Revista de la
Unión Matemática Argentina
Volumen 36, 1990.

M_3 –RETICULADOS FINITOS

ALDO FIGALLO

RESUMEN. En este artículo se obtiene un teorema de factorización para los M_3-reticulados finitos y se indica una construcción de los M_3-reticulados con un número finito de generadores libres.

1. INTRODUCCION

En [3] se introduce la noción de M_3-reticulado como álgebras $(A,\vee,\wedge,\sim,\Delta,0)$ de tipo $(2,2,1,1,0)$ tales que $(A,\vee,\wedge,0)$ es un reticulado distributivo con primer elemento 0 y $\sim,\Delta$ son operadores unarios definidos sobre A que verifican los siguientes axiomas para todo $x,y \in A$:

M1 $\Delta(x \wedge \sim x) = 0$.

M2 $\sim\sim x = x$.

M3 $x = \Delta x \vee \sim\nabla x$.

M4 $\sim\Delta x \leqslant \Delta x$.

M5 $\Delta\nabla x = \nabla x$.

M6 $\Delta(x \vee y) = \Delta x \vee \Delta y$.

M7 $\nabla(x \wedge y) = \nabla x \wedge \nabla y$.

donde ∇x es una abreviatura de $x \vee \sim x$ (M0).

En este mismo trabajo se prueba que valen:

M8 $\Delta(x \wedge y) = \Delta x \wedge \Delta y$.

M9 $\nabla(x \vee y) = \nabla x \vee \nabla y$.

M10 Si $\Delta x = \Delta y$, $\nabla x = \nabla y$ entonces $x = y$.

M11 $\sim x \leqslant \nabla x$.

M12 Si $\sim x = x$ entonces $x = 0$.

M13 Si $\sim x = 0$ entonces $x = 0$.

Además se puede comprobar que vale

M14 $\sim(x \wedge \nabla y) = \sim x \wedge \nabla y$.

En lo que sigue se dirá el M_3-reticulado A.

El conjunto K(A) de los elementos x del M_3-reticulado A tales que $x = \nabla x$, o equivalentemente $x = \Delta x$, llamados invariantes, es un M_3-subreticulado de A.

Un n-ideal N de un M_3-reticulado A es un ideal de A tal que: $x \in N$ implica $\sim x \in N$, o equivalentemente: $x \in N$ implica $\nabla x \in N$.

Un n-ideal es primo, irreducible o completamente irreducible, si es un ideal primo, irreducible o completamente irreducible.

Si G es un parte de A, con S(G), N(G), I(G) se representa al M_3-subreticulado, n-ideal e ideal generados por G. Si X es una parte de A entonces $K(X) = \{\nabla x : x \in X\}$.

1.1. LEMA. $N(g) = I(K(G))$.

1.2. TEOREMA. *Dado un* M_3-*reticulado* A *no trivial, existe un conjunto no vacío* E *tal que* A *es isomorfo a un* M_3-*subreticulado de* T^E *donde* $T = \{0, 1/2, 1\}$ *es la cadena con tres elementos* $0 < 1/2 < 1$ *y* $\sim, \Delta$ *están definidos por las tablas*

v	$\sim x$	Δx
0	0	0
1/2	1	0
1	1/2	1

y $E = E(A) = \{M \subseteq A : M$ es un n-ideal primo de $A\}$ *es el espectro primo de* A (ver al respecto [3]).

El siguiente resultado es de importancia para lo que sigue.

1.3. LEMA. *Si* A *es un* M_3*-reticulado finito entonces* K(A) *es un álgebra de Boole.*

Demostración. Es consecuencia inmediata del teorema 1.2. pues $K(T) = \{0,1\}$ y $x' = \Delta\sim(x \vee \sim 1)$ es la operación de complementación.

1.4. COROLARIO. *Si* A *es un* M_3*-reticulado finito con último elemento* $1 \in A$, *las siguientes condiciones son equivalentes dos a dos:*

1°) M *es un* n*-ideal primo de* A.

2°) *Existe* b, *átomo dual de* K(A) *tal que* $M = I(b)$.

3°) M *es un* n*-ideal maximal de* K(A).

Demostración. 1°) ⇒ 2°) Sea $M \subsetneq A$ un n-ideal primo de A, como A es finito entonces existe $b \in A$ tal que $M = I(b)$, por otra parte como $\nabla b \in M$ se tiene $\nabla b \leqslant b$, luego $\nabla b = b$ y $b \in K(A)$.

Si $c \in K(A)$ es tal que $b \leqslant c \leqslant 1$, por el lema 1.2. K(A) es un álgebra de Boole, existe $c' \in K(A)$ tal que $c \wedge c' = 0 \in I(b)$, y como I(b) es primo c o $c' \in I(b)$, en cuyo caso $c = b$ o $c' \in I(b)$ y por lo tanto $c' \leqslant b$, luego $1 = c \vee c' \leqslant b \vee c = c$, de donde $c=1$, lo que muestra que b es átomo dual de K(A).

2°) ⇒ 3°) Sea $b \in K(A)$ un átomo dual, como $b = \nabla b$ entonces por el lema 1.1. I(b) es un n-ideal, si se supone que $M \subsetneq A$ es un n-ideal tal que $I(b) \subseteq M$, por un razonamiento análogo resulta $M = I(c)$ con $c \in K(A)$ luego $b \leqslant c \leqslant 1$ y por tanto $c = b$ o $c = 1$ de donde $M = I(b)$ o $M = A$.

3°) ⇒ 1°) inmediata.

1.5. TEOREMA. *Si* A *es un* M_3*-reticulado finito y* b *es un átomo dual de* K(A), *entonces* A *y* $T \times I(b)$ *son* M_3*-reticulados isomorfos.*

Demostración. Sea $b' \in K(A)$ el complemento booleano de K(A), entonces:

1°) $I(b) \cap I(b') = \{0\}$.

Además se verifican:

2°) $K(I(b')) = \{0,b'\}$.

3°) $I(b')$ y T son M_3-reticulados isomorfos.

En efecto:

2°) Sea $x \in K(I(b'))$ tal que $x \neq 0$; de $x \wedge b = 0$ resulta $b \leqslant x'$ (1), además como $x \wedge x' = 0 \in I(b)$ y $x \notin I(b)$ por el corolario 1.4. $x' \in I(b)$, de donde $x' \leqslant b$ (2). De (1) y (2) $x=b'$.

3°) (i) $|I(b')| \leqslant 3$: Sean x,y elementos de $I(b')$ no invariantes, entonces $\Delta x < x < \nabla x$, $\Delta y < y < \nabla y$. De 2°) $\Delta x = \Delta y = 0$, $\nabla x = \nabla y = b'$ y por M10 $x=y$.

De (i) y el teorema 1.2. resulta que $I(b')$ y T son isomorfos.

Por otra parte es bien conocido que $h: A \to I(b') \times I(b)$ definida por $h(x) = (x \wedge b', x \wedge b)$ es un isomorfismo de reticulados. Teniendo en cuenta M8 y M14 se prueba que es un isomorfismo de M_3-reticulados.

1.6. COROLARIO. *Si* A *es un* M_3*-reticulado finito entonces* A *y* T^n *son isomorfos, donde* $n=1$ *si y sólo si* A *es simple, y si* $n > 1$ *entonces* n *es el número de átomos de* $K(A)$.

2. M_3-RETICULADOS LIBRES FINITAMENTE GENERADOS

La definición de M_3-reticulado con un conjunto de generadores libres es la habitual.

2.1. DEFINICION. Sea $c > 0$ un número cardinal. Un M_3-reticulado, que se notará $M_3(c)$ se dice un M_3-reticulado libre con c generadores libres si las siguientes condiciones son verificadas:

L1 $M_3(c)$ contiene un conjunto G de generadores de potencia c.

L2 Si A es un M_3-reticulado y $f:G \to A$ es una aplicación, existe un homomorfismo $h:M_3(c) \to A$ que prolonga a f.

Como la clase de los M_3-reticulados es una variedad, para todo cardinal $c > 0$ existe $M_3(c)$ [2], y es única a menos de isomorfismos. Además el homomorfismo h cuya existencia asegura L2 es único.

2.2. LEMA. *Si* $n > 0$ *es un número entero entonces* $M_3(n)$ *es un álgebra finita.*

Demostración. Sea $E(M_3(c))$ el espectro primo de $M_3(c)$, en virtud del teorema 1.2., $M_3(c)$ es isomorfo a una subálgebra de $T^{E(M_3(c))}$.

Probemos ahora que $E(M_3(c))$ es un conjunto finito:

Sean $EPI(M_3(c),T)$ el conjunto de todos los epimorfismos de $M_3(c)$ en T y $(T^G)_* = \{f \in T^G: S(f(G)) = T\}$, la aplicación que a cada $h \in EPI(M_3(c),T)$ le hace corresponder la restricción de h a G es biyectiva, y en consecuencia $EPI(M_3(c),T)$ es un conjunto finito. Por otra parte la aplicación

$\beta:EPI(M_3(c),T) \to E(M_3(c))$ definida por $\beta(h) = h^{-1}(1)$ también establece una biyección, y esto prueba que $M_3(c)$ es un M_3-reticulado finito.

2.3. LEMA. $M_3(c) \cong T^{(3^n-1)}$, *donde* $\cong$ *denota álgebras isomorfas y* $|M_3(c)| = 3^{3^n-1}$.

Demostración. Por 2.2., 1.6 y 1.4. $M_3(c) \cong T^K$ con $K = |E(M_3(c)|$, finalmente $K = |EPI(M_3(c),T)| = |(T^G)_*| = 3^n-1$, pues $(T^G)_* = T^G - \{f_o\}$ donde $f_o:G \to T$, $f_o(g) = 0$ para todo g.

REFERENCIAS

[1] R.BALBES and P.H.DWINGER, *Distributive lattices* (1974), University of Missouri Press.

[2] G.BIRKHOFF, *Lattice theory*, Amer.Math.Soc.,Coll.Pub.25, Providence (1967).

[3] A.V.FIGALLO, *Los* M_3-*reticulados*, Rev.Colombiana de Matemá tica Vol.XXI (1987).

[4] G.C.MOISIL, *Essais sur les logiques non chrysippiennes*, Ed.Academiei Bucarest (1972).

[5] A.MONTEIRO, *Sur la définition des algèbres de Lukasiewicz trivalentes*, Bull.Math.Soc.Sci.Math.Phys. R.P.Roum. 7(55) (1963).

[6] M.E.VALENTINUZZI, *Three valued propositional calculus of Lukasiewicz and three-position double switches*, IEEE, Trans. on Electronic Computers, Vol. Ec-16 N°1 (1967).

Instituto de Matemática
Universidad Nacional de San Juan
Av.Libertador General San Martín 1109 (Oeste)
5400 - San Juan
Argentina

Recibido en mayo de 1988.
Segunda versión julio de 1988.