Entonces:

$f(a_1, \ldots, a_n) - f(b_1, \ldots, b_n) = \sum_i (a_i - b_i)\ g_i(a_i, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n)$.

Este simple hecho permite obtener a partir de los anillos $C^\infty(\mathbf{R}^n)$ todos los anillos C^∞ que se necesitan.

Definición: Un ideal $I \subset C^\infty(\mathbf{R}^n)$ es de *naturaleza local* si: Dado $f \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$, $f \in I \Leftrightarrow \forall\ p \in Z(I)$ $f|_p \in I|_p \subset C^\infty_p(\mathbf{R}^n)$. (donde $Z(I) \subset \mathbf{R}^n$ es el conjunto de ceros de I, $f|_p$ es el germen de f en p, y $I|_p$ es el ideal generado por los gérmenes de funciones de I). Nótese que si $p \notin Z(I)$, $1 \in I|_p$, o sea $I|_p = C_p^\infty(\mathbf{R}^n)$.

Proposición 2: Todo ideal $I = (h_1, \ldots, h_k)$ finitamente generado es de naturaleza local.

Demostración: Sea f, localmente en I. Entonces existe un cubrimiento $U_\alpha \subset \mathbf{R}^n$ con partición de la unidad subordinada $\varphi_\alpha \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$ tal que $f|_{U_\alpha} \in I|_{U_\alpha} \subset C^\infty(U_\alpha)$. Sean $g_i^a \in C^\infty(U_\alpha)$ tales que $f|_{U_\alpha} = \sum_i g_i^a\ h|_{U_\alpha}$.

Entonces $\varphi_\alpha f = \sum_i \varphi_\alpha\ g_i^a\ h_i$

Luego: $f = \sum_\alpha \varphi_\alpha f = \sum_\alpha \sum_i \varphi_\alpha\ g_i^a\ h_i = \sum_i \sum_\alpha \varphi_\alpha\ g_i^a\ h_i$

$= \sum_i g_i h_i$ donde $g_i = \sum_\alpha \varphi_\alpha g_i^a$

Nótese que todo punto $p \in \mathbf{R}^n$ tiene un entorno donde todas estas sumas son finitas.

Notamos que esta proposición significa un Nullestelentzats para ideales finitamente generados. Es decir, se tiene:

$$Z(h_1, \ldots, h_k) = \phi \iff 1 \in (h_1, \ldots, h_k)$$

Para ideales I de naturaleza local esto vale por definición. Un ejemplo típico de ideal que no satisface el Nullestelentzats, y por ende no es de naturaleza local, es el ideal de las funciones de soporte compacto.

Denotemos A a la categoría de anillos C^∞ presentados por un ideal de naturaleza local. Dado $A \in$ A, si se lo considera como un objeto de la categoría dual (formal) A^{op}, se indicará esto con una barra arriba de la A. Así, $\bar{A} \in A^{op}$. en A^{op} se considera la *topología de los cubrimientos abiertos*. Si $A = C^\infty(\mathbf{R}^n)/I$, una familia $\bar{A}_\alpha \to \bar{A}$ es un cubrimiento si $A_\alpha = C^\infty(U_\alpha)/I|_{U_\alpha}$, donde U_α es un cubrimiento abierto cualquiera de los ceros de I, $Z(I) \subset \mathbf{R}^n$. (la flecha $A \to A_\alpha$ es un epimorfismo (no suryectivo) en A. De allí que $\bar{A}_\alpha$ es un sub objeto de $\bar{A}$).Estas familias son epimorfas efectivas (y universales) en A^{op} (c.f.[4]), luego se tiene una inclusión plenamente fiel $A^{op} \to E$ en el topos E de haces. Se tiene:

Teorema ([5]). La inclusión $M \to A^{op} \to E$ es un modelo bien adaptado de la geometría diferencial sintética.

Nótese que la primera parte de esta inclusión, $M \to A^{op}$, es el funtor $M \to C^\infty(M)$. Es en este modelo donde vamos a analizar el problema de la extensión de flujos infinitesimales. La línea R es representable. Es decir, está en A^{op}. Se tiene $R = \overline{C^\infty(\mathbf{R})}$. Puesto que $\mathbf{R}[\varepsilon] = C^\infty(\mathbf{R})/(x^2)$, el objeto D también es representable, y se tiene $D = \overline{\mathbf{R}[\varepsilon]}$. Veamos como se demuestra que R es un anillo de tipo linea. Hay que ver que los haces R^D y RxR son isomorfos. Ello significa que se tiene una biyección (natural) entre los conjuntos de flechas $\bar{A} \to R^D$ y $\bar{A} \to R$xR. Es decir, R^D y RxR admiten las mismas secciones provenientes de los representables $\bar{A} \in A^{op}$. Se tiene:

$$\begin{array}{c}
\bar{A} \to R^D \\
\hline
\bar{A}\mathrm{x}D \to R \\
\hline
A[\varepsilon] \leftarrow C^\infty(\mathbf{R}) \\
\hline
A \leftarrow C^\infty(\mathbf{R}^2) \\
\hline
\bar{A} \to R \times R
\end{array}$$

Aquí hemos indicado $\otimes_\infty$ al coproducto en la categoría A.

Dada una variedad $M \in M$, para convencernos que M^D es realmente el fibrado tangente TM, calculemos cuáles son las secciones globales $1 \xrightarrow{\xi} M^D$. A una tal ξ le corresponde por adjunción exponencial una flecha ("curva infinitesimal") $D \xrightarrow{\xi} M$. Pero esto no es otra cosa que un morfismo de anillos C^∞ $C^\infty(M) \xrightarrow{\xi} \mathbf{R}[\varepsilon]$. Un tal ξ será de la forma $\xi(f) = \xi_0(f) + \xi_1(f)\varepsilon$, donde ξ_0 es un morfismo en $\mathbf{R}$, y ξ_1 una ξ_0-derivación (ello se sigue trivialmente del hecho que ξ es un morfismo y que $\varepsilon^2 = 0$). Pero $\xi_0(f) = f(p)$ para un único $p \in M$ (Milnor's exercise en [3]), y como es bien sabido, a ξ_1 le corresponde un único vector tangente a M en p. Se tiene entonces que ξ es exactamente un punto en TM.

4. El fibrado tangente de esquemas afines C^∞.

Si $A \in \mathbb{A}$, $A = C^\infty(\mathbf{R}^n)/I$, dualizando se tiene que $\bar{A} \subset R^n$, $\bar{A} = [[p \in R^n \mid h(p) = 0$ para cada $h \in I]]$. El objeto $\bar{A}$ no será necesariamente una variedad $M \subset R^n$, $M \in \mathcal{M}$, pero más generalmente un "esquema afín C^∞". Como por ejemplo, la variedad infinitesimal $D = \mathbf{R}[\varepsilon] \subset R$. Las $h \in I$ son las ecuaciones que definen $\bar{A}$. El fibrado tangente $\bar{A}^D$ puede calcularse fácilmente utilizando el axioma de tipo línea. Veamos: $\bar{A}^D \subset (R^n)^D \approx R^{2n}$, y se tiene que un $\xi \in (R^n)^D$ está en $\bar{A}^D$ si y sólo si $\xi(d) \in \bar{A}$ $\forall d \in D$. Es decir, $h(\xi(d)) = 0$ para cada $h \in I$. Pero $\xi(d)$ será $\xi(d) = (x_1 + y_1 d, \ldots x_n + y_n d)$. Luego $h(\xi(d)) = h(x_1, \ldots x_n) + d(\sum_i \frac{\partial h}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_n)\, y_i) = 0$ $\forall d \in D$. Si $d=0$ tenemos $h(x_1, \ldots x_n) = 0$. Por ii) en el Axioma de tipo línea podemos cancelar d, y se tiene también $\sum_i \frac{\partial h}{\partial x_i}(x, \ldots x_n) . y_i = 0$.

$$\text{Luego } \bar{A}^D \subset R^{2n}, \quad \bar{A}^D = [[(p,q) \in R^{2n} \mid h(p) = 0 \ \text{ y } \ \sum_i \frac{\partial h}{\partial x_i}(p)\, y_i = 0\ \forall h \in I]]$$

donde hemos puesto $p = (x_1, \ldots x_n)$ y $q = (y_1, \ldots y_n)$. Es decir, $\bar{A}^D$ queda definido por las bien conocidas ecuaciones del fibrado tangente.

5. Extensión de flujos infinitesimales en el Modelo.

Si $\varepsilon > 0$ es un número real $\varepsilon \in \mathbb{R}$, el intervalo $(-\varepsilon,\varepsilon) \subset R$ en el topos $\mathcal{E}$ está representado por $(-\varepsilon,\varepsilon) = C^\infty(-\varepsilon,\varepsilon)$. La intersección $\Delta = \bigcap_{\varepsilon>0} (-\varepsilon, \varepsilon)$ calculada en el topos estará representada por el límite en $\mathbb{A}$ de la cadena $C^\infty(\mathbf{R}) \to C^\infty(-\varepsilon,\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$. Pero este anillo C^∞ no es otra cosa que el anillo $C_0^\infty(\mathbf{R})$ de gérmenes en cero de funciones C^∞. Es decir, $\Delta \subset R$, $\Delta = C_0^\infty(\mathbf{R})$ .Puesto que todo germen es el germen de una función global, se tiene un cociente $C^\infty(\mathbf{R}) \to C_0^\infty(\mathbf{R}) = C^\infty(\mathbf{R}) / \mathbf{J}$, donde $\mathbf{J}$ es el ideal de las funciones de germen nulo. Claramente $\mathbf{J} \subset (x^2)$, luego $D \subset \Delta$, y en un cierto sentido Δ es el más grande entorno infinitesimal de cero (nótese además que todo ideal I de naturaleza local tal que $Z(I) = \{0\}$ contiene a J). De la continuidad de la suma $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \xrightarrow{+} \mathbf{R}$ se sigue que se tiene $C_0^\infty(\mathbf{R}) \to C_{(0,0)}^\infty(\mathbf{R} \times \mathbf{R}) = C_0^\infty(\mathbf{R}) \otimes_\infty C_0^\infty(\mathbf{R})$, $t \to x + y$, es decir $\Delta \subset R$ es cerrado para la suma. Se tiene $\Delta \times \Delta \xrightarrow{+} \Delta$, si $s,\ t \in \Delta$, entonces $s + t \in \Delta$. Vamos a ver ahora que en E todo flujo infinitesimal puede extenderse a un flujo, también infinitesimal, pero definido sobre todo Δ.

Proposición 3. Dado un campo vectorial $M \times D \xrightarrow{\xi} M$, $\xi(p,0) = p$ en una variedad $M \in \mathcal{M}$, existe una (única) función $M \times \Delta \xrightarrow{f} M$ tal que:

$$f(p,d) = \xi(p,d), \quad d \in D \quad \text{y} \quad f(p,s+t) = f(f(p,s),t), \quad s,t \in \Delta$$

Notar que poniendo $t = d$, se sigue inmediatamente que f es un flujo integral del campo ξ en el sentido descripto en la página 2.

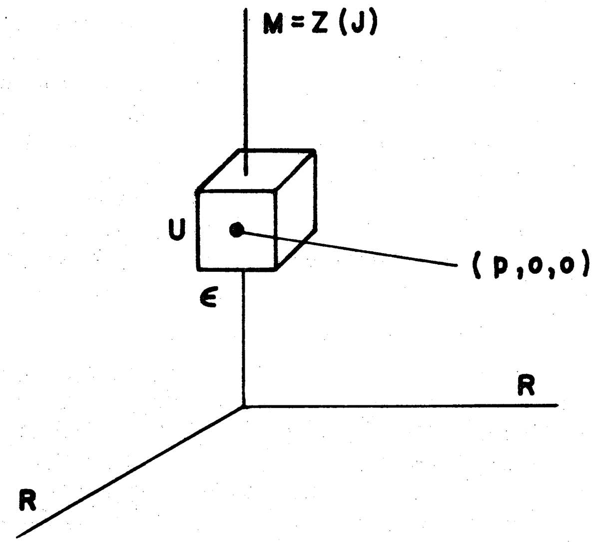
Demostración: Puesto que la inclusión $\mathcal{M} \to$ E es plenamente fiel, los razonamientos hechos en la página 2 muestran que al campo ξ le corresponde una ecuación diferencial ordinaria.

$$f(p,0) = p \ \text{ y } \ \frac{df}{ds}(p,s) = g(f(p,s)) \text{.,donde ahora g es una función } C^\infty\ M \xrightarrow{g} \mathbf{R}^n \text{ en } \mathcal{M}.$$

Se sabe que ella puede integrarse localmente. Más precisamente existe una función C^∞ $M \times \mathbf{R} \xrightarrow{f} \mathbf{R}$ en $\mathcal{M}$ que es un flujo local.

Es decir, f(p,s) es una solución de la ecuación para s suficientemente pequeño (dependiendo de p). Además, para cada $p \in M$ existe un entorno U de p en M y un $\varepsilon > 0$ tal que

$f(x,s+t) = f(f(x,s),t) \quad \forall\ x \in U, \quad s,t < \varepsilon$



Se sigue que para toda h ε $C^\infty(M)$ el germen de la diferencia hf (x ,s + t) - hf (f (x, s), t) ε C^∞(M x **R** x **R**) es nulo en todo punto (p,0,0) del "eje" M. Este eje es el conjunto de ceros del ideal J generado en C^∞(M x **R** x **R**) por las funciones de dos variables reales de germen nulo en (0,0). Es decir, esta diferencia es igual a cero en el anillo

$$A = C^\infty(M \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}) / \tilde{J} = C^\infty(M) \otimes_\infty C_0^\infty(\mathbf{R}) \otimes_\infty C_0^\infty(\mathbf{R}),$$

que representa a M x Δ x Δ en *E*. ($\tilde{J}$ indica el ideal de las funciones que están localmente en J, y, como antes, $\otimes_\infty$ es el coproducto en la categoría *A*). Pero esto quiere decir precisamente que la correspondiente función en *E*, M x $\Delta \xrightarrow{f}$ M satisface la ecuación f (p,s+t) = f (f (p,s),t).

Esta proposición muestra que el resultado clásico de integración *local* de campos vectoriales *equivale* en el topos *E* a la integración de una familia de curvas definidas sólo en el "intervalo" *infinitesimal* $\Delta = \bigcap_{\varepsilon > 0} (-\varepsilon, \varepsilon)$. Como veremos a continuación, el pasaje de lo infinitesimal a lo local en *E* se obtiene automáticamente mediante la lógica interna del topos.

6. Un poco de lógica en el topos. ([2])

Si H ε *E*, los sub-haces de H pueden pensarse como extensiones de fórmulas predicables sobre H. Así por ejemplo ya hemos visto que **R**[ε] = Δ ⊂ R es D = [[x ε R | x^2 = 0]] y que C_0^∞(**R**) = Δ ⊂ R es Δ = [[x ε R | x ε (−ε , ε) para todo ε > 0 ε ∈ **R**]] . Consideremos el sub-haz R* de los elementos inversibles de R, es decir, R* = [x ε **R** / ∃ y : xy = 1] .

Este sub-haz puede verse como un producto fibrado en E:

$$\begin{array}{ccc} R^* & \rightarrow & R \times R \\ \downarrow & & \downarrow \text{" . "} \\ 1 & \xrightarrow{1} & R \end{array} \qquad x \rightarrow (x, x^{-1})$$

El correspondiente producto fibrado determinado en M por **R** y $\mathbf{R}^* = \mathbf{R} - \{0\}$ es transversal, luego es preservado por la inclusión $M \rightarrow E$. Se sigue que R^* es representable por el anillo $C^\infty(\mathbf{R}^*)$, $R^* = C^\infty(\mathbf{R}^*)$. Dado un sub-haz $F \subset H$, la negación de F, denota $\neg F \subset H$, es el más grande sub haz de H disjunto con F. Está caracterizado por la propiedad universal:

$$\forall X \subset H \quad \frac{X \subset \neg F}{X \cap F = \phi} \qquad \text{(donde } \phi \text{ es el sub haz vacío)}$$

Notemos que $\phi(\overline{A}) = \phi$ para todo $\overline{A} \varepsilon \underline{A}$ salvo para $A = \underline{0}$, en cuyo caso $\phi(\overline{0}) = 1$. Es decir, ϕ es representable por el anillo 0, $\phi = \overline{0}$.(ello se debe a que $\underline{0}$ está cubierto por la familia vacía en A^{op}). La regla semántica para ver cuándo una sección $A \xrightarrow{a} H$ se factoriza por $\neg F$ es la siguiente

$$\frac{\overline{A} \rightarrow \neg F \subset H}{\text{no } \overline{A} \xrightarrow{a} F \ \text{ y } \ \forall\ \overline{B} \xrightarrow{\varphi_a} \overline{A}, \ \text{si } \overline{B} \xrightarrow{\varphi_a} F \text{ entonces } \overline{B} = \phi}$$

Proposición 4: En el anillo R la siguiente fórmula es válida:

$$\forall\ x\ \varepsilon\ R \qquad x \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \text{ es inversible.}$$

Esto significa que los sub-haces $\neg \{0\}$ y R^* son iguales

Demostración: Una sección $\overline{A} \xrightarrow{a} R$, $\overline{A} \in A^{op}$ es un morfismo $C^\infty(\mathbf{R}) \rightarrow A$ en A. Es decir, un elemento $a \in A$. Se ve fácilmente (por ejemplo usando el producto fibrado arriba mencionado) que a se factoriza $A \xrightarrow{a} R^*$ exactamente cuando es un elemento inversible del anillo A. De esto se sigue que $R^* \cap \{0\} = \phi$. Luego $R^* \subset \neg\{0\}$. Supongamos ahora $A \xrightarrow{a} \neg\{0\}$. Poniendo $B = A/(a)$ en regla semántica de la negación se tiene que $A/(a) = 0$. Es decir $(a) = A$. Luego a es inversible y se tiene $A \xrightarrow{a} R^*$. Esto demuestra $\neg\{0\} \subset R^*$.

Ahora ponemos un ejercicio para el lector determinado a aprender estos asuntos.

Ejercicio: En el anillo R la siguiente fórmula es válida:

$$\forall\ x \in R \qquad x \text{ no es inversible} \quad \Leftrightarrow \quad x \in \Delta.$$

Esto significa que se tiene $\Delta = \neg R^* = \neg\neg\{0\}$. Es decir, los $x \in \Delta$ son aquellos x indistinguibles de 0. Los infinitesimales.

Dados dos subhaces $F \subset H$, $G \subset H$ la unión $F \cup G \subset H$ es el más pequeño sub haz de H que los contiene a ambos. Aquí nos van a interesar solamente uniones de sub haces de R, o más generalmente, de una variedad $M \ \varepsilon\ M$. Como este haz es representable, y sus cubrimientos resultan ser los cubrimientos abiertos de la variedad M en el sentido habitual, se tiene, para $F \subset M$ y $G \subset M$ dos subhaces cualesquiera de M:

$$\frac{F \cup G = M}{\exists \text{ un cubrimiento abierto } U_\alpha \subset M \text{ tal que } \forall \alpha \ \ U_\alpha \subset F \ \text{ o } \ U_\alpha \subset G}$$

Si F y G son representables, la unión en E implica pero no es equivalente a la unión conjuntista en M. Así por ejemplo mientras que $R^* \cup \{0\} = R$ en M, $R^* \cup \{0\} \neq R$ en E. Es decir, la fórmula $\forall x \in R\ x \neq 0 \vee x = 0$ no es válida en el anillo R en E.

Para tratar nociones locales *no* infinitesimales J. Penon [12] introduce una noción de *entorno* que puede imaginarse pensando a la negación en el topos como indicando lejanía. Si G, F son dos sub-haces de un haz H, entonces se define:

F es un entorno de G $\Leftrightarrow \neg G \cup F = H$

Es decir, si la fórmula: $\forall x \in H \quad x \notin G \vee \quad x \in F$ es válida que puede pensarse como afirmando que todo punto de H está en F o está lejos de G. La siguiente proposición es un caso particular de un resultado de J.Penon:

Proposición 5: Sea $N \subset M$ una sub variedad cerrada de una variedad $M \in M$. Entonces, un sub haz $F \subset D\,M$ es un entorno de N en el sentido de Penon si y solo si existe un abierto U de M tal que $N \subset U \subset F$.

Demostración: Si $\neg N \cup F = M$, se tiene un cubrimiento abierto U_α de M tal que $U_\alpha \subset \neg N$ o $U_\alpha \subset F$. Sea $x \in N$ y α tales que $x \in U_\alpha$. Se tiene entonces que $U_\alpha \cap N \neq \phi$ y por lo tanto $U_\alpha \not\subset \neg N$. Luego $U_\alpha \subset F$.

La unión de los U_α tales que $U_\alpha \subset F$ es el abierto buscado. Recíprocamente ,V=M-N es un abierto tal que $V \cap N = \phi$. Luego $V \subset \neg N$.

Sea U tal que $N \subset U \subset F$. El par U, V es el cubrimiento requerido.

7. El pasaje de lo infinitesimal a lo local.

Supongamos que se tiene una función $R \xrightarrow{g} R$ en E tal que $g_{|\Delta} = 0$. Es decir, tal que la restricción de g a Δ es cero. La función g es en realidad una función $\mathbf{R} \xrightarrow{g} \mathbf{R}$ en M, es decir $g \in C^\infty(\mathbf{R})$. Del hecho que $R = C^\infty(R)$ y $\Delta = C^\infty(\mathbf{R}) / J$, J = Ideal de las funciones de germen nulo, se sigue inmediatamente que $g \in J$, es decir, se tiene un abierto $U \subset R$, $0 \in U$ tal que $g|_U = 0$. Si F es el egalizador $F \rightarrow R \underset{0}{\overset{g}{\rightrightarrows}} R$, $F = [[\, x \in R \mid g(x) = 0]]$, puesto que $g|_U = 0|_U$, se tiene $U \subset F$. Como $R^* \cup U = R$, vemos que $R^* \cup F = R$ en E. Pero $\mathbf{R}^* = \neg\{0\}$, luego $\neg\{0\} \cup F = R$. Es decir, F es un entorno (de Penon) de cero. Tenemos pues:

$$\Delta \subset F \quad \Rightarrow \quad \neg\{0\} \cup F = R$$

o equivalentemente, la validez de la fórmula:

$$* \quad \forall x \in \Delta \quad g(x) = 0 \quad \Rightarrow \forall\, x \in R \quad x \neq 0 \ \vee\ g(x) = 0$$

Recordando el ejercicio $\Delta = \neg\neg\{0\}$, se tiene que R satisface el siguiente enunciado:

Axioma de suficiente cantidad de infinitesimales:

$[\, g(x) = 0 \cdot \forall\, x \in R \quad / \quad \neg(x \neq 0)\,] \Rightarrow [\forall x \in R \quad x \neq 0 \ \vee\ g(x) = 0]$

Hacemos notar que el enunciado, así escrito, tiene sentido para cualquier objeto anillo en cualquier topos, tal como es el caso con el axioma de tipo línea. En realidad, en el modelo $M \rightarrow E$ donde estamos trabajando, un hecho más general es cierto. Antes, una definición: $\Delta^n = C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, $\Delta^n \subset R^n$, donde $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$. es el anillo de gérmenes en cero de funciones C $^\infty$ de n variables $C^\infty(\mathbf{R}^n) \twoheadrightarrow C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$. Se tiene $\Delta^n = \bigcap_{0 \in U} U$, U abierto de R^n, y la intersección, por supuesto, calculada en E. Tenemos:

Proposición 6: Dada una variedad $M \in \mathcal{M}$ y una función $M \times R^n \xrightarrow{g} P$, se tiene:

$$M \times \Delta^n \subset F \Rightarrow \neg(M \times \{0\}) \cup F = M \times R^n,$$

donde $F = [[(p,x) \in M \times R^n \mid g(p,x) = 0]]$. Es decir, si g se anula en el cilindro infinitesimal, entonces g se anula en un entorno del eje.

Equivalentemente:

$(\forall x \in \Delta^n \ \forall p \in M \ g(p,x) = 0) \Rightarrow (\forall x \in R^n \ \forall p \in M \ \ x \neq 0 \vee g(p,x) = 0)$

Demostración: De nuevo, como $\mathcal{M} \to \mathcal{E}$ es plenamente fiel, g es en realidad una función $M \times \mathbf{R}^n \xrightarrow{g} \mathbf{R}$. Del hecho que $M \times R^n$ esté representado por el anillo $C^\infty(M \times \mathbf{R}^n) = C^\infty(M) \otimes_\infty C^\infty(\mathbf{R}^n)$ y $M \times \Delta^n$ por el anillo $C^\infty(M \times \mathbf{R}^n) / \tilde{J} = C^\infty(M) \otimes_\infty C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, se deduce que $g \in \tilde{J}$ es decir, g está localmente en el ideal J generado en $C^\infty(M \times \mathbf{R}^n)$ por las funciones de n-variables reales de germen nulo en el origen. Luego, el germen de g es nulo en todo punto del conjunto de ceros de este ideal, $Z(J) = M \times \{0\}$. Hay por lo tanto un abierto $U \subset M \times \mathbf{R}^n$, $M \times \{0\} \subset U$ y tal que $g|_U = 0$. Puesto que F es el egalizador $F \to M \times R^n \xrightarrow{g} R$ se tiene $U \subset F$. Si consideramos el abierto $M \times V \subset M \times \mathbf{R}^n$ donde $V = R^n - \{0\}$ puesto que $(M \times V) \cap (M \times \{0\}) = \phi$, se tiene $(M \times V) \subset \neg(M \times \{0\}$. Como, por otro lado, $(M \times V) \cup U = M \times \mathbf{R}^n$, se deduce que $\neg(M \times \{0\}) \cup F = M \times R^n$ en $\mathcal{E}$.

Una consecuencia inmediata de la existencia de suficiente cantidad de infinitesimales (tal como enunciado en la proposición precedente) es el hecho que todo flujo infinitesimal en una variedad M se extiende a un flujo local.

Proposición 7: Dado un flujo infinitesimal $M \times \Delta \xrightarrow{f} M$, $f(p,0) = p$, $f(p, s+t) = f(f(p,s), t)$, $p \in M$, $s, t \in \Delta$, en una variedad $M \in \mathcal{M}$ existe un (único) flujo local que extiende f. Más precisamente: Se tiene $M \times R \xrightarrow{f} M$ tal que:

i) $\forall t \in \Delta \ \ \forall p \in M$ coincide con el flujo dado.

ii) $\forall x, y \in R \ \ \forall p \in M \ \ (x, y) \neq (0,0) \vee f(p, x+y) = f(f(p,x), y)$.

La unicidad es local, cualquiera sea $M \times R \xrightarrow{h} M$ tal que i), ii) se tiene:

$$\forall x \in R \ \ \forall p \in M \quad x \neq 0 \ \vee \ f(p,x) = h(p,x)$$

Hacemos notar que de la proposición 5 se sigue que se tiene un abierto U, $M \times \Delta \subset U \subset M \times R$ y una única $U \xrightarrow{f} M$ que es un flujo que extiende f.

Demostración: Podemos suponer que el flujo se extiende de alguna manera a una función $M \times R \xrightarrow{f} M$. En efecto, en la demostración de la proposición precedente se ha visto que $M \times \Delta$ está representado por un anillo A cociente del anillo $C^\infty(M \times \mathbf{R})$ que respresenta a $M \times R$. Supongamos por ejemplo que $M = R^s$. Entonces M está representado por $C^\infty(\mathbf{R}^s)$ que es un anillo C^∞ libre. Se sigue inmediatamente que la flecha $C^\infty(R^s) \to A$ que corresponde a f se levanta a una flecha $C^\infty(\mathbf{R}^s) \to C^\infty(M \times R)$, que da la extensión buscada. En el caso general de una variedad cualquiera $M \in \mathcal{M}$ este hecho sigue siendo cierto, pero una demostración sencilla y directa no se nos ocurre en este momento. Sea pues f una extensión cualquiera de f y sea $g(p,x,y) = f(f(p,x), y) - f(p, x+y)$ (Suponemos sin pérdida de generalidad que M está contenida en R^s para algún s, $M \subset R^s$). Aplicando la proposición 6 a las coordenadas de g se termina la demostración. De igual manera se deduce la unicidad local, poniendo $g(p,x) = h(p,x) - f(p,x)$.

Comentario: Supongamos cierto el axioma de suficiente cantidad de infinitesimales tal como el enunciado (*) al principio de § 7 y consideremos la siguiente demostración sintética de la proposicion 6: Para cada $p \in M$ se tiene una función $g(p, -)$ de R en R que se anula en todo $x \in \Delta$. Luego por (*) tenemos $\forall x \in R \quad x \neq 0 \lor g(p, x) = 0$. Pero como esto vale cualquiera sea $p \in M$, se deduce $\forall x \in R \quad \forall p \in M \quad x \neq 0 \lor g(p, x) = 0$. Luego, queda demostrada la proposición. ¿ Es esta demostración válida?. Bueno, tal como está enunciado (*) no, pues $p \in M$ es una variable de tipo M, luego $g(p, -)$ no es en realidad una flecha $R \to R$ en el topos *E*, y por lo tanto (*) no se puede aplicar. Pero supongamos se tiene un axioma (*) precedido del cuantificador $\forall g \in R^R$. En este caso, $\forall p \in M \quad g(p, -) \in R^R$ donde g es la del enunciado de la proposición 6) y la demostración resulta válida. De hecho, el axioma de suficiente cantidad de infinitesimales (*) con el cuantificador $\forall g \in R^R$ es cierto en el modelo, y su verificación puede hacerse fácilmente mediante las reglas semánticas que el lector puede encontrar en [2].

8. El pasaje de lo local a lo global.

Un resultado clásico de la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias dice que todo campo vectorial en una variedad M se integra *globalmente* si la variedad es *compacta*. La noción de compacidad para objetos de un topos *E* puede definirse utilizando una propiedad característica de los espacios compactos. A saber, si M es compacto, cualquiera sea el espacio X, dado un punto $x_0 \in X$, todo entorno del eje, $M \times \{x_0\} \subset U \subset M \times X$ contiene un entorno tubular. Es decir, existe un abierto V, $x_0 \in V \subset X$, tal que $M \times V \subset U$. (Ver [7]). Este hecho, mediante la noción de entorno de Penon, se expresa en la lógica interna del topos de la manera siguiente:

Definición ([7]). Dado un topos *E*, un objeto $M \in E$ se dice *compacto* si para cualquier $X \in E$, la siguiente fórmula es válida (donde $x \in X$ y $p \in M$):

$$\forall x \; \forall p \; (\varphi(x) \lor \psi(p, x)) \Rightarrow \forall x (\varphi(x) \lor \forall p \; \psi(p, x)),$$

cualesquiera sean las proposiciones φ y ψ, predicables respectivamente sobre X y $M \times X$.

Se demuestra que en el modelo $M \to E$, una variedad $M \in M$ es compacta en el sentido clásico si y solamente si satisface esta definición. Como ilustración, demostraremos aquí un caso particular:

Proposición 8: Dada una variedad compacta $M \in M$ y una función $M \times R^n \xrightarrow{g} R$, se tiene:

$$\forall x \in R^n \; \forall p \in M \; (x \neq 0 \lor g(p, x) = 0 \Rightarrow \forall x \in R^n (x \neq 0 \lor \forall p \in M \; g(p, x) = 0)$$

Demostración: El antecedente de la implicación dice que el sub haz $F \subset M \times R^n$, $F = [[(x, p) \mid g(x, p) = 0]]$ es un entorno de Penon del eje $M \times \{0\} \subset F \subset M \times R^n$. Por la proposición 5 se tiene un abierto U de $M \times \mathbf{R}^n$ tal que $M \times \{0\} \subset U \subset F$. Como M es compacta, existe un abierto $V \subset R$ tal que $M \times V \subset U$. Luego $M \times V \subset F$. Pero esto dice entonces (de nuevo por la proposición 5) que el sub haz $G \subset R^n$, $G = [[x \mid \forall \; p \in M \; g(x, p) = 0]]$ es un entorno de Penon de $0 \in \mathbf{R}^n$. Es decir, precisamente lo que afirma el consecuente de la implicación.

Este hecho, junto con la *Arquimedianidad* de la línea R en el modelo $M \to E$ es lo que permite extender un flujo local a un flujo global. La preservación de cubrimientos abiertos por la inclusión $M \to E$ dice en particular que el cubrimiento $(-n, n) \subset \mathbf{R}$ en *M* es preservado. Es decir, en el topos *E* se tiene $R = \bigcup_n (-n, n)$. Esto, en la lógica de *E* significa que

$\forall \; x \in R \; \exists \; n \; x \in (-n,n)$.

Proposición 9: Dado un *flujo local* $M \times R \xrightarrow{f} M$ en una variedad compacta M, es decir, una f tal que:

$$\forall x, y \in R \quad \forall p \in M \quad (x, y) \neq (0, 0) \ \vee \ f(p, x+y) = f(f(p, x), y).$$

existe un único *flujo global* $M \times R \xrightarrow{h} M$ que extiende f. Es decir, existe una única h tal que:

i) $\forall x \in R \ \forall p \in M \quad x \neq 0 \ \vee \ h(p, x) = f(p, x)$

ii) $\forall \ x, y \in R \quad \forall \ p \in M \quad h(p, x+y) = h(h, \varphi, x), y)$.

Demostración: Como antes, se define $g(x, y, p) = f(p, x+y) - f(f(p, x), y)$. Entonces, de la proposición 8 aplicada a las coordenadas de g se sigue:

$$\forall \ x, y \in R \quad ((x, y) \neq (0, 0) \ \vee \ \forall p \in M \quad f(p, x+y) = f(f(p, x), y))$$

Es decir, los x,y tales que $\forall p \in M$ f satisface la ecuación de flujo forman un entorno (de Penon) de (0,0). Luego, por la proposición 5 se tiene un $\varepsilon > 0$ tal que:

$$\forall \ x, y \in (-\varepsilon, \varepsilon) \quad \forall p \in M \quad f(p, x+y) = f(f(p, x), y)$$

(notar que la noción de flujo local es precisamente este enunciado pero con los cuantificadores en el otro orden).

Se tiene pues un flujo $M \times (-\varepsilon, \varepsilon) \xrightarrow{f} M$, que por adjunción da una función $(-\varepsilon,\varepsilon) \xrightarrow{f} M^M$ (denotada también con la letra f) que transforma la *suma* de números reales en la *composición* de M^M. Dado un $x \in R$ cualquiera, sean n, k enteros tales que $x \in (-n,n)$ y $1/\varepsilon \in (-k,k)$. Entonces $x/nk \in (-\varepsilon,\varepsilon)$ y se define $h(x) = (f(x/nk))^{nk}$, donde la notación exponencial indica la composición en M^M. Dos cuentas fáciles muestran que h está bien definida (no depende del n elegido), que transforma la suma de R en la composición de M^M, y que es el único tal que coincide con f en $(-\varepsilon, \varepsilon)$.

Comentario: La demostración de que todo campo vectorial en una variedad compacta $M \in \mathcal{M}$ se integra globalmente en el modelo $\mathcal{M} \to \mathcal{E}$ aquí considerado pudo haberse hecho directamente (apoyándose en los resultados clásicos) sin pasar por las etapas: De D a Δ, de Δ a U, de U a R, $M \times D \subset M \times \Delta \subset U \subset M \times R$. De hecho, puede verse que la demostración de la Proposición 3 ya da una extensión local a un abierto $U \subset M \times R$. Sin embargo, el tratamiento con Δ y con el axioma de suficiente cantidad de infinitesimales se hace, pues estas son propiedades más *básicas* que la integración de campos vectoriales en variedades, y pueden enunciarse como *axiomas* sobre un objeto anillo R en cualquier topos $\mathcal{E}$. Los mismos comentarios se aplican al pasaje de U a M x R. La proposición 9 pudo haberse demostrado directamente sin pasar por la noción de compacidad de [6]. Finalmente, para el lector advertido quiero comunicar que los resultados aquí expuestos en las proposiciones 3, 7 y 9 valen internamente, es decir, precedidos de los cuantificados universales en la variable de tipo exponencial correspondiente (ver [6]).

Referencias

[1] ARTIN, M. *Grothendieck Topologies*, Harvard University, 1962.

[2] BRUNO, O. *Internal Mathematics in Toposes*, Trabajos de Matemática 70, I.A.M. Casilla de Correo 1727, 1000 Buenos Aires, Argentina.

[3] DUBUC, E.J. *Sur les Modeles de la Geometrie Differentielle Syntetique*, Cahiers de Top. et Geom. Diff. Vol. XX - 3.

[4] DUBUC, E.J. *Open Covers and Infinitary Operations in C Rings*, Cahiers de Top. et Geom. Diff. Vol. XXII - 3.

[5] DUBUC, E.J. *C^{∞}-Schemes*, Amer. Journal of Math. Vol. 103-4.
[6] DUBUC, E.J. *Germ Representability and local integration of vector fields in a well adapted model of SDG*, Aarhus Preprint Series 1986/87 No.5; enviado a Journal at Pure and Applied Algebra.
[7] DUBUC, E.J. et PENON, J. *Objects Compacts dans les Topos*, Trabajos de Matemática 60, I.A.M. Casilla de Correo 1727, 1000 Buenos Aires, Argentina.
[8] GUILLEMIN, V and POLLACK, A. *Differential Topology*, Prentice-Hall, Inc.
[9] KOCK, A. *A simple axiomatics for Differentiation*, Math. Scand. 40.
[10] KOCK, A. *Synthetic Differential Geometry*, Cambridge Univ. Press.
[11] LAWVERE, F.W. *Categorical Dynamics in Topos Theoretic Methods in Geometry*, Various Publication Series 30 (1979).
[12] PENON, J. *Topologie et Intuitionism in Journees de Faisczaux et Logique*, 1981. Univ. Paris Nord, pre-publications mathematique.
[13] WEIL, A. *Theorie des Points Proches sur les Varietes Differentiables*, Collq. Topologic et Geometrie Differentielle, Strasbourg 1953.

Nota: Estos resultados fueron expuestos en Vaquerías, Córdoba, República Argentina, y aparecen en varias publicaciones mías. Sin embargo, esta presentación se mantiene original, y espero accesible a una audiencia mayor que la formada por los especialistas en el tema.

Recibido por U.M.A. el 16 de mayo de 1989.