

UNA DESIGUALDAD PARA CURVAS CERRADAS EN SUPERFICIES DE CURVATURA CONSTANTE

LILIANA M. GYSIN

1. INTRODUCCION

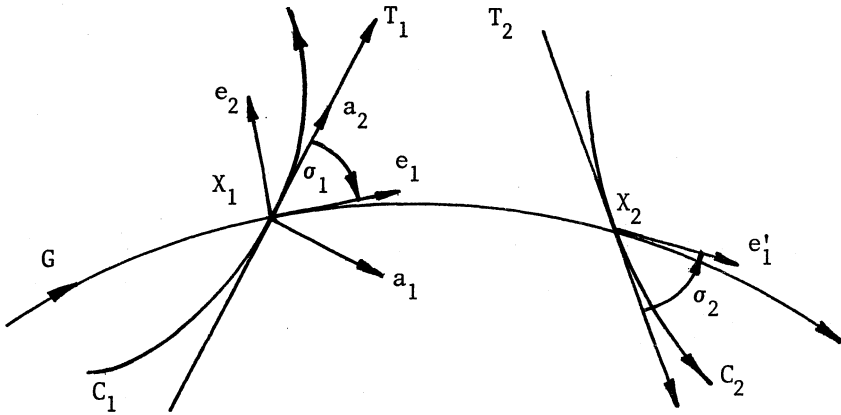
Dada una curva cerrada C , no necesariamente simple, contenida en una superficie W^2 de curvatura constante ϵK , llamando ds_i a la densidad de arco sobre la curva, dP a la densidad de área sobre la superficie, $d\vec{G}$ a la densidad de geodésicas orientadas sobre la superficie y $\omega(P)$ al "winding number" del punto $P \in W^2$ respecto de C , afirmamos que (1.1):

$$\int_{C \times C} ds_1 \wedge ds_2 - 4\pi \int_{P \in W^2} \omega^2(P) dP - \int_{(C \times C) \cap \vec{G} \neq \emptyset} \left[\frac{\sin(\epsilon K)^{1/2} r}{(\epsilon K)^{1/2}} - r \right] d\vec{G} \geq 0,$$

donde $r = r(x_i, x_j)$ es la distancia entre dos puntos de $\vec{G} \cap (C \times C)$. Además vale la igualdad sólo si C es una circunferencia o varias circunferencias coincidentes recorridas todas en el mismo sentido. Para la definición de "winding number" ver [1].

La demostración sigue esencialmente los pasos del trabajo de Banchoff y Pohl [1], pero utiliza conocidas fórmulas de Geometría Integral. En el §2 se obtienen dos expresiones para la densidad de geodésicas que se utilizan en el §3 para obtener el resultado principal, a partir de una relación entre $\omega(P)$ y $r(x_i, x_j)$. En el §4 se muestra, con un cálculo simple, que este resultado es una generalización tanto de la desigualdad isoperimétrica clásica (que vale para curvas simples), como del trabajo de Banchoff y Pohl [1] (que vale para curvas planas) en dimensión 2, y se exhibe un ejemplo en que vale la igualdad.

2. Consideremos conjuntos de geodésicas orientadas que unen los puntos de dos curvas orientadas C_1 y C_2 , contenidas en una superficie de curvatura constante ϵK . Sean X_1, X_2 los puntos de intersección respectivos, consideremos los siguientes sistemas ortonormales de coordenadas en X_1 (ver figura):



e_1 es tangente a $\vec{G}$; e_2 tal que $e_1 e_2$ tenga la misma orientación que $e_1 T_1$, siendo T_1 el tangente a C_1 en X_1 .

a_2 en T_1 ; a_2 tal que $a_1 a_2$ tenga la misma orientación que $e_1 e_2$.

Siguiendo a Santaló ([2], cp.17) podemos escribir

$$d\vec{G} = -\sin \sigma_1 ds_1 \wedge d\sigma_1 \quad (\sigma_1 = \angle(a_2, e_1)).$$

Por otro lado, si llamamos e'_1 al trasladado paralelamente de e_1 a lo largo de $\vec{G}$ de X_1 a X_2 , T_2 al tangente a C_2 en X_2 , $\sigma_2 = \angle(T_2, e'_1)$, como $d\sigma_1$ es el elemento de volumen de la esfera unitaria en el extremo del vector e_1 , resulta que

$$(2.1) \quad d\sigma_r = \frac{\sin(\epsilon K)^{1/2} r}{(\epsilon K)^{1/2}} d\sigma_1$$

es el elemento de arco para r fijo, y en consecuencia

$$d\sigma_r = -\sin \sigma_2 ds_2$$

Reemplazando obtenemos que

$$\frac{\text{sen}(\epsilon K)^{1/2} r}{(\epsilon K)^{1/2}} d\vec{G} = \text{sen } \sigma_1 \text{ sen } \sigma_2 ds_1 \wedge ds_2.$$

Para hallar la otra expresión integramos por partes:

$$\int r d\vec{G} = - \int [\int r \text{sen } \sigma_1 d\sigma_1] ds_1$$

dejando X_1 (y por lo tanto s_1) fijo, resultando que

$$\int r \text{sen } \sigma_1 d\sigma_1 = - \int r d(\cos \sigma_1) = -r \cos \sigma_1|_{X_1 \text{ fijo}} + \int \cos \sigma_1 dr.$$

Como para X_1 fijo es $r = 0$, y teniendo en cuenta que si proyectamos T_2 sobre r en X_2 es $\cos \sigma_2 = dr/ds_2$, reemplazando obtenemos

$$\int r d\vec{G} = - \int \cos \sigma_1 dr \wedge ds_1 = \int \cos \sigma_1 \cos \sigma_2 ds_1 \wedge ds_2.$$

3. Probaremos aquí el resultado principal. Para ello debemos ver primero que para una curva cerrada orientada C es

$$\int_{C \times C} r d\vec{G} = 2\pi \int_{W^2} \omega^2(P) dP.$$

A tal fin consideramos pares de puntos y geodésicas orientadas $(P, \vec{G})/P \in \vec{G} \subseteq W^2$. Según Santaló [2, (12.52)] es

$$dP(G) \wedge d\vec{G} = dG(P) \wedge dP$$

Integrando $\omega^2(P)$, del lado derecho obtenemos usando [2, (12.35)]

$$\int_{W^2} \omega^2(P) dG(P) \wedge dP = (\Sigma_1/\Sigma_0) \int_{W^2} \omega^2(P) dP = \pi \int_{W^2} \omega^2(P) dP$$

donde $\Sigma_1 = 2\pi$, $\Sigma_0 = 2$ indican las "áreas" de las esferas de dimensión 1 y 0 respectivamente.

Para calcular la integral del lado izquierdo consideremos la siguiente situación:

Sea C una curva cerrada orientada (no necesariamente simple),

$\vec{G}$ una geodésica orientada y llamemos x_i ($i = 1, \dots, n$) a los puntos de $\vec{G} \cap C$. Pongamos $i(x_i) = +1$ si el ángulo entre la tangente a la curva en x_i y la geodésica es menor que π , $i(x_i) = -1$ si es mayor que π . Notaremos $\omega(P)$ al "winding number" del punto P respecto de la curva C . Claramente es

$$\omega(P) = \sum_{x_j < P} i(x_j) = \sum_{x_k > P} i(x_k).$$

Llamando $F_{jk}(P) = 1$ si $x_j < P < x_k$ y $F_{jk}(P) = 0$ en otro caso e integrando ω^2 sobre la geodésica resulta

$$\begin{aligned} \int_{P \in \vec{G}} \omega^2(P) dP &= - \int_{P \in \vec{G}} \left[\sum_{x_j < P} i(x_j) \sum_{x_k > P} i(x_k) \right] dP = \\ &= - \sum_{x_j, x_k} i(x_j) i(x_k) \int_{P \in \vec{G}} F_{jk}(P) dP = - \sum_{x_j < P < x_k} i(x_j) i(x_k) d(x_j, x_k) = \\ &= N \left[\sum_{i=1}^{n-1} \omega(x_i, x_{i+1}) r(x_i, x_{i+1}) \right] \end{aligned}$$

donde N es el número de puntos de $(C \times C) \cap \vec{G}$, para pares (x_j, x_k) tales que $i(x_j) \neq i(x_k)$, y $\omega(x_i, x_{i+1})$ es el winding number de un punto P / $x_i < P < x_{i+1}$ (el winding number es constante en las componentes conexas de $W^2 - C$).

Integrando esto a todas las geodésicas orientadas de W^2 , teniendo en cuenta que cada par (x_i, x_{i+1}) está en N rectas que cortan a $C \times C$ y es interior a la curva tantas veces como su winding number indica; y que las geodésicas son orientadas, obtenemos

$$(1/2) \int_{\vec{G} \cap (C \times C) \neq \emptyset} r d\vec{G} = \pi \int_{W^2} \omega^2(P) dP$$

que es el resultado buscado.

Finalmente procediendo como Banchoff y Pohl [1] calculamos

$$\int_{C \times C} 2 \sin^2 [(\sigma_1 - \sigma_2)/2] ds_1 \wedge ds_2$$

que es siempre ≥ 0 y vale 0 sólo si $\sigma_1 = \sigma_2$, o sea sólo si C

es una circunferencia o varias circunferencias coincidentes todas recorridas en el mismo sentido.

Desarrollando es:

$$\begin{aligned} \int_{C \times C} ds_1 \wedge ds_2 - \int_{C \times C} \cos \sigma_1 \cos \sigma_2 ds_1 \wedge ds_2 - \int_{C \times C} \sin \sigma_1 \sin \sigma_2 ds_1 \wedge ds_2 = \\ = \int_{C \times C} ds_1 \wedge ds_2 - \int_{C \times C \cap \vec{G} \neq \emptyset} r d\vec{G} - \int_{(C \times C) \cap \vec{G} \neq \emptyset} \frac{\sin(\epsilon K)^{1/2} r}{(\epsilon K)^{1/2}} d\vec{G}. \end{aligned}$$

Restando y sumando la segunda integral y reemplazando los resultados previos obtenemos el resultado principal (1.1).

4. Veamos aquí en qué sentido este resultado es una generalización:

Apliquemos primero (1.1) a una curva cerrada orientada simple C , de longitud L que encierra un área F . En este caso podemos evaluar:

$$\int_{C \times C} ds_1 \wedge ds_2 = L^2 \quad ; \quad \int_{P \in W^2} \omega^2(P) dP = \int_{P \text{ int. a } C} dP = F$$

esta última porque ω es 1 en el interior de C y 0 fuera.

Además, según Santaló [2, (18.8)] es

$$\int_{(C \times C) \cap \vec{G} \neq \emptyset} \left[\frac{\sin(\epsilon K)^{1/2} r}{(\epsilon K)^{1/2}} - r \right] d\vec{G} = -\epsilon K F^2.$$

Reemplazando en (1.1) se obtiene la clásica desigualdad isoperimétrica para curvas simples en superficies de curvatura constante, a saber:

$$L^2 - 4\pi F + \epsilon K F^2 \geq 0,$$

con la igualdad valiendo sólo para una circunferencia.

Por otra parte, si bien (1.1) no es aplicable directamente al caso en que W^2 es el plano euclídeo, la única diferencia que debe hacerse es en el §2, donde (2.1) debe ser $d\sigma_r = r d\sigma_1$, con lo cual desaparece en (1.1) la última integral, obteniendo

$$\int_{C \times C} ds_1 \wedge ds_2 - 4\pi \int_{P \in \mathbb{R}^2} \omega^2(P) dP \geq 0,$$

que es el resultado de Banchoff y Pohl [1], que ellos generalizan a dimensión y codimensión arbitrarias.

Apliquemos finalmente (1.1) a una circunferencia hiperbólica de radio ρ recorrida 2 veces en el mismo sentido. En este caso la longitud de la curva es $L = 4\pi \operatorname{sh} \rho$ (el doble de la longitud de una circunferencia); la integral sobre los puntos interiores a la curva es el área encerrada por 1 circunferencia, o sea

$$F_1 = 2\pi \int_0^\rho \operatorname{sh} r dr = 2\pi (\operatorname{ch} \rho - 1),$$

y el área encerrada por la curva es $F_2 = 2F_1$, además $\omega = 2$ en los puntos interiores a la curva y 0 fuera. Entonces

$$\begin{aligned} \int_{C \times C} ds_1 \wedge ds_2 - 4\pi \omega^2 \int_{P \text{ int. } C} dP - \int_{(C \times C) \cap \vec{G} \neq \emptyset} [\operatorname{sh} r - r] d\vec{G} &= \\ &= I^2 - 16\pi F_1 - F_2^2 = \\ &= 16\pi^2 [\operatorname{sh}^2 \rho - 2 \operatorname{ch} \rho + 2 - \operatorname{ch}^2 \rho + 2 \operatorname{ch} \rho - 1] = 0. \end{aligned}$$

BIBLIOGRAFIA

- [1] T.BANCHOFF & W.POHL, *A generalization of the isoperimetric inequality*, J.Diff.Geom.6 (1971) 193-211.
- [2] L.A.SANTALO, *Integral geometry and geometric probability*, Addison-Wesley, Reading, Ma.(1976).

Departamento de Matemática
Fac.Cs.Exactas y Nat.-UBA
Pab.I, Ciudad Universitaria
1428 - Capital Federal
Argentina.

Recibido en octubre de 1989.