Revista de la
Unión Matemática Argentina
Volumen 36, 1990.

APLICACION DEL METODO DE ELEMENTOS FINITOS MIXTOS A LA APROXIMACION NUMERICA DE PROBLEMAS DE CONTROL CON RETARDO

NESTOR E. AGUILERA y ELENA M. FERNANDEZ BERDAGUER

1. INTRODUCCION.

Presentamos un método basado en la técnica de elementos finitos mixtos, para aproximar numéricamente el minimizante de una funcional de costo cuadrática sujeta a restricciones diferenciales con retardos invariantes en el tiempo.

El problema es de interés en las aplicaciones, pues los sistemas con retardo aparecen en modelos de problemas aeroelásticos, de biología, de procesos industriales, etc. Por otra parte, una gran cantidad de problemas hiperbólicos de control con condiciones de contorno pueden ser transformados en problemas equivalentes de ecuaciones diferenciales con retardos, de modo tal que esta última forma reduce la complejidad de la dependencia de los parámetros en el modelo. Una referencia clásica para este problema es el libro de J.Hale [3].

La aproximación numérica al problema de control óptimo con costo cuadrático para sistemas con retardos ha sido tratada por numerosos autores, usando distintas técnicas. Entre los esquemas más conocidos cabe mencionar el de la aproximación del sistema con retardo por un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de alto orden, resolviéndose luego los problemas de control asociados con estos sistemas. Este método ha sido usado por largo tiempo, sin embargo los problemas de convergencia y orden de convergencia fueron considerados recién en 1975. El lector puede consultar el trabajo de Banks y Burns [1] que es uno de los primeros sobre el tema, donde además podrá encontrar una reseña histórica del tratamiento del problema. Otros métodos son los clásicos de discretización de espacio y tiempo, en este caso los problemas de convergencia han sido tratados recientemente por Reber [5].

En este trabajo tomamos un punto de vista diferente, mirando al problema de punto de ensilladura que resulta de aplicar multiplicadores de Lagrange, lo que nos permite utilizar la teoría de Brezzi [2] para dichos problemas.

El método que empleamos puede ser usado en problemas más generales que el que consideramos, por ejemplo en el caso en que los coeficientes son variables, en sistemas neutrales, en problemas con horizonte infinito y con funcionales de costo convexas más generales.

NOTACIONES.

$\mathbf{R}^n$ es el espacio euclídeo de n dimensiones, con elementos $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, el producto interno de dos vectores $x, y \in \mathbf{R}^n$ se denota simplemente por xy.

$C(a,b;\mathbf{R}^n)$ es el espacio de funciones continuas definidas sobre el intervalo $[a,b]$ con valores en $\mathbf{R}^n$.

$\mathbf{L}^2(a,b;\mathbf{R}^n)$ es el espacio de funciones de (a,b) en $\mathbf{R}^n$ de cuadrado integrable, i.e. tales que

$$\int_a^b x(t)x(t)dt$$

es finita.

$\mathbf{H}^k(a,b;\mathbf{R}^n)$, $k = 0,1,\ldots$, es el espacio de funciones del intervalo (a,b) con valores en $\mathbf{R}^n$ cuyas k derivadas en el sentido de las distribuciones se pueden representar como funciones de $\mathbf{L}^2(a,b;\mathbf{R}^n)$, cuando $k = 0$, $\mathbf{H}^k(a,b;\mathbf{R}^n)$ coincide con $\mathbf{L}^2(a,b;\mathbf{R}^n)$. La norma de $v \in \mathbf{H}^k(a,b;\mathbf{R}^n)$ se indica por

$$\|v\|_{\mathbf{H}^k(a,b;\mathbf{R}^n)}$$

y, cuando no hay lugar a confusión, simplemente por $\|v\|_k$.

Finalmente, para $b > 0$, $h > 0$ y $k = 0,1,\ldots$ llamaremos

$S^k(-h,b;\mathbf{R}^n)$ al espacio de funciones φ tales que $\varphi(t) = 0$ para $t < 0$, $\varphi \in \mathbf{H}^k(0,T;\mathbf{R}^n)$, y si $k > 0$, también pedimos $\varphi \in \mathbf{H}^{k-1}(-h,T;\mathbf{R}^n)$. En $\mathbf{S}^k(-h,b;\mathbf{R}^n)$ definimos la norma

$$\|\varphi\|_{\mathbf{S}^k} = \begin{cases} \left\|\dfrac{d\varphi}{dt}\right\|_{\mathbf{H}^{k-1}(0,b;\mathbf{R}^n)} & \text{si} \quad k = 1,2,\ldots \\ \|\varphi\|_{\mathbf{L}^2(0,b;\mathbf{R}^n)} & \text{si} \quad k = 0. \end{cases}$$

Cuando no haya lugar a confusión, pondremos simplemente S^k en vez de $\mathbf{S}^k(-h,b;\mathbf{R}^n)$.

2. DESCRIPCION DEL SISTEMA Y PROBLEMA DE CONTROL OPTIMO.

Nos interesa encontrar aproximaciones discretas al problema (P):

(P) Encontrar un par óptimo $(\bar{x},\bar{u})$, que minimice el funcional

$$J(x,u) = x(T)Cx(T) + \int_0^T (xQx+uRu)dt$$

sujeto a $u \in \mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{R}^n)$ y las condiciones

$$\dot{x}(t) = \sum_i^N A_i x(t-h_i) + \int_{-h}^0 A(\theta)x(t+\theta)d\theta + Bu(t), \quad t \in (0,T] \qquad [2.1]$$

$$x(t) = x_0(t) \ ; \ -h \leqslant t < 0 \ ; \ x(0) = x_0 \qquad [2.2]$$

donde $N > 0$; $0 = h_0 < h_1 < \ldots < h_N = h$; $x(t) \in \mathbf{R}^n$; $u(t) \in \mathbf{R}^m$; las matrices $C \in \mathbf{R}^{n\times n}$ y $Q \in \mathbf{R}^{n\times n}$ son simétricas y semidefinidas positivas; la matriz $R \in \mathbf{R}^{m\times m}$ es simétrica y definida positiva; $A_i \in \mathbf{R}^{n\times n}$ para $i = 0,1,\ldots,N$; $B \in \mathbf{R}^{n\times m}$; y por simplicidad, $\theta \longrightarrow A(\theta) \in \mathbf{R}^{n\times n}$ es una aplicación continua para $\theta \in [-h,0]$.

Poniendo

$$Ax = \sum_i^N A_i x(t-h_i) + \int_{-h}^0 A(\theta)x(t+\theta)d\theta \ ,$$

observamos que para que el funcional $J(x,u)$ y las ecuaciones

2.1-2.2 tengan sentido, en general, necesitamos $u \in \mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{R}^n)$, $\dot{x}-Ax \in \mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{R}^n)$ y $x \in \mathbf{C}(0,T;\mathbf{R}^n)$ (por lo que $x \in \mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{R}^n)$). Sin embargo, debido a la compacidad del operador A, tenemos el siguiente resultado:

2.3. TEOREMA. *Dados* $f \in \mathbf{H}^k(0,T;\mathbf{R}^n)$, $g \in \mathbf{H}^k(-h,0;\mathbf{R}^n)$, $k = 0$ ó 1, *y el valor* $g(0)$, *con* $g(0) = \lim_{t\uparrow 0} g(t)$ si $k = 1$, *entonces existe una única* $x \in \mathbf{H}^k(-h,T;\mathbf{R}^n)$ *tal que*

i) $x(t) = g(t)$ *para* $-h < t \leqslant 0$

ii) $\dot{x}-Ax = f$ *en* $(0,T)$

iii) $\lim_{t\downarrow 0} x(t) = g(0)$ *si* $k = 1$

Más aún $x \in \mathbf{H}^{k+1}(0,T;\mathbf{R}^n)$, *y para alguna constante positiva* c,

$$\|x\|_{\mathbf{H}^{k+1}(0,T;\mathbf{R}^n)} \leqslant c(|g(0)|+\|g\|_{\mathbf{H}^k(-h,0;\mathbf{R}^n)}+\|f\|_{\mathbf{H}^k(0,T;\mathbf{R}^n)})$$

(*recordar que* $|g(0)| \leqslant c\|g\|_1$ *si* $k=1$).

2.4. NOTA.

i) Si bien el resultado del teorema 2.3 es conocido, por completitud damos una demostración de este hecho en el apéndice.

ii) Para obtener mayor regularidad, es decir para $k > 1$, es necesario establecer condiciones de compatibilidad adicionales entre A, f y g.

iii) Por el resultado anterior, en el problema P podemos requerir solamente $u \in \mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{R}^n)$, ya que entonces las condiciones 2.1-2.2 garantizan $\dot{x} \in \mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{R}^n)$ y $x \in \mathbf{C}(0,T;\mathbf{R}^n)$.

Una técnica usual para resolver problemas como P es la de introducir multiplicadores de Lagrange para posteriormente resolver un problema de puntos de ensilladura, técnica que adoptamos. Resulta entonces que si el par óptimo para el problema P es $(\bar{x},\bar{u})$, existe una función $\bar{\eta}$ (el multiplicador de Lagrange) tal que $(\bar{x},\bar{u},\bar{\eta})$ es un punto de ensilladura para el funcional

$$x(T)Cx(T) + \int_0^T (xQx+uRu-2\eta(\dot{x}-Ax-Bu))dt.$$

2.5. NOTA.

Si $x_0 \in \mathbf{H}^k(-h,0;\mathbf{R}^n)$, k=0 ó 1, usando el teorema 2.3 con $g = x_0$ y $f = 0$, x_0 puede extenderse a todo el intervalo $(-h,T]$, obteniendo $x_0 \in \mathbf{H}^{k+1}(0,T;\mathbf{R}^n)$, y

$$\|x_0\|_{\mathbf{H}^{k+1}(0,T;\mathbf{R}^n)} \leqslant c\|x_0\|_{\mathbf{H}^k(-h,0;\mathbf{R}^n)} .$$

Por lo tanto podemos suponer sin pérdida de generalidad que x_0 está definida en todo el intervalo $(-h,T]$. Poniendo $x(t) = x_0(t)+y(t)$, con $y(t) = 0$ para $t \leqslant 0$, y análogamente, $\bar{x}(t) = x_0(t)+\bar{y}(t)$, tenemos que el punto buscado $(\bar{y},\bar{u},\bar{\eta})$ con $\bar{y} \in \mathbf{S}^1(T;\mathbf{R}^n)$, $\bar{u} \in \mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{R}^m)$ y $\bar{\eta} \in \mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{R}^n)$ debe satisfacer el sistema de ecuaciones

$$\bar{y}(T)Cy(T) + \int_0^T yQ\bar{y}dt - \int_0^T \bar{\eta}(\dot{y}-Ay)dt = -x_0(T)Cy(T) - \int_0^T x_0Qydt$$

$$\int_0^T uR\bar{u}dt - \int_0^T \bar{\eta}Budt = 0$$

$$\int_0^T \eta(\dot{\bar{y}}-A\bar{y})dt - \int_0^T \eta B\bar{u}dt = 0$$

para cualquier terna de funciones $y \in \mathbf{S}^1(-h,T;\mathbf{R}^n)$, $u \in \mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{R}^m)$ y $\eta \in \mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{R}^n)$.

El siguiente es un resultado clásico para el problema P (ver por ejemplo [4], proposición 3.3):

2.6. TEOREMA. *Si el dato inicial* $x_0 \in \mathbf{H}^1(-h,0;\mathbf{R}^n)$, *con* $x_0 = \lim_{t\uparrow 0} x(t)$, *entonces existe un único par óptimo* $(\bar{x},\bar{u})$ *para el problema P. Este par satisface, para alguna constante positiva* c *que no depende de* x_0,

i) $\bar{x} \in \mathbf{H}^2(0,T;\mathbf{R}^n)$ *y* $\|\bar{x}\|_2 \leqslant c\|\bar{x}_0\|_1$

ii) $\bar{u} \in \mathbf{H}^1(0,T;\mathbf{R}^m)$ *y* $\|\bar{u}\|_1 \leqslant c\|\bar{x}_0\|_1$

Más aún, el multiplicador de Lagrange asociado, $\bar{\eta}$, satisface

iii) $\bar{\eta} \in \mathbf{H}^1(0,T;\mathbf{R}^n)$ *y* $\|\bar{\eta}\|_1 \leqslant c\|\bar{x}_0\|_1$.

2.7. NOTA.

Así como en la nota 2.4, observamos que si se pide $x_0 \in \mathbf{H}^2(-h,0;\mathbf{R}^n)$, no se obtiene mayor regularidad en $\bar{x}$ ó $\bar{u}$ en general, puesto que hay que pedir condiciones de compatibilidad de las derivadas de x_0 y el operador A.

Nos interesa utilizar los resultados de F.Brezzi sobre puntos de ensilladura [2], y para ello es conveniente introducir nuevas notaciones:

Sean $\mathbf{X} = S^1(-h,T;\mathbf{R}^n)$, $\mathbf{U} = \mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{R}^m)$, $\mathbf{V} = \mathbf{X}\times\mathbf{U}$, con norma dada por

$$\|v\|_V^2 = \|\dot{y}\|_0^2 + \|u\|_0^2 \,, \quad \text{si} \quad v = (y,u)$$

y $\mathbf{W} = \mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{R}^n)$.

Introducimos las funcionales:

i) a definida en $\mathbf{V}\times\mathbf{V}$ como

$$a(v,v') = y(T)Cy'(T) + \int_0^T (yQy'+uRu')dt,$$

si $v = (y,u)$, $v' = (y',u')$

ii) b definida en $\mathbf{V}\times\mathbf{W}$ por

$$b(v,\eta) = \int_0^T \eta(\dot{y}-Ay-Bu)dt \quad , \quad \text{si } v = (y,u)$$

iii) L definida sobre $\mathbf{V}$ por

$$L(v) = -x_0(T)Cy(T) - \int_0^T x_0Qydt \,, \quad \text{si } v = (y,u).$$

Con estas notaciones nuestro problema de Punto de Ensilladura (P.E.) se puede escribir como:

(P.E.) Encontrar $\bar{v} \in \mathbf{V}$, $\bar{\eta} \in \mathbf{W}$ tales que

$$a(\bar{v},v) + b(v,\bar{\eta}) = L(v) \text{ para toda } v \in \mathbf{V}$$

$$b(\bar{v},\eta) = 0 \text{ para todo } \eta \in \mathbf{W}.$$

El siguiente lema es la base para la aplicación de los resultados de Brezzi mencionados anteriormente:

2.8. LEMA. *Existe una constante* $k > 0$ *tal que*

i) *Si* $v \in \mathbf{V}$ *es tal que* $b(v,\eta) = 0$ *para toda* $\eta \in \mathbf{W}$, *entonces*

$$a(v,v) \geq k\|v\|_V^2$$

ii) *Para toda* $\eta \in \mathbf{W}$ *existe* $v \in \mathbf{V}$ *tal que*

$$b(v,\eta) \geq k\|v\|_V\|\eta\|_W.$$

Demostración. i) Si $b(v,\eta) = 0$ para todo $\eta \in \mathbf{W}$, y $v = (x,u)$, entonces

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

y por el teorema 2.3 (recordemos que c denota una constante general que puede variar en cada ocasión),

$$\|\dot{x}\|_0 \leq c\|Bu\|_0 \leq c\|u\|_0.$$

Por lo tanto

$$\|\dot{v}\|_V \leq c\|u\|_0.$$

Como C y R son semidefinidas positivas y Q es definida positiva, tenemos

$$\|v\|_V^2 \leq c \int_0^T u\,u\,dt \leq c\,[x(T)Cx(T) + \int_0^T (xQx+uRu)dt] = c\;a(v,v)$$

con lo que resulta i) con $k = \frac{1}{c}$.

ii) Dada $\eta \in \mathbf{W}$, sea x solución al problema

$$\dot{x}-Ax = \eta\ ,$$

y tomemos $v = (x,0) \in \mathbf{V}$, entonces

$$b(v,\eta) = \int_0^T \eta(\dot{x}-Ax)dt = \int_0^T \eta\eta dt = \|\eta\|_W^2 \geq c\|\eta\|_W\|v\|_V$$

pues $\|v\|_V = \|\dot{x}\|_0 \leq c\|\eta\|_W$, por el teorema 2.3. Q.E.D.

Con el lema 2.8 (y el teorema 2.3) es posible obtener resultados similares a los del teorema 2.6 usando los resultados de

Brezzi:

2.9. COROLARIO. *Existe una única solución* $(\overline{x},\overline{u},\overline{\eta}) = (\overline{v},\overline{w}) \in \mathbf{V}\times\mathbf{W}$ *al problema P.E.*

3. APROXIMACIONES DISCRETAS

Pasamos ahora a las aproximaciones discretas. Con el significado introducido en la sección anterior para los espacios $\mathbf{V}$ y $\mathbf{W}$, supongamos que para $\delta > 0$, $\mathbf{V}_\delta = \mathbf{X}_\delta \times \mathbf{U}_\delta$ y $\mathbf{W}_\delta$ son subespacios de dimensión finita de $\mathbf{V}$ y $\mathbf{W}$ respectivamente, tales que

i) $\dim \mathbf{X}_\delta = \dim \mathbf{W}_\delta$, y si $x \in \mathbf{X}_\delta$ entonces $\dot{x} \in \mathbf{W}_\delta$.

ii) Si p_X^δ, p_U^δ y p_W^δ indican las proyecciones de $\mathbf{X}$, $\mathbf{U}$ y $\mathbf{W}$ en $\mathbf{X}_\delta$, $\mathbf{U}_\delta$ y $\mathbf{W}_\delta$ respectivamente, entonces

$$\lim_{\delta\to 0} p_X^\delta(x) = x, \quad \lim_{\delta\to 0} p_U^\delta(u) = u \quad y \quad \lim_{\delta\to 0} p_W^\delta(w) = w$$

para cualquier $x \in \mathbf{X}$, $u \in \mathbf{U}$, $w \in \mathbf{W}$ (donde los límites deben entenderse en los correspondientes espacios).

La versión discreta del problema de ensilladura (P.E.D.) puede plantearse ahora como

(P.E.D.) Encontrar $\overline{v}_\delta \in \mathbf{V}_\delta$, $\overline{\eta}_\delta \in \mathbf{W}_\delta$ tales que

$$a(\overline{v}_\delta,v) + b(v,\overline{\eta}_\delta) = L(v) \text{ para toda } v \in \mathbf{V}_\delta \qquad [3.1]$$

$$b(\overline{v}_\delta,\eta) = 0 \qquad \text{para toda } \eta \in \mathbf{W}_\delta \qquad [3.2] .$$

Observemos que 3.2 es equivalente a

$$\int_0^T \eta(\dot{\overline{x}}_\delta - A\overline{x}_\delta - B\overline{u}_\delta)dt = 0 \quad \text{para toda } \eta \in \mathbf{W}_\delta$$

lo que a su vez puede reescribirse como

$$p_W^\delta(\dot{\overline{x}}_\delta - A\overline{x}_\delta - B\overline{u}_\delta) = 0 .$$

Nos planteamos entonces el siguiente Problema Discreto Auxiliar (P.D.A.):

(P.D.A.) Dada $u_\delta \in \mathbf{U}_\delta$ encontrar $x_\delta \in \mathbf{X}_\delta$ tal que

$$p_W^\delta(\dot{x}_\delta - Ax_\delta - Bu_\delta) = 0 \qquad [3.3]$$

Por conveniencia, denotamos por D_δ el operador $D_\delta : \mathbf{X}_\delta \longrightarrow \mathbf{W}_\delta$ definido por

$$D_\delta x = p_W^\delta \dot{x}$$

y por $i: \mathbf{X}_\delta \longrightarrow \mathbf{X}$ la inclusión. El siguiente resultado es de sencilla demostración:

3.4. LEMA. *El problema P.D.A. tiene solución única si el operador*

$$M_\delta = D_\delta - p_W^\delta A i$$

es inversible. En este caso tenemos

$$\|\dot{x}_\delta\|_0 \leqslant c_\delta \|Bu_\delta\|_0 \leqslant c_\delta \|u_\delta\|_0 .$$

Damos ahora condiciones suficientes para poder utilizar los resultados de Brezzi para las aproximaciones discretas a problemas de puntos de ensilladura:

3.5. LEMA. *Con las notaciones anteriores, si el Problema Discreto Auxiliar (P.D.A.) tiene única solución entonces las hipótesis de Brezzi se verifican:*

i) *Si* $v \in \mathbf{V}_\delta$ *satisface* $b(v,\eta) = 0$ *para todo* $\eta \in \mathbf{W}_\delta$, *entonces*

$$a(v,v) \geqslant c_\delta \|v\|_V^2$$

ii) *Para cada* $\eta \in \mathbf{W}_\delta$ *existe* $v \in \mathbf{V}_\delta$, $v \neq 0$ *tal que*

$$b(v,\eta) > c_\delta \|v\|_V \|\eta\|_W .$$

Demostración. Veamos que se verifica i). Si $v = (x,u) \in \mathbf{V}_\delta$ verifica $b(v,\eta) = 0$ para todo $\eta \in \mathbf{W}_\delta$, entonces v satisface 3.3 y

$$\|\dot{x}\|_0^2 \leqslant c_\delta \|Bu\|_0^2 \leqslant c_\delta \|u\|_0^2$$

por lo que

$$\|v\|_V^2 = \|\dot{x}\|_0^2 + \|u\|_0^2 \leqslant (c_\delta + 1)\|u\|_0^2$$

Usando que R es definida positiva y que C y Q son semidefinidas positivas, resulta

$$a(v,v) \geqslant c\|u\|_0^2 \geqslant \frac{c}{1+c_\delta}\|v\|_V^2$$

lo que prueba i).

Pasemos ahora a ii). Sea $\eta \in \mathbf{W}_\delta$, y, usando el lema anterior, tomemos $v = (x,0) \in \mathbf{V}_\delta$ donde $x \in \mathbf{X}_\delta$ es la solución de

$$p_W^\delta(\dot{x}_\delta - Ax_\delta - \eta) = 0$$

Entonces, como antes,

$$\|v\|_V = \|\dot{x}\|_0 \leqslant c_\delta \|\eta\|_W$$

y

$$c_\delta^{-1}\|v\|_V\|\eta\|_W \leqslant \|\eta\|_W^2 = \int_0^T (\dot{x}-Ax)\eta dt = b(v,\eta).$$

Q.E.D.

Del resultado anterior, usando la teoría de Brezzi obtenemos:

3.6. TEOREMA. *Si el Problema Discreto Auxiliar (P.D.A.) tiene única solución entonces el Problema de Ensilladura Discreto (P.E.D.) tiene una única solución y*

$$\|\bar{u}-\bar{u}_\delta\|_0 + \|\bar{\eta}-\bar{\eta}_\delta\|_0 + \|\bar{x}-\bar{x}_\delta\|_1 \leqslant$$

$$\leqslant \sigma_\delta[\inf_{u\in\mathbf{U}_\delta}\|\bar{u}-u\|_0 + \inf_{\eta\in\mathbf{W}_\delta}\|\bar{\eta}-\eta\|_0 + \inf_{x\in\mathbf{X}_\delta}\|\bar{x}-x\|_1].$$

4. EJEMPLO DE FAMILIAS DE ELEMENTOS FINITOS MIXTOS

En esta sección damos un ejemplo sencillo de familias que satisfacen las condiciones de los resultados 3.4-3.6.

Empecemos por considerar como hipótesis:

4.1. HIPOTESIS. Suponemos que $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$, y definimos

$$I_j = (t_{j-1}, t_j) \;;\; \delta_j = |t_{j-1}-t_j| \;;\; \delta = \max_{1\leq j\leq N} \delta_j$$

4.2. HIPOTESIS. Consideramos el espacio $\mathbf{X}_\delta$ formado por las funciones x tales que la restricción de x a cada I_j es lineal.

Como queremos, de alguna manera, que $\dot{x} \in \mathbf{W}_\delta$ (pensar la ecuación 3.3 en el caso en que A sea nulo, recordando que A es compacto y por lo tanto puede ser mirado como sólo una perturbación), parece natural tomar entonces

4.3. HIPOTESIS. Consideramos el espacio $\mathbf{W}_\delta$ formado por los elementos $\eta \in \mathbf{W}$ tales que la restricción de η a cada I_j es constante. (Observar que no pedimos que η sea continua).

De la misma manera, como queremos que básicamente B: $\mathbf{U}_\delta \longrightarrow \mathbf{W}_\delta$, es razonable pedir:

4.4. HIPOTESIS. Consideramos el espacio $\mathbf{U}_\delta$ de funciones u que son constantes sobre cada I_j.

Bajo las condiciones 4.1-4.4, y para poder aplicar el lema 3.4 de modo que el operador M_δ sea inversible, tenemos que dar condiciones sobre el tamaño de δ:

4.5. PROPOSICION. *Con las hipótesis anteriores, si* $\delta > 0$ *es suficientemente pequeño de modo tal que* $\delta < h_1$, *y* 1 *no es autovalor de ninguna de las matrices*

$$\frac{1}{2}\,\delta_j A_0 + \int_{-\delta_j}^{0} A(\theta)\,\frac{(\delta_j+\theta)^2}{2\delta_j}\,d\theta\ , \quad j = 1,\ldots,N$$

entonces el operador M_δ *del lema* 3.4 *es inversible.*

Demostración. Por las hipótesis dadas sobre $\mathbf{X}_\delta$ y $\mathbf{W}_\delta$, tenemos

$$p_W^\delta(\dot{x}-Ax) = \dot{x} - p_W^\delta Ax$$

y por lo tanto debemos ver que la ecuación

$$\dot{x} = p_W^\delta Ax \qquad [4.6]$$

tiene como única solución la función $x(t) = 0$.

Supongamos entonces que x es solución de 4.6 y $x(t) \neq 0$. Sea

$$K = \inf\{t: x(t) \neq 0\}.$$

Como $x \in X_\delta$, x debe ser continua y por las hipótesis hechas sobre X_δ, $K = t_{j-1}$ para algún $j = 1,\ldots,N$. Además, $x(t) = 0$ para $t \leq t_{j-1}$, y existe algún vector constante $\alpha \in \mathbf{R}^n$, $\alpha \neq 0$, tal que para $t_{j-1} \leq t \leq t_j$, $\dot{x}(t) = \alpha$ y

$$x(t) = \alpha(t-t_{j-1}).$$

Por lo tanto, por 4.6 y como $\delta_j \leq \delta < h_1$, para $t_{j-1} \leq t \leq t_j$ debe ser

$$\alpha = p_W^\delta\, [A_0\alpha(t-t_{j-1}) + \int_{-h}^{0} A(\theta)\alpha(t-t_{j-1})\chi_{I_j}(t+\theta)d\theta]$$

donde χ_I denota la función característica del intervalo I.

Observamos ahora que p_W^δ aplicado a una función da el promedio de esa función sobre cada intervalo I_j, de modo que

$$\alpha = [\frac{1}{2}\,\delta_j A_0 + \int_{-\delta_j}^{0} A(\theta)\,\frac{(\delta_j+\theta)^2}{2\delta_j}\,d\theta]\,\alpha$$

Por lo que α es un autovector con correspondiente autovalor 1, lo que contradice la hipótesis. Q.E.D.

4.6. NOTA. Las hipótesis de la proposición anterior son verificadas si por ejemplo $\delta < h_1$ y

$$\frac{1}{2}\,\delta\,[\|A_0\| + \int_{-\delta}^{0}\|A(\theta)\|dt] < 1$$

para alguna norma $\|\ \|$ en $\mathbf{R}^{n\times n}$.

4.7. PROPOSICION. *Bajo las hipótesis* 4.1-4.4, *si* $\overline{x}_0 \in \mathbf{H}^1(-h,0;\mathbf{R}^n)$ *y* $\delta > 0$ *es suficientemente pequeño, el Problema de Ensilladura Discreto (P.E.D.) tiene una única solución y*

$$\|\overline{u}-\overline{u}_\delta\|_0 + \|\overline{\eta}-\overline{\eta}_\delta\|_0 + \|\overline{x}-\overline{x}_\delta\|_1 \leq c\delta\|\overline{x}_0\|_1\,.$$

Demostración. Por la nota 2.5, $\overline{x}_0 \in \mathbf{H}^1(-h,0;\mathbf{R}^n)$ se puede extender a $\mathbf{H}^1(-h,T;\mathbf{R}^n)$, y el resultado 4.7 resulta del teorema 3.6 y las estimaciones usuales de error para elementos finitos si podemos demostrar que la constante σ_δ del teorema 3.6 no tiene un límite infinito cuando $\delta \to 0$, lo que será cierto si la norma del inverso del operador M_δ del lema 3.4 permanece acotada lejos de 0 e infinito.

Para ello supongamos que $x \in \mathbf{X}_\delta$ y

$$f = p_W^\delta(\dot{x}-Ax) = \dot{x}-p_W^\delta Ax = \dot{x}-Ax + (\mathbf{I}-p_W^\delta)Ax$$

donde $\mathbf{I}$ es la aplicación identidad.

Dado que los coeficientes del operador A no dependen de t, A y p_W^δ conmutan y tenemos

$$\dot{x}-Ax = f - A(\mathbf{I}-p_W^\delta)x$$

y por lo tanto, por el teorema 2.3,

$$\|\dot{x}\|_0 \leq c\ [\|f\|_0 + \|A(\mathbf{I}-p_W^\delta)x\|_0]$$

Por las estimaciones usuales del error, para $y \in \mathbf{H}^1$ vale

$$\|(\mathbf{I}-p_W^\delta)y\|_0 \leq c\delta\|\dot{y}\|_0$$

y por lo tanto

$$\|\dot{x}\|_0 \leq c\|f\|_0 + c\delta\|\dot{x}\|_0$$

Si δ es suficientemente pequeño resulta entonces

$$\|\dot{x}\|_0 \leq \frac{c}{(1-c\delta)}\|f\|_0 .$$

Q.E.D.

Técnicas similares pueden utilizarse para elementos finitos cuyas restricciones a los intervalos I_j sean polinomios de mayor orden. Sin embargo, debido a la falta de regularidad de las soluciones (ver las notas 2.4 y 2.7), a priori no se mejoran las cotas de error si el dato inicial x_0 no satisface ciertas condiciones especiales.

5. UN EJEMPLO NUMERICO

Presentamos aquí el siguiente ejemplo citado por Kappel y Salamon [4]:

Encontrar el mínimo de

$$x(2)x(2) + \int_0^2 u\, u dt$$

sujeto a las condiciones

$$\dot{x}(t) = Ax(t-1)+u(t)$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

y

$$x(t) = 1 \quad \text{para } t \leqslant 0 .$$

La solución analítica de este problema es $x = (x_1,x_2)$, $u = (u_1,u_2)$ dadas por

$$u_1(t) = \begin{cases} \mu+\delta(1-t) & \text{para} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1 \\ \mu & \text{para} \quad 1 \leqslant t \leqslant 2 \end{cases}$$

$$u_2(t) = \delta \quad \text{para} \quad 0 \leqslant t \leqslant 2$$

$$x_1(t) = \begin{cases} 1 + \mu t - \frac{\delta}{2}(t-1)^2 + \frac{\delta}{2} & \text{para} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1 \\ 1 + \mu t + \frac{\delta}{2} & \text{para} \quad 1 \leqslant t \leqslant 2 \end{cases}$$

$$x_2(t) = \begin{cases} 1 + (1+\delta)t & \text{para} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1 \\ 2 + \frac{5\delta}{6} + (1+\frac{3\delta}{2})(t-1) + \mu(t-1)^2 - \delta(t-2)^6 & \text{para} \quad 1 \leqslant t \leqslant 2 \end{cases}$$

siendo el valor óptimo del funcional

$$3\mu^2 + \mu\delta + 5\delta^2$$

donde

$$\delta = -\frac{34}{39} \qquad y \qquad \mu = -\frac{22}{117} .$$

En este ejemplo tenemos $n=m=2$, $N=1$, y puesto que B y R son la identidad, resulta $u=\eta$.

A diferencia de la teoría presentada, en la práctica el dato inicial $\overline{x}_0$ se extiende como 0 en (0,2) y se incorpora esta variante en las ecuaciones a resolver. Es decir, si la función x discreta se representa como

$$x(t) = \sum_i x_i \phi_i(t)$$

siendo ϕ_i las funciones base, entonces $x(t)$ es una aproximación de $x_0(t)$ para $t \leqslant 0$ y los valores de los coeficientes x_i son incógnitas sólo cuando ϕ_i tiene el soporte contenido en $(0,T]$.

Realizamos el ejemplo numérico utilizando primeramente funciones lineales a trozos (continuas) para x, y constantes a trozos para u, dividiendo el intervalo $[0,2]$ en 8 subintervalos iguales ($\Delta t = 0.25$), usando precisión simple. Resumimos los resultados en la tabla 5.1.

Como puede observarse, en este caso la aproximación a u coincide prácticamente con su proyección en $\mathbf{L}^2$, siendo los errores relativos para las aproximaciones menores que 0.17×10^{-2}.

Luego hicimos la aproximación utilizando funciones cuadráticas a trozos (continuas) para x y lineales a trozos (no necesariamente continuas) para u. En este caso dividimos el intervalo $[0,2]$ en 4 partes iguales ($\Delta t = 0.5$) a fin de obtener resultados comparables con los anteriores (las matrices a invertir son del mismo tamaño), usando también precisión simple. La aproximación coincide prácticamente con la solución analítica, lo que es de esperar puesto que ésta es casi cuadrática a trozos. Los resultados están en la tabla 5.2, donde hemos denotado por u^+ y u^- los límites a izquierda y derecha, respectivamente, de la función u en los nodos correspondientes. El máximo error relativo no supera 1.59×10^{-7} (obteniéndose en $x_1(2)$). Recordamos que estamos trabajando con precisión simple tanto en la evaluación de las funciones como en la inversión de las matrices, por lo que los errores relativos están dentro del orden sugerido por el "epsilon de máquina" (5.96×10^{-8}).

Intervalo	u_1 discreta	u_1 analítica (promedio en el intervalo)
0.00-0.25	-0.9518	-0.9508
0.25-0.50	-0.7335	-0.7329
0.50-0.75	-0.5152	-0.5149
0.75-1.00	-0.2969	-0.2970
1.00-1.25	-0.1878	-0.1880
1.25-1.50	-0.1878	-0.1880
1.50-1.75	-0.1878	-0.1880
1.75-2.00	-0.1878	-0.1880

Intervalo	u_2 discreta	u_2 analítica (promedio en el intervalo)
todos	-0.8732	-0.8718

Nodo	x_1 discreta	x_1 analítica
0.25	0.7620	0.7622
0.50	0.5786	0.5790
0.75	0.4498	0.4503
1.00	0.3756	0.3760
1.25	0.3286	0.3291
1.50	0.2817	0.2821
1.75	0.2347	0.2350
2.00	0.1878	0.1880

Nodo	x_2 discreta	x_2 analítica
0.25	1.0317	1.0321
0.50	1.0634	1.0641
0.75	1.0951	1.0961
1.00	1.1268	1.1282
1.25	1.1288	1.1294
1.50	1.0780	1.0778
1.75	0.9833	0.9876
2.00	0.8732	0.8718

Tabla 5.1

Nodo	u_1^- discreta	u_1^+ discreta	u^1 analítica
0.00	*****	-1.0598290	-1.0598291
0.50	-0.62393159	-0.62393159	-0.62393165
1.00	-0.18803418	-0.18803418	-0.18803419
1.50	-0.18803418	-0.18803418	-0.18803419
2.00	-0.18803418	*****	-0.18803419

Nodo	u_2^- discreta	u_2^+ discreta	u_2 analítica
0.00	*****	-0.87179482	-0.87179488
0.50	-0.87179482	-0.87179482	-0.871794988
1.00	-0.87179482	-0.87179482	-0.871794988
1.50	-0.87179482	-0.87179482	-0.871794988
2.00	-0.87179482	*****	-0.871794988

Nodo	x_1 discreta	x_1 analítica
0.25	0.76228637	0.76228637
0.50	0.57905984	0.57905990
0.75	0.45032054	0.45032051
1.00	0.37606835	0.37606838
1.25	0.32905984	0.32905981
1.50	0.28205127	0.28205130
1.75	0.23504275	0.23504272
2.00	0.18803418	0.18803421

Nodo	x_2 discreta	x_2 analítica
0.25	1.0320513	1.0320513
0.50	1.0641025	1.0641025
0.75	1.0961539	1.0961539
1.00	1.1282052	1.1282052
1.25	1.1294072	1.1294070
1.50	1,0779915	1.0779915
1.75	0.98758018	0.98758018
2.00	0.87179494	0.87179482

Tabla 5.2

APENDICE

Nuestro propósito en este apartado es describir una serie de resultados que nos conducirán finalmente a la demostración del teorema 2.3, cuyo enunciado repetimos:

TEOREMA. *Si* $k = 0$ *ó* 1*, dados* $f \in \mathbf{H}^k(0,T;\mathbf{R}^n)$, $g \in \mathbf{H}^k(-h,0;\mathbf{R}^n)$, *y el valor* $g(0) \in \mathbf{R}^n$, *con* $g(0) = \lim\limits_{t \uparrow 0} g(t)$ *si* $k = 1$, *existe una única* $x \in \mathbf{H}^k(-h,T;\mathbf{R}^n)$ *tal que*

i) $x(t) = g(t)$ *para* $-h < t \leqslant 0$

ii) $\dot{x} - Ax = f$ *en* $(0,T)$

iii) $\lim\limits_{t \downarrow 0} x(t) = g(0)$ *si* $k = 1$

Más aún $x \in \mathbf{H}^{k+1}(0,T;\mathbf{R}^n)$, *y para alguna constante positiva* c,

$$\|x\|_{\mathbf{H}^{k+1}(0,T;\mathbf{R}^n)} \leqslant c\ (|g(0)| + \|g\|_{\mathbf{H}^k(-h,0:\mathbf{R}^n)} + \|f\|_{\mathbf{H}^k(0,T;\mathbf{R}^n)}).$$

Para $k = 0,1,2$, sea S^k el espacio de funciones φ tales que $\varphi(t) = 0$ para $t < 0$, $\varphi \in \mathbf{H}^k(0,T;\mathbf{R}^n)$, y si $k > 0$, también pedimos $\varphi \in \mathbf{H}^{k-1}(-h,T;\mathbf{R}^n)$. En S^k definimos la norma

$$\|\varphi\|_{S^k} = \begin{cases} \|\frac{d\varphi}{dt}\|_{\mathbf{H}^{k-1}(0,T;\mathbf{R}^n)} & \text{si } k = 1,2 \\ \|\varphi\|_{\mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{R}^n)} & \text{si } k = 0. \end{cases}$$

Cuando $k = 0$ ó $k = 1$, podemos identificar al espacio $\mathbf{H}^k(0,T;\mathbf{R}^n)$ con el espacio S^k, simplemente extendiendo las funciones como 0 para $t < 0$. Denotaremos por $\mathbf{I} : S^k \longrightarrow \mathbf{H}^k(0,T;\mathbf{R}^n)$ a esta identificación.

Nos interesa estudiar primeramente el problema de encontrar, dada $\varphi \in \mathbf{H}^k(0,T;\mathbf{R}^n)$, $k = 0$ ó $k = 1$, una función $x \in S^{k+1}$ tal que

$$\dot{x} - Ax = \varphi$$

Para ello consideremos el operador lineal Λ definido por

$$\Lambda\varphi(t) = \int_{-h}^{t} \varphi(s)\, ds$$

por lo que, cuando $\varphi \in S^k$,

$$\Lambda\varphi(t) = \int_0^t \varphi(s)\, ds$$

Nos interesa pensar Λ: $S^k \longrightarrow S^{k+1}$ cuando $k = 0$ ó $k = 1$, resultando en este caso Λ continuo con inversa continua dada por

$$\Lambda^{-1}(\varphi) = \dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt} .$$

Recordemos que el operador A está definido por

$$Ax = \sum_i^N A_i x(t-h_i) + \int_{-h}^0 A(\theta)x(t+\theta)d\theta$$

Miramos, por ahora, al operador A como de S^{k+1} en $\mathbf{H}^k(0,T;\mathbf{R}^n)$, resultando en este caso ser compacto, puesto que el operador A: $S^{k+1} \longrightarrow \mathbf{H}^{k+1}(0,T;\mathbf{R}^n)$ es continuo y la inclusión de $\mathbf{H}^{k+1}(0,T;\mathbf{R}^n)$ en $\mathbf{H}^k(0,T;\mathbf{R}^n)$ es compacta. (Acá estamos tomando $k = 0$ ó $k = 1$).

Entonces, cuando $k = 0$ ó $k = 1$, el operador $A\Lambda$:$S^k \longrightarrow \mathbf{H}^k(0,T;\mathbf{R}^n)$ resulta ser compacto (aquí pensamos Λ: $S^k \longrightarrow S^{k+1}$, A: $S^{k+1} \longrightarrow \mathbf{H}^k(0,T;\mathbf{R}^n)$), y podemos aplicar la alternativa de Fredholm al operador $\mathbf{I}-A\Lambda$ de S^k en $\mathbf{H}^k(0,T;\mathbf{R}^n)$, para obtener que $\mathbf{I}-A\Lambda$ es inversible continuamente si y sólo si es inyectivo.

Quizás sea conveniente pensar que al considerar $\mathbf{I}-A\Lambda$, estamos tomando para $\varphi \in S^k$ las operaciones

$$\varphi \longrightarrow x = \Lambda\varphi \longrightarrow \dot{x}-Ax = (\mathbf{I}-A\Lambda)\varphi$$

Ahora, el operador $\mathbf{I}-A\Lambda$ es inyectivo, puesto que si $(\mathbf{I}-A\Lambda)\varphi = 0$, entonces tomando $x = \Lambda\varphi$, resulta

$$\dot{x} = Ax \quad \text{para} \quad t > 0$$

y $x(t) = 0$ para $t < 0$. Puesto que x es continuo en $[-h,T]$ y diferenciable en $(0,T)$, podemos aplicar la teoría clásica para concluir que $x(t) = 0$ para todo t (Ver e.g. [3, cap.2]).

Resumiendo los resultados que acabamos de ver, podemos decir que dada $\varphi \in \mathbf{H}^k(0,T;\mathbf{R}^n)$, $k = 0$ ó $k = 1$, existe una única solución al problema

$$(I - A\Lambda)\Psi = \varphi \ , \qquad \Psi \in S^k$$

y, más aún, esta solución satisface

$$\|\Psi\|_{S^k} \leqslant c\|\varphi\|_{H^k(0,T;R^n)} \ .$$

Definiendo entonces

$$x(t) = \Lambda\Psi(t) = \int_0^t \Psi(s)\, ds$$

resulta que dada $\varphi \in H^k(0,T;R^n)$, $k = 0$ ó $k = 1$, existe una única solución al problema

$$\dot{x} - Ax = \varphi$$

con $x \in S^{k+1}$, y se satisface

$$\|x\|_{S^{k+1}} \approx \|x\|_{H^{k+1}(0,T;R^n)} \leqslant c\|\varphi\|_{H^k(0,T;R^n)} \ .$$

Pasemos ahora a resolver el problema general: Si $k = 0$ ó $k = 1$, y dadas $f \in H^k(0,T;R^n)$, $g \in H^k(-h,0;R^n)$, el valor $g(0) \in R^n$, con $g(0) = \lim_{t\uparrow 0} g(t)$ si $k = 1$, encontrar $x \in H^k(-h,T;R^n)$ tal que

i) $x(t) = g(t)$ para $-h < t \leqslant 0$

ii) $\dot{x} - Ax = f$ en $(0,T)$

iii) $\lim_{t\downarrow 0} x(t) = g(0)$ si $k = 1$.

Observamos primeramente que si $x \in H^k(-h,T;R^n)$, y vale ii), entonces $x \in H^{k+1}(0,T;R^n)$.

Por otra parte, dada $g \in H^k(-h,0;R^n)$, con $k = 0$ ó $k = 1$, y el valor $g(0) \in R^n$, con $g(0) = \lim_{t\uparrow 0} g(t)$ si $k = 1$, definimos la función

$$\overline{g}(t) = \begin{cases} g(t) & \text{si} \quad -h \leqslant t \leqslant 0 \\ g(0) & \text{si} \quad t > 0 \ . \end{cases}$$

Es claro que la función $\overline{g} \in H^k(-h,T;R^n) \cap H^{k+1}(0,T;R^n)$, aún cuando $k = 1$, puesto que en este caso la función $\overline{g}$ es continua en $t = 0$ por las hipótesis dadas, y tendremos, para alguna constante c dependiente de T,

$$\|\bar{g}\|_{\mathbf{H}^k(-h,T;\mathbf{R}^n)} + \|\bar{g}\|_{\mathbf{H}^{k+1}(0,T;\mathbf{R}^n)} \leqslant c\ [\ |g(0)| + \|g\|_{\mathbf{H}^k(-h,0;\mathbf{R}^n)}]$$

Observamos también que $A\bar{g} \in \mathbf{H}^k(0,T;\mathbf{R}^n)$. Podemos replantear el problema de encontrar x poniendo $x = y+\bar{g}$, y resolver ahora el problema de encontrar $y \in S^{k+1}$ tal que

$$\dot{y} - Ay = A\bar{g} + f \quad \text{en} \quad (0,T)$$

Poniendo $\varphi = A\bar{g}+f$, vemos que $\varphi \in \mathbf{H}^k(0,T;\mathbf{R}^n)$, por lo que efectivamente podemos aplicar lo anteriormente visto para encontrar y, con lo que demostramos la existencia. La unicidad sale del hecho que si $g = 0$ y $f = 0$, entonces estamos también en el caso anterior cuando considerábamos soluciones $x \in S^{k+1}$. Finalmente, para obtener la acotación en norma de x, observamos que

$$\|x\|_{\mathbf{H}^{k+1}(0,T;\mathbf{R}^n)} = \|x\|_{\mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{R}^n)} + \|\dot{x}\|_{\mathbf{H}^k(0,T;\mathbf{R}^n)}$$

Como $x = y+g(0)$ para $t > 0$, para alguna constante c dependiente de T resulta

$$\|x\|_{\mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{R}^n)} \leqslant \|y\|_{\mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{R}^n)} + c\ |g(0)|$$

y, puesto que $y \in S^{k+1}$,

$$\|\dot{x}\|_{\mathbf{H}^k(0,T;\mathbf{R}^n)} = \|\dot{y}\|_{\mathbf{H}^k(0,T;\mathbf{R}^n)} = \|y\|_{S^{k+1}}$$

Ahora, por la desigualdad de Poincaré,

$$\|y\|_{\mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{R}^n)} \leqslant \|y\|_{S^{k+1}}$$

y por lo tanto

$$\|x\|_{\mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{R}^n)} \leqslant \|y\|_{S^{k+1}} + c|g(0)|$$

Sabemos que

$$\|y\|_{S^{k+1}} \leqslant \|\varphi\|_{\mathbf{H}^k(0,T;\mathbf{R}^n)} = \|A\bar{g}+f\|_{\mathbf{H}^k(0,T;\mathbf{R}^n)} \leqslant$$

$$\leqslant \|A\bar{g}\|_{\mathbf{H}^k(0,T;\mathbf{R}^n)} + \|f\|_{\mathbf{H}^k(0,T;\mathbf{R}^n)}$$

$$\leq \|\bar{g}\|_{H^k(0,T;\mathbf{R}^n)} + \|f\|_{H^k(0,T;\mathbf{R}^n)} \leq$$

$$\leq c[|g(0)|+\|g\|_{H^k(-h,0;\mathbf{R}^n)}] + \|f\|_{H^k(0,T;\mathbf{R}^n)} \leq$$

$$\leq c[|g(0)|+\|g\|_{H^k(-h,0;\mathbf{R}^n)} + \|f\|_{H^k(0,T;\mathbf{R}^n)}]$$

de donde se deduce la acotación deseada.

BIBLIOGRAFIA

[1] H.T.BANKS y J.A.BURNS, *Hereditary Control Problems: Numerical Methods based on Averaging Approximations*, SIAM J. Control Optim. 16, 1978, pp.169-208.

[2] F.BREZZI, *On the existence, uniqueness and approximation of saddle point problems arising from Lagrangian multipliers*, RAIRO Anal. Num., 1974, 129-151.

[3] J.K.HALE, *Theory of Functional Differential Equations*, Springer-Verlag, 1977.

[4] F.KAPPEL y D.SALAMON, *Spline Approximation for Retarded Systems and the Riccati Equation*, Math. Research Center, University of Wisconsin, Madison, TSR 2680, 1984.

[5] D.C.REBER, *A Finite Difference Technique for Solving Optimization Problems Governed by Linear Functional Differential Equations*, Journal of Differential Equations 32, 193-232 (1979).

Néstor E. Aguilera
PEMA, CONICET
Universidad Nacional del Litoral
Güemes 3450, 3000 Santa Fe
Argentina.

Elena M. Fernández Berdaguer
INTEC, CONICET
Universidad Nacional del Litoral
Güemes 3450, 3000 Santa Fe
Argentina.

Recibido en marzo de 1989
Versión corregida diciembre de 1990.