

# SOBRE ESPACIOS DE SOBOLEV ANISOTROPOS CON VALORES VECTORIALES

MARIA JESUS PLANELL <sup>(\*)</sup>

**ABSTRACT.** Let  $\Omega$  be an open subset of  $\mathbb{R}^n$ ,  $E$  an  $(LF)$ -space and  $W$  a finite nonempty subset of  $\mathbb{N}^n$  such that if  $(\alpha_j) \in W$  then  $(\beta_j) \in W$  whenever  $0 \leq \beta_j \leq \alpha_j$  for  $j = 1, \dots, n$ . In this paper we study some locally convex properties of the vector-valued anisotropic Sobolev spaces  $L_W^p(\Omega, E) := \{f \in L^p(\Omega, E) : D^\alpha f \in L^p(\Omega, E) \text{ for } \alpha \in W\}$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ .

Los espacios vectoriales que utilizaremos están definidos sobre el cuerpo  $\mathbb{C}$  de los números complejos. La palabra espacio significará espacio vectorial topológico localmente convexo y Hausdorff. Si  $E$  es un espacio denotamos por  $sc(E)$  el conjunto de todas las seminormas continuas sobre  $E$ . Si  $E$  y  $F$  son dos espacios  $E \otimes_\pi F$  y  $E \otimes_\epsilon F$  denotan  $E \otimes F$  dotado de la topología proyectiva e inyectiva respectivamente. Si los espacios  $E$  y  $F$  son topológicamente isomorfos escribimos  $E \simeq F$ . Si  $A$  es un conjunto no vacío,  $E^A$  denota el producto topológico de  $A$  copias del espacio  $E$ .  $\mathbb{N}$  denotará el conjunto de los enteros no negativos y  $\ell^2$  el espacio de Hilbert de las sucesiones de números complejos de cuadrado sumable.  $card A$  es el cardinal del conjunto  $A$ . Si  $E$  es un espacio casi-completo y  $\Omega$  es un abierto de  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathcal{D}(\Omega, E)$  será el espacio de las funciones indefinidamente dife-

---

\* Subvencionado parcialmente por la CAICYT, Proyecto PB85-0341.

renciales sobre  $\Omega$  con valores en  $E$  que tienen soporte compacto ( $\mathcal{D}(\Omega, E)$  se considera provisto de su topología límite inductivo habitual). Como es usual, cuando  $E = \mathbb{C}$ , escribimos  $\mathcal{D}(\Omega)$ . Si  $E$  es un espacio denotamos por  $\mathcal{D}'(\Omega, E)$  el espacio de las distribuciones sobre  $\Omega$  con valores en  $E$  equipado de la topología de la convergencia uniforme sobre los acotados de  $\mathcal{D}(\Omega)$  (ver [15]).

Si  $E$  es un (LF)-estricto (trabajamos en esta clase de espacios por cuestiones de medibilidad),  $\Omega$  un abierto de  $\mathbb{R}^n$  y  $p \in [1, \infty]$ ,  $L^p(\Omega, E)$  denota el conjunto de todas las funciones (clases de funciones equivalentes) medibles Bochner de  $\Omega$  en  $E$ ,  $f$ , tales que  $\|f\|_p = \left( \int_{\Omega} \|f(x)\|^p dx \right)^{1/p} < \infty$  (cuando  $p = \infty$  se debe tener  $\|f\|_{\infty} = \sup_{x \in \Omega} \|f(x)\| < \infty$ ) para cada  $\|\cdot\| \in \text{sc}(E)$ . Provisto de la topología generada por la familia de seminormas  $\{\|\cdot\|_p : \|\cdot\| \in \text{sc}(E)\}$ ,  $L^p(\Omega, E)$  llega a ser un espacio sucesionalmente completo (ver [7], p.122). Además la aplicación

$$\begin{aligned} L^p(\Omega, E) &\longrightarrow \mathcal{D}'(\Omega, E) \\ f &\longmapsto \{\phi \longmapsto \int_{\Omega} \phi(x) f(x) dx\} \end{aligned}$$

está bien definida y es lineal, inyectiva y continua. Por consiguiente, las funciones de  $L^p(\Omega, E)$  admiten derivadas distribucionales de cualquier orden. (Ver [6] y [7] para la teoría de integración de funciones con valores vectoriales y [15], [16] para la teoría de distribuciones con valores vectoriales).

Si  $W$  es un subconjunto finito no vacío de  $N^n$  tal que si  $(\alpha_j) \in W$  entonces  $(\beta_j) \in W$  cuando  $0 \leq \beta_j \leq \alpha_j$  para  $j = 1, \dots, n$ , el espacio de Sobolev (anisótropo) sobre  $\Omega$  con valores en  $E$  (de tipo  $p, W$ ) es el subespacio lineal de  $L^p(\Omega, E)$

$$L^p_W(\Omega, E) := \{f \in L^p(\Omega, E) : D^{\alpha} f \in L^p(\Omega, E) \text{ para } \alpha \in W\}.$$

Consideramos sobre  $L^p_W(\Omega, E)$  la topología generada por la familia de seminormas  $\{\|\cdot\|_{p, W} : \|\cdot\| \in \text{sc}(E)\}$  donde

$$\|f\|_{p,W} = \left( \sum_{\alpha \in W} \|D^\alpha f\|_p^p \right)^{1/p} \quad \text{cuando } p < \infty$$

$$\|f\|_{p,W} = \max_{\alpha \in W} \sup_{x \in \Omega} \|D^\alpha f(x)\| \quad \text{cuando } p = \infty.$$

(Ver [12], [13] y [17] para un análisis de los espacios de Sobolev anisótropos escalares. En [11] se demuestra que  $L_W^p(\mathbb{R}^n, E)$  tiene la propiedad de aproximación cuando  $p < \infty$  y  $E$  es un espacio de Fréchet que posee dicha propiedad).

El propósito del presente artículo es establecer algunas propiedades localmente convexas de los espacios de Sobolev anisótropos vectoriales  $L_W^p(\Omega, E)$  partiendo de las correspondientes propiedades del espacio  $E$ .

Omitimos la prueba del siguiente sencillo, pero útil, resultado.

**TEOREMA 1.** Sea  $\Omega$  un abierto de  $\mathbb{R}^n$ ,  $E$  un (LF)-estricto,  $W$  un subconjunto finito no vacío de  $N^n$  tal que si  $(\alpha_j) \in W$  entonces  $(\beta_j) \in W$  cuando  $0 \leq \beta_j \leq \alpha_j$  para  $j = 1, \dots, n$ , y  $p \in [1, \infty]$ . Entonces

1.  $L_W^p(\Omega, E)$  es topológicamente isomorfo a un subespacio cerrado de  $(L^p(\Omega, E))^{\text{card } W}$ .
2.  $E$  es topológicamente isomorfo a un subespacio completo de  $L_W^p(\Omega, E)$  y  $L_W^p(\Omega)$  es topológicamente isomorfo a un subespacio complementado de  $L_W^p(\Omega, E)$ .
3. Si  $E$  es topológicamente isomorfo a un subespacio (complementado) de un (LF)-estricto  $F$  entonces  $L_W^p(\Omega, E)$  es topológicamente isomorfo a un subespacio (complementado) de  $L_W^p(\Omega, F)$ .

**NOTA.**  $L_W^p(\Omega, E)$  es un espacio de distribuciones sobre  $\Omega$  con valores en  $E$ . En [11] se demuestra, suponiendo  $\Omega = \mathbb{R}^n$ ,  $1 \leq p < \infty$  y  $E$  un espacio de Fréchet, que  $L_W^p(\Omega, E)$  tiene las propiedades de aproximación por truncamiento y por regularización (véase Schwartz [15], pp.7 y 8) y que  $\mathcal{D}(\Omega, E)$  es denso en  $L_W^p(\Omega, E)$ .

Por consiguiente, en este caso,  $L_W^p(\Omega, E)$  es un espacio normal de distribuciones vectoriales.

COROLARIO. Sean  $\Omega, E, W$  y  $p$  como en el teorema. Entonces el espacio  $L_W^p(\Omega, E)$  es sucesionalmente completo si  $1 < p \leq \infty$ , es completo si  $p = 1$  y es de Banach (resp. Fréchet) si  $E$  es un Banach (resp. Fréchet).

PRUEBA. Es consecuencia de las correspondientes propiedades del espacio  $L^p(\Omega, E)$  (véase [7], pp.119-122) y del teorema anterior. c.q.d.

TEOREMA 2. Sean  $\Omega, E, W$  y  $p$  como en el teorema 1. Entonces la topología que induce  $L_W^p(\Omega, E)$  sobre  $L_W^p(\Omega) \otimes E$  está intercalada entre la topología  $\epsilon$  de la convergencia bieuicontinua y la topología proyectiva  $\pi$ .

PRUEBA. Para cada  $f \in L^p(\Omega)$  y cada  $e \in E$  denotamos por  $Q(f, e)$  el elemento de  $L^p(\Omega, E)$  definido por la función  $x \rightarrow f(x)e$ . Probemos que  $Q(f, e) \in L_W^p(\Omega, E)$  si  $f \in L_W^p(\Omega)$ : Si  $\alpha \in W \setminus \{0\}$  se tiene

$$\begin{aligned} \langle \phi, D^\alpha Q(f, e) \rangle &= (-1)^{|\alpha|} \langle D^\alpha \phi, Q(f, e) \rangle = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} D^\alpha \phi(x) f(x) e \, dx = \\ &= (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} D^\alpha \phi(x) f(x) \, dx \cdot e = \int_{\Omega} \phi(x) D^\alpha f(x) \, dx \cdot e = \\ &= \int_{\Omega} \phi(x) D^\alpha f(x) \, dx = \langle \phi, Q(D^\alpha f, e) \rangle \quad \text{para } \phi \in \mathcal{D}(\Omega) \end{aligned}$$

por lo que  $D^\alpha Q(f, e) = Q(D^\alpha f, e) \in L^p(\Omega, E)$ . Consiguientemente  $Q(f, e) \in L_W^p(\Omega, E)$  y  $Q$  es una aplicación bilineal de  $L_W^p(\Omega) \times E$  en  $L_W^p(\Omega, E)$ . Sea  $q: L_W^p(\Omega) \otimes E \rightarrow L_W^p(\Omega)$  la aplicación lineal asociada a  $Q$ . Evidentemente  $q$  es inyectiva. Veamos que es continua cuando dotamos a  $L_W^p(\Omega) \otimes E$  de la  $\pi$ -topología: Supongamos  $p < \infty$  y

sea  $p'$  el exponente conjugado de  $p$ . Si  $\zeta = \sum_1^m f_i \otimes e_i$  es un elemento de  $L_W^p(\Omega) \otimes E$  y  $\|\cdot\| \in \text{sc}(E)$  tenemos

$$\begin{aligned} \|q(\zeta)\|_{p,W} &= \left( \sum_{\alpha \in W} \int_{\Omega} \left\| \sum_1^m D^{\alpha} f_i(x) e_i \right\|^p dx \right)^{1/p} \leq \left( \sum_{\alpha \in W} \int_{\Omega} \left( \sum_1^m |D^{\alpha} f_i(x)| \cdot \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \cdot \|e_i\|^p dx \right)^{1/p} = \left( \sum_{\alpha \in W} \left\| \sum_1^m |D^{\alpha} f_i| \|e_i\|_{L^p(\Omega)}^p \right\|_{L^p(\Omega)} \right)^{1/p} \leq \left( \sum_{\alpha \in W} \left( \sum_1^m \|D^{\alpha} f_i\|_{L^p(\Omega)} \right) \cdot \right. \\ &\quad \left. \cdot \|e_i\|^p \right)^{1/p} \leq \sum_{\alpha \in W} \sum_1^m \|e_i\| \|D^{\alpha} f_i\|_{L^p(\Omega)} = \sum_1^m \left( \sum_{\alpha \in W} \|D^{\alpha} f_i\|_{L^p(\Omega)} \right) \|e_i\| \leq \\ &\leq 2^{(\text{card} W - 1)/p'} \sum_1^m \left( \sum_{\alpha \in W} \|D^{\alpha} f_i\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p} \|e_i\| = 2^{(\text{card} W - 1)/p'} \cdot \\ &\cdot \sum_1^m \|f_i\|_{L_W^p(\Omega)} \|e_i\|. \end{aligned}$$

Como esto es cierto para cada representación de  $\zeta$ , obtenemos

$$\|q(\zeta)\|_{p,W} \leq 2^{(\text{card} W - 1)/p'} (\|\cdot\|_{L_W^p(\Omega)} \otimes_{\pi} \|\cdot\|)(\zeta).$$

Esta desigualdad también es válida en el caso  $p = \infty$ . Por lo

tanto,  $q$  es una aplicación de  $L_W^p(\Omega) \otimes_{\pi} E$  en  $L_W^p(\Omega, E)$  continua.

A continuación demostraremos que  $q^{-1}$  es una aplicación continua de  $q(L_W^p(E) \otimes E)$ , equipado de la topología inducida por  $L_W^p(\Omega, E)$ , sobre  $L_W^p(E) \otimes_{\varepsilon} E$ . Será suficiente comprobar que, para cada  $\|\cdot\| \in \text{sc}(E)$ , se verifica la desigualdad

$$\|\cdot\|_{L_W^p(\Omega)} \otimes_{\varepsilon} \|\cdot\|(\zeta) \leq (\text{card} W)^{1/p'} \|q(\zeta)\|_{p,W}, \quad \zeta \in L_W^p(\Omega) \otimes E.$$

Fijada una seminorma  $\|\cdot\|$  en  $\text{sc}(E)$  pongamos  $U =$  bola unidad de  $L_W^p(\Omega)$  y  $V = \{e \in E: \|e\| \leq 1\}$ . Supongamos primero  $1 < p < \infty$ . Si  $\zeta = \sum_1^m f_i \otimes e_i \in L_W^p(\Omega) \otimes E$  se tiene, por definición, que

$$\|\cdot\|_{L_W^p(\Omega)} \otimes_{\varepsilon} \|\cdot\|(\zeta) = \sup_{\theta \in U} \sup_{e' \in V} \left| \sum_1^m \langle f_i, \theta \rangle \langle e_i, e' \rangle \right|.$$

Sea  $\theta$  un elemento de  $U^\circ$ . Razonando como en [1], pp.47-49, llamamos un elemento  $(g_\alpha) \in (L^{p'}(\Omega))^{\text{card}W}$  tal que, para todo  $f \in L^p_W(E)$ , se verifica

$$\langle f, \theta \rangle = \sum_{\alpha \in W} \int_{\Omega} g_\alpha(x) D^\alpha f(x) dx$$

y tal que

$$\left( \sum_{\alpha \in W} \|g_\alpha\|_{L^{p'}(\Omega)}^{p'} \right)^{1/p'} = \|\theta\|_{(L^p_W(\Omega))'}.$$

Esta representación de  $\theta$  y la desigualdad de Hölder dan lugar a

$$\begin{aligned} \sup_{e' \in V^\circ} \left| \sum_1^m \langle f_i, \theta \rangle \langle e_i, e' \rangle \right| &= \sup_{e' \in V^\circ} \left| \sum_1^m \sum_{\alpha \in W} \langle e_i, e' \rangle \int_{\Omega} g_\alpha(x) D^\alpha f_i(x) dx \right| \leq \\ &\leq \sup_{e' \in V^\circ} \sum_{\alpha \in W} \int_{\Omega} |g_\alpha(x)| \left| \sum_1^m D^\alpha f_i(x) e_i, e' \right| dx \leq \sum_{\alpha \in W} \int_{\Omega} |g_\alpha(x)| \left\| \sum_1^m D^\alpha f_i(x) e_i \right\| dx \leq \\ &\leq \sum_{\alpha \in W} \|g_\alpha\|_{L^{p'}(\Omega)} \left( \int_{\Omega} \left\| \sum_1^m D^\alpha f_i(x) e_i \right\|^{p'} dx \right)^{1/p} \leq \left( \sum_{\alpha \in W} \|g_\alpha\|_{L^{p'}(\Omega)}^{p'} \right)^{1/p'}. \end{aligned}$$

$$\left( \sum_{\alpha \in W} \int_{\Omega} \left\| \sum_1^m D^\alpha f_i(x) e_i \right\|^{p'} dx \right)^{1/p} \leq \left( \sum_{\alpha \in W} \int_{\Omega} \left\| \sum_1^m D^\alpha f_i(x) e_i \right\|^p dx \right)^{1/p} = \|q(\zeta)\|_{p,W}.$$

De aquí se obtiene (al variar  $\theta$  en  $U^\circ$ )

$$\|\cdot\|_{L^p_W(\Omega)} \otimes_\varepsilon \|\cdot\|(\zeta) \leq \|q(\zeta)\|_{p,W}.$$

En el caso  $p = 1$  se razona de la misma forma (teniendo en cuenta que ahora  $\max_{\alpha \in W} \|g_\alpha\|_{L^\infty(\Omega)} = \|\theta\|_{(L^1_W(\Omega))'}$ ) y también se obtiene

$$\|\cdot\|_{L^1_W(\Omega)} \otimes_\varepsilon \|\cdot\|(\zeta) \leq \|q(\zeta)\|_{1,W}.$$

El caso  $p = \infty$  es un poco más complicado. Tomemos nuevamente un elemento  $\theta \in U^\circ$ . Si se considera en  $(L^\infty(\Omega))^{\text{card}W}$  la norma

$\|(f_\alpha)\| = \max_{\alpha \in W} \|f_\alpha\|_{L^\infty(\Omega)}$  la aplicación  $Z: L^\infty_W(\Omega) \rightarrow (L^\infty(\Omega))^{\text{card}W}$  definida por  $Z(f) = (D^\alpha f)_\alpha$  conserva las normas. Podemos encontrar entonces, aplicando el teorema de Hahn-Banach, una forma

lineal y continua  $\xi$  sobre  $(L^\infty(\Omega))^{\text{card}W}$  de manera que su norma coincida con  $\|\theta\|_{(L_W^\infty(\Omega))'}$ , y que  $\langle f, \theta \rangle = \langle (D^\alpha f), \xi \rangle$  para todo  $f \in L_W^\infty(\Omega)$ . Entonces las aplicaciones  $\xi \circ j_\alpha$  (para cada  $\alpha \in W$   $j_\alpha$  es la correspondiente inyección de  $L^\infty(\Omega)$  en  $(L^\infty(\Omega))^{\text{card}W}$ ) están en  $(L^\infty(\Omega))'$  y verifican que  $\|\xi \circ j_\alpha\|_{(L^\infty(\Omega))'} \leq 1$ . En virtud

del teorema de Gel'fand-Stone (ver, por ejemplo, [5], p.445) existe un espacio topológico compacto  $T$  y una isometría  $u$  de  $L^\infty(\Omega)$  sobre el espacio de Banach  $C(T)$  (espacio de las funciones complejas continuas sobre  $T$  con la norma sup). Si utilizamos ahora el teorema de representación de Riesz hallamos medidas de Borel complejas regulares sobre  $T$   $\mu_\alpha$ ,  $\alpha \in W$ , tales que para todo  $f \in L^\infty(\Omega)$  se verifica

$$\langle f, \xi \circ j_\alpha \rangle = \int_T u(f) d\mu_\alpha$$

y tales que su variación total es  $\leq 1$ . Obtenemos así una representación de  $\theta$

$$\langle f, \theta \rangle = \langle (D^\alpha f), \xi \rangle = \sum_{\alpha \in W} \langle D^\alpha f, \xi \circ j_\alpha \rangle = \sum_{\alpha \in W} \int_T u(D^\alpha f) d\mu_\alpha, \quad f \in L_W^\infty(\Omega).$$

Sea entonces  $\zeta = \sum_1^m f_i \otimes e_i$  un elemento de  $L_W^\infty(\Omega) \otimes E$ . Si  $e' \in V^\circ$  tenemos

$$\begin{aligned} \left| \sum_1^m \langle f_i, \theta \rangle \langle e_i, e' \rangle \right| &= \left| \sum_1^m \langle e_i, e' \rangle \sum_{\alpha \in W} \int_T u(D^\alpha f_i) d\mu_\alpha \right| = \\ &= \left| \sum_{\alpha \in W} \int_T \left\langle \sum_1^m u(D^\alpha f_i) e_i, e' \right\rangle d\mu_\alpha \right| \leq \sum_{\alpha \in W} \int_T \left| \left\langle \sum_1^m u(D^\alpha f_i) e_i, e' \right\rangle \right| d|\mu_\alpha| \leq \\ &\leq \sum_{\alpha \in W} \int_T \left\| \sum_1^m u(D^\alpha f_i) e_i \right\| d|\mu_\alpha| \leq \sum_{\alpha \in W} \max \left\| \sum_1^m u(D^\alpha f_i)(t) e_i \right\| \leq^* \\ &\leq \sum_{\alpha \in W} \sup_{x \in \Omega} \left\| \sum_1^m D^\alpha f_i(x) e_i \right\| \leq \text{card}W \cdot \|q(\zeta)\|_{\infty, W} \end{aligned}$$

(en el paso \* hemos utilizado el teorema de los bipolares y el carácter isométrico de  $u$ ). Variando  $e'$  en  $V^\circ$  y  $\theta$  en  $U^\circ$  llega-

mos a la desigualdad

$$\| \cdot \|_{L_W^\infty(\Omega)} \otimes_\varepsilon \| \cdot \|(\zeta) \leq \text{card} W \cdot \|q(\zeta)\|_{\infty, W}.$$

Estó completa la demostración del teorema. c.q.d.

COROLARIO. Sean  $\Omega, E, W$  y  $p$  como en el teorema 1. Si además  $E$  es nuclear, se tiene

1.  $L_W^p(\Omega) \hat{\otimes}_\varepsilon E$  es un subespacio de  $L_W^p(\Omega, E)$  si  $p = 1$  ó si  $1 < p \leq \infty$  y  $E$  es un espacio de Fréchet.
2. Supongamos que  $\Omega = \mathbb{R}^n$ . Si  $1 < p < \infty$  y  $E$  es un espacio de Fréchet ó si  $p = 1$  y  $W$  es un intervalo (es decir, existe un  $(\varepsilon_j)$  de  $\mathbb{N}^n$  tal que  $W = \{(\alpha_j) \in \mathbb{N}^n : 0 \leq \alpha_j \leq \varepsilon_j \text{ para } j = 1, \dots, n\}$  ó si  $p = \infty$ ,  $W$  es un intervalo y  $E$  es un espacio de Fréchet, entonces  $L_W^p(\mathbb{R}^n, E)$  contiene una copia de  $L^p(0, 1) \hat{\otimes}_\varepsilon E$ .

PRUEBA. El punto 1 se sigue directamente de la nuclearidad de  $E$ , de la completitud de  $L_W^p(\Omega, E)$  y del teorema 2. El punto 2 se sigue de 1 y de los teoremas B y C de [13]. c.q.d.

TEOREMA 3. 1. Sea  $\Omega$  un abierto de  $\mathbb{R}^n$ ,  $(E_i)_{i=1}^\infty$  una sucesión de espacios de Fréchet,  $W$  un subconjunto finito no vacío de  $\mathbb{N}^n$  tal que si  $(\alpha_j) \in W$  entonces  $(\beta_j) \in W$  cuando  $0 \leq \beta_j \leq \alpha_j$  para  $j = 1, 2, \dots, n$ , y  $p \in [1, \infty]$ . Entonces se tiene

$$L_W^p(\Omega, \prod_{i=1}^\infty E_i) \simeq \prod_{i=1}^\infty L_W^p(\Omega, E_i).$$

2. Sea  $\Omega$  un abierto de  $\mathbb{R}^n$ ,  $E$  un Fréchet nuclear y  $W$  como en el punto 1. Entonces  $L_W^2(\Omega, E)$  es topológicamente isomorfo a un subespacio cerrado de  $(\ell^2)^N$  pero, en general,  $L_W^2(\Omega, E)$  no es topológicamente isomorfo a  $(\ell^2)^N$  y tampoco es topológicamente isomorfo a un subespacio complementado de  $(\ell^2)^N$ .



3. Si  $E$  es un espacio topológicamente isomorfo a  $\mathbb{C}^N$  y  $W$  es como en el punto 1, se tiene

- (i)  $L_W^p(\mathbb{R}^n, E) \simeq (L^p(0,1))^N$  si  $1 < p < \infty$ ,
- (ii)  $L_W^1(\mathbb{R}^n, E) \simeq (L^1(0,1))^N$  si y sólo si  $W$  es un intervalo,
- (iii)  $L_W^\infty(\mathbb{R}^n, E) \simeq (L^\infty(0,1))^N$  si y sólo si  $W$  es un intervalo.

PRUEBA. 1. Pongamos  $E = \prod_{i=1}^\infty E_i$  y para cada  $i$  sea  $pr_i$  la proyección de  $E$  sobre  $E_i$ . Es fácil comprobar que la aplicación

$$J: L_W^p(\Omega, E) \longrightarrow \prod_{i=1}^\infty L_W^p(\Omega, E_i)$$

$$f \longmapsto (pr_i \circ f)_{i=1}^\infty$$

está bien definida y es lineal, inyectiva y continua. Demostremos que es sobreyectiva. Si para cada  $i$   $(\|\cdot\|_{ij})_{j=1}^\infty$  es una sucesión creciente de seminormas que definen la topología de  $E_i$  entonces las seminormas

$$\|(e_i)_{i=1}^\infty\|_N = \sum_{i,j=1}^N \|e_i\|_{ij}, \quad N = 1, 2, \dots,$$

generan la topología de  $E$ . Sea  $(f_i)_{i=1}^\infty$  un elemento de  $\prod_{i=1}^\infty L_W^p(\Omega, E_i)$ . Pongamos  $f(x) = (f_i(x))_{i=1}^\infty$  para  $x \in \Omega$ . Veamos que  $f$  define un elemento de  $L_W^p(\Omega, E)$ . Si  $z \in E'$  existen ([8], p.284) un entero positivo  $k$  y elementos  $z_i \in E'_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ , de manera que  $\langle (e_i)_1^\infty, z \rangle = \sum_{i=1}^k \langle e_i, z_i \rangle$ ,  $(e_i)_1^\infty \in E$ , por ello  $z \circ f = \sum_{i=1}^k z_i \circ f_i$  y  $z \circ f$  es medible; además, si para  $i = 1, 2, \dots$ ,  $A_i$  es un subconjunto de  $\Omega$  de medida cero tal que  $f_i(\Omega \setminus A_i)$  es separable entonces  $f(\Omega \setminus \bigcup_1^\infty A_i)$  es separable. Aplicando entonces el teorema de medibilidad de Pettis  $f$  resulta ser medible.

Como

$$\left( \int_\Omega \|f(x)\|_N^p dx \right)^{1/p} \leq \sum_{i,j=1}^N \left( \int_\Omega \|f_i(x)\|_{ij}^p dx \right)^{1/p} < \infty, \quad N = 1, 2, \dots,$$

$f$  está en  $L^p(\Omega, E)$  (si  $p = \infty$  se hacen las modificaciones usuales). Pongamos ahora, para  $\alpha \in W$ ,

$$g_\alpha(x) = (D^\alpha f_i(x))_{i=1}^\infty, \quad x \in \Omega;$$

según lo que acabamos de ver cada  $g_\alpha \in L^p(\Omega, E)$  y como

$$\begin{aligned} \langle \phi, g_\alpha \rangle &= \int_\Omega \phi(x) g_\alpha(x) dx = \left( \int_\Omega \phi(x) D^\alpha f_i(x) dx \right)_{i=1}^\infty = \\ &= ((-1)^{|\alpha|} \int_\Omega D^\alpha \phi(x) f_i(x) dx)_{i=1}^\infty = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega D^\alpha \phi(x) f(x) dx = \\ &= \langle \phi, D^\alpha f \rangle, \quad \phi \in \mathcal{D}(\Omega), \end{aligned}$$

resulta que  $f \in L^p_W(\Omega, E)$ . Evidentemente  $Jf = (f_i)_{i=1}^\infty$  y la aplicación  $J$  es sobreyectiva. Finalmente  $J$  es un isomorfismo topológico en virtud del teorema de la aplicación abierta.

2.  $E$  es topológicamente isomorfo a un subespacio de  $(\ell^2)^N$  (ver, por ejemplo, [14], p.103). Por tanto, en virtud del teorema 1,  $L^2_W(\Omega, E)$  es topológicamente isomorfo a un subespacio de  $L^2_W(\Omega, (\ell^2)^N)$ . Teniendo en cuenta el punto 1 y que el espacio  $L^2_W(\Omega, \ell^2)$  es un Hilbert separable, vemos que  $(\ell^2)^N$  contiene una copia de  $L^2_W(\Omega, E)$ . Supongamos ahora que  $E$  es de dimensión infinita y no contiene ninguna copia de  $C^N$ . En virtud de un teorema de Bessaga-Pelczyński ([3])  $E$  admite entonces una norma continua, por tanto también  $L^2_W(\Omega, E)$  admite una norma continua y no puede ser topológicamente isomorfo a  $(\ell^2)^N$ . Además,  $L^2_W(\Omega, E)$  no puede ser topológicamente isomorfo a un subespacio complementado de  $(\ell^2)^N$  pues, en caso contrario, existiría un subespacio cerrado  $G$  de  $(\ell^2)^N$  de manera que  $L^2_W(\Omega, E) \approx (\ell^2)^N / G$  lo cual implicaría, en virtud de un resultado de Bellenot-Dubinsky ([2], Prop.3, p.590), que  $L^2_W(\Omega, E)$  fuera un espacio de Banach. Entonces también  $E$  sería de Banach lo que contradiría la elección de  $E$ .

Si el espacio  $E$  contiene copias de  $C^N$  y  $L_W^2(\Omega, E)$  es topológicamente isomorfo a un subespacio complementado de  $(\ell^2)^N$  podemos concluir, aplicando un resultado de Metafune-Moscatelli ([10]), que necesariamente  $L_W^2(\Omega, E) \simeq (\ell^2)^N$ .

3. (i) se deduce de 1 y del teorema C de [13]. Probemos (ii): Si  $W$  es un intervalo entonces  $L_W^1(\mathbb{R}^n, E) \simeq (L^1(0, 1))^N$  en virtud de 1 y del teorema B de [13]. Supongamos ahora que se tenga el isomorfismo topológico

$$L_W^1(\mathbb{R}^n, E) \cong (L^1(0, 1))^N.$$

Entonces el espacio de Banach  $L_W^1(\mathbb{R}^n)$  es topológicamente isomorfo a un subespacio complementado de  $(L^1(0, 1))^N$ . Aplicando el lema de [4] vemos que  $L_W^1(\mathbb{R}^n)$  resulta ser topológicamente isomorfo a un subespacio complementado de un producto finito de copias de  $L^1(0, 1)$ . Puesto que  $L^1(0, 1) \times L^1(0, 1) \simeq L^1(0, 1)$  obtenemos que  $L_W^1(\mathbb{R}^n)$  es topológicamente isomorfo a un subespacio complementado de  $L^1(0, 1)$  pero entonces, aplicando nuevamente el teorema B de [13],  $W$  debe ser un intervalo. La prueba de (iii) es análoga a la de (ii) y la omitimos. c.q.d.

#### BIBLIOGRAFIA

- [1] R.A.ADAMS, *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York-San Francisco-London, 1975.
- [2] S.F.BELLENOT, E.DUBINSKY, *Fréchet Spaces with Nuclear Köthe Quotients*, Trans.Amer.Math.Soc.273,2, 574-594 (1982).
- [3] C.BESSAGA, A.PELCZYŃSKI, *On a class of  $B_0$ -spaces*, Bull. Acad.Polon.Sci. III 4, 375-377 (1957).
- [4] J.C.DIAZ, *A note on isomorphisms between powers of Banach spaces*, Collect.Math.38, 137-140 (1987).
- [5] N.DUNFORD, J.SCHWARTZ, *Linear Operators*, Par I. New York 1958.

- [6] H.G.GARNIR, M.De WILDE, J.SCHMETS, *Analyse fonctionnelle II*, Mathematische Reihe 37, Basel-Stuttgart 1972.
- [7] H.G.GARNIR, M.De WILDE, J.SCHMETS, *Analyse fonctionnelle, T.III*. Mathematische Reihe 45, Basel-Stuttgart 1973.
- [8] G.KÖTHE, *Topological Vector Spaces I*, Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin 1969.
- [9] G.KÖTHE, *Topological Vector Spaces II*, Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin 1979.
- [10] G.METAFUNE, V.B.MOSCATELLI, *Complemented Subspaces of Sums and Products of Banach Spaces*, Pendiente de publicación.
- [11] J.MOTOS, Ma.J.PLANELLS, *Una nota sobre los espacios de Sobolev anisotropos vectoriales  $L^p_T(E)$* , Collect. Math. 38, 249-256 (1987).
- [12] S.M.NIKOL'SKII, *Approximation of Functions of Several Variables and Imbedding Theorems*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1975.
- [13] A.PELCZYŃSKI, K.SENATOR, *On isomorphisms of anisotropic Sobolev spaces with "classical Banach spaces" and a Sobolev type embedding theorem*, Studia Math. 84, 169-215 (1986).
- [14] H.SCHAEFER, *Topological Vector Spaces*, Springer-Verlag, New York 1971.
- [15] L.SCHWARTZ, *Théorie des distributions à valeurs vectorielles*, Ch.I, Ann.Inst.Fourier 7, 1-141 (1957).
- [16] L.SCHWARTZ, *Théorie des distributions à valeurs vectorielles*, Ch.II, Ann.Inst.Fourier 8, 1-209 (1958).
- [17] H.J.SCHMEISSER, H.TRIEBEL, *Topics in Fourier Analysis and Function Spaces*, John Wiley & Sons, 1987.

Departamento de Matemática Aplicada  
 E.T.S.I. Industriales  
 Universidad Politécnica de Valencia  
 Camino de Vera s/n  
 46022 Valencia  
 ESPAÑA

Recibido en mayo de 1989.