Revista de la
Unión Matemática Argentina
Volumen 36, 1990.

UNA VARIANTE DE LA TRANSFORMACION INTEGRAL DE KRÄTZEL

J. RODRIGUEZ

Resumen. En este trabajo se estudia una variante de la transformación integral de Krätzel, en cuyo núcleo comparece una función la cual se demuestra que es solución de la ecuación diferencial de orden fraccionario $t^{\alpha+\beta-\rho}Dt^{\rho-\alpha+1}D_K^{\rho}t^{-\beta}z=(-1)^{n+1}\rho\ z$, donde α, β y ρ son numeros reales. Se establece la fórmula de inversión y se determina la relación de esta transformación con la de Laplace. Finalmente, se consideran algunas convoluciones y se dan las principales reglas operacionales.

Abstract. In this paper we study a variant for the Krätzel integral transform whose kernel contains a function that is shown to be a solution for the differential equation of fractional order $t^{\alpha+\beta-\rho}Dt^{\rho-\alpha+1}D_K^{\rho}t^{-\beta}z=(-1)^{n+1}\rho\ z$, where α, β and ρ are real numbers. The inversion formula is stablished and a connection with Laplace's is determined. Finally some convolutions are considered and the principal operational rules are obtained.

1. INTRODUCCION.

En este trabajo se estudia una nueva variante de la transformada integral de Krätzel [3], que denominamos $R^{(\rho)}_{\alpha,\beta}$-transformación integral, y que viene definida por el par

$$F(s)=R_{\alpha,\beta}^{(\rho)}\{f(t)\}=\int_0^{\infty} W_{\rho,\alpha-1,\beta}(st)f(t)dt \tag{1.1}$$

$$f(t)=R_{\alpha,\beta}^{(\rho)^{-1}}\{F(s)\}=\frac{\rho}{2\pi i}\int_{\Sigma}(st)^{\alpha+\beta-1}\Phi(\frac{1}{\rho},\frac{\alpha}{\rho};st)f(t)dt \tag{1.2}$$

Esta transformación incluye diversos casos particulares, según los valores asignados a los parametros ρ, α y β. Así, cuando $\alpha=\nu+1$ y $\beta=0$, resulta la transformada investigada por E. Krätzel [3]; en cambio, si se hace $\alpha=\nu+1$ y $\beta=-\nu$, ó bien, $\rho=1$, $\alpha=\nu+1$ y $\beta=-\nu$ se obtienen transformadas estudiadas por J. Rodríguez [5,6].

La función $W_{\rho,\alpha-1,\beta}(t)$ que comparece en el núcleo de (1.1) se expresa por

$$W_{\rho,\alpha-1,\beta}(t)=t^{\beta}Z_{\rho,\alpha-1}(t) \tag{1.3}$$

siendo

$$Z_{\rho,\alpha-1}(t)=t^{\alpha-1}\eta(\rho,\alpha;t^{\rho}) \tag{1.4}$$

y donde $\eta(\rho,\alpha;z)$ es la función

$$\eta(\rho,\alpha;z)=\int_0^{\infty} t^{-\alpha}e^{-t-zt^{-\rho}}dt, \tag{1.5}$$

con $\rho>0$ y $|\arg z|<\frac{\pi}{2}$. Esta función ha sido estudiada en [3] y [4] y constituye una generalización de la función modificada de Bessel de tercera especie.

$$K_{\alpha}(z)=\frac{1}{2}(\frac{z}{2})^{\alpha}\int_0^{\infty} t^{-\alpha-1}e^{-t-\frac{z^2}{4t}}dt \qquad (\operatorname{Re} z^2>0)$$

Cuando $\rho=1$ se tiene

$$W_{1,\alpha-1,\beta}(t)=t^{\alpha+\beta-1}\eta(1,\alpha;t)=2t^{\alpha+\beta-1}L_{\alpha-1}(t),$$

siendo $L_{\alpha-1}(t)=t^{\frac{1-\alpha}{2}}K_{\alpha-1}(2\sqrt{t})$ la función modificada de Bessel-Clifford [2] de tercera especie, solución de la ecuación diferencial

$$xy''+\alpha y'-y=0.$$

El comportamiento asintotico de la función $W_{\rho,\alpha-1,\beta}(t)$ se deduce de

[3]:

Para $t \to 0^+$

$$W_{\rho,\alpha-1,\beta}(t) \simeq \begin{cases} \frac{1}{\rho}\Gamma(\frac{\alpha-1}{\rho})t^{\beta} & \text{si Re } (\alpha-1)>0 \\ \frac{1}{\rho}\Gamma(\frac{\alpha-1}{\rho})t^{\beta}+\Gamma(\frac{1-\alpha}{\rho})t^{\alpha+\beta-1}, & \text{si Re } (\alpha-1)=0,\ \alpha-1\neq 0 \\ -t^{\beta}\ln t\ , & \text{si } \alpha-1=0 \\ \Gamma(1-\alpha)t^{\alpha+\beta-1}, & \text{si Re } (\alpha-1)<o \end{cases} \tag{1.6}$$

Para $t \to +\infty$

$$W_{\rho,\alpha-1,\beta}(t) \simeq a t^{\frac{2\alpha+2\beta-2+2\beta\rho-\rho}{2(1+\rho)}} e^{-bt^{\frac{\rho}{\rho+1}}}, \tag{1.7}$$

donde

$$a=\left(\frac{2\pi}{\rho+1}\right)^{\frac{1}{2}} \rho^{-\frac{2\alpha-1}{2(\rho+1)}} \quad \text{y} \quad b=\left(1+\frac{1}{\rho}\right)e^{\frac{1}{\rho+1}}.$$

Por otra parte, en el núcleo de (1.2) comparece la función $\Phi(\rho,\beta;z)$ de Wright [9] dada por:

$$\Phi(\rho,\beta;z)=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!\Gamma(\rho n+\beta)}\ , \tag{1.8}$$

la cual, cuando $\rho=1$, se reduce a

$$\Phi(1,\nu+1;-\frac{z^2}{4})=(\frac{z}{2})^{-\nu}J_{\nu}(z)$$

siendo $J_{\nu}(z)$ la función de Bessel de primera especie.

En cuanto al comportamiento asintótico de (1.8), para $|z| \to \infty$ valen [3]:

$$\Phi(\frac{1}{\rho},\frac{\alpha}{\rho};z)=\alpha_1 z^{\frac{\rho-2\alpha}{2(\rho+1)}} e^{\alpha_3 z^{\frac{\rho}{\rho+1}}}(1+O(z^{-\frac{\rho}{\rho+1}}))+$$

$$+\alpha_2(e^{2\pi i}z)^{\frac{\rho-2\alpha}{2(\rho+1)}} e^{\alpha_3 (e^{2\pi i}z)^{\frac{\rho}{\rho+1}}}(1+O(z^{-\frac{\rho}{\rho+1}})),\ (-2\pi<\arg z<0) \tag{1.9}$$

$$\Phi(\frac{1}{\rho},\frac{\alpha}{\rho};z)=\alpha_1(e^{-2\pi i}z)^{\frac{\rho-2\alpha}{2(\rho+1)}}e^{\alpha_3(e^{-2\pi i}z)^{\frac{\rho}{\rho+1}}}(1+O(z^{-\frac{\rho}{\rho+1}}))+$$

$$+\alpha_2 z^{\frac{\rho-2\alpha}{2(\rho+1)}}e^{\alpha_3 z^{\frac{\rho}{\rho+1}}}(1+O(z^{-\frac{\rho}{\rho+1}})),\quad (0<\arg z<2\pi) \tag{1.10}$$

donde α_1, α_2 y $\alpha_3=(\rho+1)^{-\frac{\rho}{\rho+1}}$ son constantes positivas.

2. OPERADORES FRACCIONARIOS.

A continuación damos algunas definiciones y propiedades de los operadores fraccionarios de Riemann-Liouville y Weyl, que se encuentran principalmente en [1], [7] y [8]. Dichas propiedades serán de gran utilidad en este trabajo y permitirán establecer que la función $W_{\rho,\alpha-1,\beta}(t)$ es solución de cierta ecuación diferencial fraccionaria.

Definición 1.-

Si $\alpha>0$, se definen las integrales fraccionarias de Riemann-Liouville y Weyl respectivamente por:

i) $$I^{\alpha}f(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-x)^{\alpha-1}f(x)dx \tag{2.1}$$

ii) $$K^{\alpha}f(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_t^{\infty} (x-t)^{\alpha-1}f(x)dx \tag{2.2}$$

Proposición 1.-

Si α, $\beta\geq 0$, se tiene

i) $I^0f(t)=\lim_{\alpha\to 0}I^{\alpha}f(t)=f(t)$ y $K^0f(t)=\lim_{\alpha\to 0}K^{\alpha}f(t)=f(t)$ (2.3)

ii) $I^{\alpha}I^{\beta}f(t)=I^{\alpha+\beta}f(t)$ y $K^{\alpha}K^{\beta}f(t)=K^{\alpha+\beta}f(t)$ (2.4)

iii) $D^nI^{\alpha+n}f(t)=I^{\alpha}f(t)$ y $D^nK^{\alpha+n}f(t)=(-1)^nK^{\alpha}f(t)$ (2.5)

iv) $K^{\alpha}(f(st))=s^{-\alpha}(K^{\alpha}f)(st)$ (2.6)

v) $D^nK^{\alpha}(f(st))=(-1)^ns^{n-\alpha}(D^nK^{\alpha}f)(st)$ (2.7)

Definición 2.-

Las derivadas fraccionarias de Riemann-Liouville y Weyl se definen respectivamente por:

i) $D_I^{\alpha} f(t)=D^n I^{n-\alpha} f(t)$ (2.8)

ii) $D_K^{\alpha} f(t)=D^n K^{n-\alpha} f(t)$ (2.9)

para cualquier $n\in\mathbb{N}$ con $n-1<\alpha\leq n$.

Proposición 2.-

Si $\alpha,\beta\geq 0$, se verifica:

i) $D_I^{\alpha} D_I^{\beta} f(t)=D_I^{\alpha+\beta} f(t)$ y $D_K^{\alpha} D_K^{\beta} f(t)=D_K^{\alpha+\beta} f(t)$ (2.10)

ii) $D_I^{\alpha} f(t)=I^{n-\alpha} D^n f(t)$, si $f(0^+)=0$ (2.11)

iii) $D_K^{\alpha} f(t)=(-1)^n K^{n-\alpha} D^n f(t)$, si $\lim_{t\to +\infty} f(t)=0$ (2.12)

Proposición 3.-

Si $\alpha>0$ y $(t-x)^{\alpha-1} f(t)g(x)$ es absolutamente integrable en el triángulo infinito $T=\{(t,x)\in\mathbb{R}^2 / \ 0<t<x\}$, se tiene:

$$\int_0^{\infty} f(t)K^{\alpha}(g(t))dt=\int_0^{\infty} g(t)I^{\alpha}(f(t))dt \qquad (2.13)$$

Proposición 4.-

Si $\alpha>0$ y $n-1<\alpha\leq n$, $n\in\mathbb{N}$, se tiene

i) $K^{\alpha} e^{-at}=a^{-\alpha} e^{-at}$ $(at>0)$ (2.14)

ii) $D_K^{\alpha} e^{-at}=(-1)^n a^{\alpha} e^{-at}$ $(at>0)$. (2.15)

Proposición 5.-

Para cualquier $\nu\in\mathbb{R}^+$ tal que $n-1<\nu\leq n$, $n\in\mathbb{N}$, resulta

$$D_K^{\nu} Z_{\rho,\alpha-1}(t)=(-1)^n Z_{\rho,\alpha-\nu-1}(t) \qquad (2.16)$$

Demostración: Se sabe que

$$Z_{\rho,\alpha-1}(t)=t^{\alpha-1}\int_0^{\infty} u^{-\alpha} e^{-u-(\frac{t}{u})^{\rho}} du=\int_0^{\infty} x^{\alpha-2} e^{-\frac{t}{x}-x^{\rho}} dx$$

y, por tanto;

$$D_K^{\nu} Z_{\rho,\alpha-1}(t)=\int_0^{\infty} x^{\alpha-2} D_K^{\nu}(e^{-\frac{t}{x}})e^{-x^{\rho}} dx$$

De (2.15) se infiere finalmente

$$(-1)^n\int_0^{\infty} x^{\alpha-2-\nu} e^{-\frac{t}{x}-x^{\rho}} dx=(-1)^n Z_{\rho,\alpha-\nu-1}(t)$$

Proposición 6.-

Si $n-1<\rho\leq n$, $n\in\mathbb{N}$, la función $W_{\rho,\alpha-1,\beta}(t)$ es una solución de la ecuación diferencial de orden fraccionario

$$t^{\alpha+\beta-\rho}Dt^{\rho-\alpha+1}D_K^{\rho}t^{-\beta}z=(-1)^{n+1}\rho\ z \qquad (2.17)$$

Demostración:

En efecto, el primer mienbro de (2.17) vale

$$t^{\alpha+\beta-\rho}\left[(\rho-\alpha+1)t^{\rho-\alpha}D_K^{\rho}t^{-\beta}W_{\rho,\alpha-1,\beta}(t)+t^{\rho-\alpha+1}D_K^{\rho+1}t^{-\beta}W_{\rho,\alpha-1,\beta}(t)\right]=$$

$$=t^{\beta}\left[(\rho-\alpha+1)D_K^{\rho}Z_{\rho,\alpha-1}(t)+tD_K^{\rho+1}Z_{\rho,\alpha-1}(t)\right]$$

y, teniendo en cuenta (2.16), queda

$$t^{\beta}\left[(\rho-\alpha+1)(-1)^n Z_{\rho,\alpha-1-\rho}(t)+(-1)^{n+1}tZ_{\rho,\alpha-2-\rho}(t)\right] \qquad (2.18)$$

Ahora bien, puesto que:

$$Z_{\rho,\alpha-1-\rho}(t)=\int_0^{\infty} u^{\alpha-2-\rho} e^{-\frac{t}{u}} e^{-u^{\rho}} du=\frac{1}{\alpha-1-\rho}\int_0^{\infty}\frac{d}{du}(u^{\alpha-1-\rho})e^{-\frac{t}{u}} e^{-u^{\rho}} du \qquad (2.19)$$

$$Z_{\rho,\alpha-2-\rho}(t)=\int_0^{\infty} u^{\alpha-3-\rho} e^{-\frac{t}{u}} e^{-u^{\rho}} du=\frac{1}{t}\int_0^{\infty}\frac{d}{du}(e^{-\frac{t}{u}})u^{\alpha-1-\rho}e^{-u^{\rho}} du, \qquad (2.20)$$

sustituyendo (2.19) y (2.20) en (2.18), resulta

$$t^{\beta}\left[(-1)^{n+1}\int_0^{\infty}\frac{d}{du}(u^{\alpha-1-\rho})e^{-\frac{t}{u}} e^{-u^{\rho}} du + (-1)^{n+1}\int_0^{\infty}\frac{d}{du}(e^{-\frac{t}{u}})u^{\alpha-\rho-1}e^{-u^{\rho}} du\right]=$$

$$=(-1)^{n+1}t^{\beta}\int_0^{\infty}\frac{d}{du}(u^{\alpha-\rho-1}e^{-\frac{t}{u}})e^{-u^{\rho}} du$$

e, integrando por partes, se obtiene el resultado deseado:

$$(-1)^{n+1}\rho t^{\beta}\int_0^{\infty} u^{\alpha-2} e^{-\frac{t}{u}}\, e^{-u^{\rho}} du=(-1)^{n+1}\rho\ W_{\rho,\alpha-1,\beta}(t).$$

3. LA TRANSFORMACION INTEGRAL $R^{(\rho)}_{\alpha,\beta}$.

En este apartado se analiza la convergencia de la integral que define la transformación $R^{(\rho)}_{\alpha,\beta}$ y se establece el correspondiente teorema de inversión, esto es, se fijan condiciones que permiten asegurar la validez de la fórmula (1.2).

Proposición 7.-

Sean α y β números complejos y sea $f(t)$ una función localmente integrable en $(0,\infty)$, que satisface:

$$f(t)=\begin{cases} O(t^{-\beta}) & \text{si Re } \alpha-1\geq 0 \\ O(t^{-\alpha-\beta+1}) & \text{si Re } \alpha-1<0 \end{cases} \quad ,\text{para } t\to 0^{+} \tag{3.1}$$

y

$$f(t)=O(e^{ct^{\frac{\rho}{\rho+1}}}),\ \text{para } t\to +\infty \tag{3.2}$$

En estas hipótesis, la transformación integral $R^{(\rho)}_{\alpha,\beta}\{f(t)\}$ converge absolutamente cuando Re $s^{\frac{\rho}{\rho+1}}>\frac{c}{b}$.

Demostración: en efecto,

$$F(s)=R^{(\rho)}_{\alpha,\beta}\{f(t)\}=\int_0^{\varepsilon} W_{\rho,\alpha-1,\beta}(st)f(t)dt+\int_{\varepsilon}^{T} W_{\rho,\alpha-1,\beta}(st)f(t)dt+$$
$$+\int_T^{\infty} W_{\rho,\alpha-1,\beta}(st)f(t)dt \qquad (0<\varepsilon<T<\infty).$$

La primera de las integrales del segundo miembro converge absolutamente debido a (1.6) y (3.1); la segunda, por ser $f(t)$ localmente integrable y por la continuidad de $W_{\rho,\alpha-1,\beta}(t)$; y la tercera, en virtud de (1.7) y (3.2) para Re $s^{\frac{\rho}{\rho+1}}>\frac{c}{b}$.

A continuación, con la ayuda de las representaciones integrales

$$\eta(\rho,\alpha;(st)^{\rho})=\int_0^{\infty}\tau^{-\alpha}e^{-\tau-(\frac{st}{\tau})^{\rho}}d\tau, \tag{3.3}$$

$$\eta(\rho,\alpha;(st)^{\rho})=s^{1-\alpha}\int_0^{\infty}x^{-\alpha}e^{-sx-(\frac{t}{x})^{\rho}}dx, \tag{3.4}$$

$$\eta(\rho,\alpha;(st)^{\rho})=t^{1-\alpha}\int_0^{\infty}x^{\alpha-2}e^{-\frac{t}{x}-(sx)^{\rho}}dx, \tag{3.5}$$

se puede expresar la transformación integral $R^{(\rho)}_{\alpha,\beta}\{f(t)\}$ mediante la iteración de transformadas de Laplace:

Proposición 8.-

La transformación integral (1.1) se expresa por:

$$F(s)=R^{(\rho)}_{\alpha,\beta}\{f(t)\}=\frac{s^{\beta}}{\rho}\mathfrak{L}\left\{x^{-\alpha}\mathfrak{L}\left\{r^{\frac{\alpha+\beta-\rho}{\rho}}f(r^{\frac{1}{\rho}});x^{-\rho}\right\};s\right\}, \tag{3.6}$$

o bien, por:

$$F(s)=R^{(\rho)}_{\alpha,\beta}\{f(t)\}=\frac{s^{\alpha+\beta-1}}{\rho}\mathfrak{L}\left\{r^{\frac{\alpha-\rho-1}{\rho}}\mathfrak{L}\left\{t^{\beta}f(t);r^{-\frac{1}{\rho}}\right\};s^{\rho}\right\}\right\} \tag{3.7}$$

donde $\mathfrak{L}$ denota la transformación clásica de Laplace.

Demostración:

Sustituyendo (3.4) en (1.1) queda:

$$F(s)=R^{(\rho)}_{\alpha,\beta}\{f(t)\}=\int_0^{\infty}s^{\beta}t^{\alpha+\beta-1}f(t)dt\int_0^{\infty}x^{-\alpha}e^{-sx-(\frac{t}{x})^{\rho}}dx$$

y, cambiando el orden de integración, resulta

$$s^{\beta}\int_0^{\infty}e^{-sx}x^{-\alpha}dx\int_0^{\infty}e^{-(\frac{t}{x})^{\rho}}t^{\alpha+\beta-1}f(t)dt.$$

Ahora bien, realizando el cambio de variable $t^{\rho}=r$, se obtiene (3.6):

$$\frac{s^{\beta}}{\rho}\int_0^{\infty}e^{-sx}x^{-\alpha}dx\int_0^{\infty}e^{-x^{-\rho}r}\,r^{\frac{\alpha+\beta-\rho}{\rho}}f(r^{\frac{1}{\rho}})dr=$$

$$=\frac{s^{\beta}}{\rho}\mathfrak{L}\left\{x^{-\alpha}\mathfrak{L}\left\{r^{\frac{\alpha+\beta-\rho}{\rho}}f(r^{\frac{1}{\rho}});x^{-\rho}\right\};s\right\}.$$

De igual modo, sustituyendo (3.5) en (1.1), cambiando el orden de integración y realizando el cambio de variables $x^{\rho}=r$ se deduce (3.7).

Recurriendo a (3.6) podemos calcular la transformada de la función t^{γ}.

$$R^{(\rho)}_{\alpha,\beta}\{t^{\gamma}\}=\frac{s^{\beta}}{\rho}\mathfrak{L}\left\{x^{-\alpha}\mathfrak{L}\left\{r^{\frac{\alpha+\beta-\rho}{\rho}}r^{\frac{\gamma}{\rho}};x^{-\rho}\right\};s\right\}=\frac{1}{\rho}\Gamma\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\rho}\right)\Gamma(\beta+\gamma+1)s^{-\gamma-1}, \tag{3.8}$$

siempre que Re $(\beta+\gamma)>-1$, Re $(\alpha+\beta+\gamma)>0$ y Re $s>0$.

Esta fórmula permite calcular la transformada de la función $t^{-\beta}\Phi(\frac{1}{\rho},\frac{\alpha}{\rho};t^{\rho})$, que vale:

$$R^{(\rho)}_{\alpha,\beta}\{t^{-\beta}\Phi(\frac{1}{\rho},\frac{\alpha}{\rho};t^{\rho})\}=\frac{1}{\rho}\cdot\frac{s^{\beta}}{s-1}, \quad \text{Re } s>1 \tag{3.9}$$

Seguidamente se prueba el resultado fundamental:

Proposición 9.- (Fórmula de inversión)

Si F(s) es una función definida en el dominio

$$D=\left\{s \;/\; \text{Re } s^{\frac{\rho}{\rho+1}}\geq \frac{c}{b},\ |\arg s|\leq\frac{\pi}{2}(1+\frac{1}{\rho}),\rho\geq1\right\}$$

donde b y c son constantes que intervienen en (1.7) y (3.2) respectivamente y si, ademas se supone que:

i) $s^{-\beta}F(s)$ es holomorfa en D

ii) $s^{-\beta}F(s)$ tiende a cero cuando $|s|\to\infty$, uniformemente en arg s.

iii) El camino de integración Σ viene dado por Re $s^{\frac{\rho}{\rho+1}}=\frac{c}{b}$,

$$|\arg s|\to\frac{\pi}{2}(1+\frac{1}{\rho}) \text{ cuando } |s|\to\infty,$$

iv) Existe $\int_{\Sigma}|z^{\frac{\rho-2\alpha}{2(1+\rho)}-\beta}F(z)|\,|dz|<\infty$,

se verifica entonces que:

$$f(t)=\frac{\rho}{2\pi i}\int_{\Sigma}(zt)^{-\beta}\Phi(\frac{1}{\rho},\frac{\alpha}{\rho};zt)F(z)dz$$

donde

$$F(s)=\int_{0}^{\infty}W_{\rho,\alpha-1,\beta}(st)f(t)dt.$$

Demostración:

En efecto, supuesto s fijado en el interior de D se tiene

$$\int_0^\infty W_{\rho,\alpha-1,\beta}(st)f(t)dt=\int_0^\infty W_{\rho,\alpha-1,\beta}(st)\frac{\rho}{2\pi i}\int_\Sigma (zt)^{-\beta}\Phi(\frac{1}{\rho},\frac{\alpha}{\rho};zt)F(z)dzdt$$

y, en virtud de la proposición 7 y la condición iv) de esta proposición deducida de (1.9) y (1.10) podemos cambiar el orden de integración

$$\frac{\rho}{2\pi i}\int_\Sigma z^{-\beta}F(z)dz\cdot\int_0^\infty W_{\rho,\alpha-1,\beta}(st)\cdot t^{-\beta}\Phi(\frac{1}{\rho},\frac{\alpha}{\rho};zt)dt=$$

$$=\frac{\rho}{2\pi i}\int_\Sigma \frac{F(z)}{z}dz\int_0^\infty W_{\rho,\alpha-1,\beta}(\frac{s}{z}\cdot x)x^{-\beta}\Phi(\frac{1}{\rho},\frac{\alpha}{\rho};x)dx$$

y, por (3.9) y al ser $|\frac{z}{s}|<1$, queda

$$\frac{s^\beta}{2\pi i}\int_\Sigma \frac{z^{-\beta}F(z)}{s-z}dz. \tag{3.10}$$

Nos proponemos evaluar la integral (3.10). Para ello aplicamos la fórmula de los residuos de Cauchy en el recinto limitado por el contorno cerrado Γ constituido por el camino Σ intersectado con el arco de circunferencia C_R de centro $k=k(\frac{c}{b},\rho)$ igual a constante sobre el eje real y radio R que tiene al punto s en su interior:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{z^{-\beta}F(z)}{s-z}dz=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_R} \frac{z^{-\beta}F(z)}{s-z}dz - \frac{1}{2\pi i}\int_\Sigma \frac{z^{-\beta}F(z)}{s-z}dz=-s^{-\beta}F(s).$$

A continuación se prueba que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_R} \frac{z^{-\beta}F(z)}{s-z}dz \longrightarrow 0, \quad \text{cuando } |z|\rightarrow\infty. \tag{3.11}$$

Ciertamente, de la condición ii) se sigue que cualquiera que sea $\varepsilon>0$, existe un R_0 tal que para todo $R>R_0$ se tiene $|z^{-\beta}F(z)|<\varepsilon$.

Todos los puntos de z de C_R son de la forma $z=k+Re^{i\vartheta}$, con $-\frac{\pi}{2}(1+\frac{1}{\rho})\leq\vartheta\leq\frac{\pi}{2}(1+\frac{1}{\rho})$, y se cumple:

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{C_R} \frac{z^{-\beta}F(z)}{s-z}dz\right|\leq\frac{1}{2\pi}\int_{C_R}\frac{|z^{-\beta}F(z)|}{|s-z|}|dz|\leq\frac{\varepsilon R(1+\frac{1}{\rho})}{2(R-|s-k|)}\leq\varepsilon(1+\frac{1}{\rho})\leq 2\varepsilon,$$

si, y solamente si, $R>R_0$, $R>2|s-k|$ y $\rho\geq 1$.

Luego, (3.11) tiende a cero cuando $R\to\infty$ y por tanto

$$\frac{s^{\beta}}{2\pi i}\int_{\Sigma}\frac{z^{-\beta}F(z)}{s-z} = F(s)$$

lo cual completa la demostración del aserto.

4. CONVOLUCIONES PARA LA TRANSFORMACION $R_{\alpha,\beta}^{(\rho)}$.

Utilizando las fórmulas (3.6) y (3.7) introducimos dos convoluciones para la $R_{\alpha,\beta}^{(\rho)}$ transformada integral.

Definición 3.-

La convolución * de dos funciones f(t) y g(t) viene dada por

$$(f*g)(t^{\frac{1}{\rho}})=\frac{1}{\rho}t^{1-\frac{\alpha+\beta}{\rho}}D_I^{\frac{\alpha-1}{\rho}}\int_0^t(t-\xi)^{\frac{\alpha+\beta}{\rho}-1}\xi^{\frac{\alpha+\beta}{\rho}-1}d\xi\cdot$$

$$\cdot\int_0^1\eta^{\beta}(1-\eta)^{\beta}f(\xi^{\frac{1}{\rho}}\eta)g[(1-\eta)(t-\xi)^{\frac{1}{\rho}}]d\eta. \qquad (4.1)$$

Proposición 10.-

Si la convolución de dos funciones f(t) y g(t) se define según (4.1) y si f(t) y g(t) verifican las hipótesis de la proposición 7, se tiene $R_{\alpha,\beta}^{(\rho)}\{(f*g)\}$ converge absolutamente cuando Re $s^{\frac{\rho}{\rho+1}}>\frac{c}{b}$ y se verifica

$$R_{\alpha,\beta}^{(\rho)}\{(f*g)(t)\}=s^{-\beta}\,R_{\alpha,\beta}^{(\rho)}\{f(t)\}\cdot R_{\alpha,\beta}^{(\rho)}\{g(t)\}. \qquad (4.2)$$

Demostración:

A tenor de (3.6), pongamos:

$$F(s)=R_{\alpha,\beta}^{(\rho)}\{f(t)\}=\frac{s^{\beta}}{\rho}\int_0^{\infty}e^{-st}t^{-\alpha}\int_0^{\infty}e^{-t^{-\rho}\tau}\tau^{\frac{\alpha+\beta-\rho}{\rho}}f(\tau^{\frac{1}{\rho}})d\tau dt=$$

$$=\frac{s^{\beta}}{\rho}\int_0^{\infty}e^{-st}t^{-\alpha}f_0(t)dt=\frac{s^{\beta}}{\rho}\mathfrak{L}\{t^{-\alpha}f_0(t);s\}.$$

De igual modo por (3.6), se puede escribir:

$$G(s)=R^{(\rho)}_{\alpha,\beta}\{g(t)\}=\frac{s^{\beta}}{\rho}\mathfrak{L}\{t^{-\alpha}g_0(t);s\}.$$

Por tanto:

$$F(s)\cdot G(s)=\frac{s^{2\beta}}{\rho^2}\mathfrak{L}\{t^{-\alpha}f_0(t);s\}\cdot\mathfrak{L}\{t^{-\alpha}g_0(t);s\}=$$

$$=\frac{s^{2\beta}}{\rho^2}\mathfrak{L}\left\{\int_0^t \xi^{-\alpha}f_0(\xi)(t-\xi)^{-\alpha}g_0(t-\xi)d\xi;s\right\}$$

Y, realizando el cambio $\frac{\xi}{t}=u$, sigue:

$$\frac{s^{2\beta}}{\rho^2}\mathfrak{L}\left\{t^{-2\alpha+1}\int_0^1 u^{-\alpha}(1-u)^{-\alpha}f_0(tu)g_0[(1-u)t]du;s\right\}=$$

$$=\frac{s^{2\beta}}{\rho^2}\mathfrak{L}\left\{t^{-2\alpha+1}\int_0^1 u^{-\alpha}(1-u)^{-\alpha}\int_0^{\infty} e^{-(tu)^{-\rho}\tau}\tau^{\frac{\alpha+\beta-\rho}{\rho}}f(\tau^{\frac{1}{\rho}})d\tau\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\int_0^{\infty} e^{-(t(1-u))^{-\rho}y}y^{\frac{\alpha+\beta-\rho}{\rho}}g(y^{\frac{1}{\rho}})dy;s\right\}$$

$$=\frac{s^{2\beta}}{\rho^2}\mathfrak{L}\left\{t^{-2\alpha+1}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\int_0^1 u^{-\alpha}(1-u)^{-\alpha}e^{-t^{-\rho}[u^{-\rho}\tau+(1-u)^{-\rho}y]}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\tau^{\frac{\alpha+\beta-\rho}{\rho}}y^{\frac{\alpha+\beta-\rho}{\rho}}f(\tau^{\frac{1}{\rho}})g(y^{\frac{1}{\rho}})d\tau dy du;s\right\}$$

Con las nuevas sustituciones $u^{-\rho}\tau+(1-u)^{-\rho}y=x$ y $\eta=u^{-\rho}\tau$, resulta

$$\frac{s^{2\beta}}{\rho^2}\mathfrak{L}\left\{t^{-2\alpha+1}\int_0^{\infty}\int_{\eta}^{\infty}\int_0^1 u^{\beta}(1-u)^{\beta}e^{-t^{-\rho}x}(x-\eta)^{\frac{\alpha+\beta-\rho}{\rho}}\eta^{\frac{\alpha+\beta-\rho}{\rho}}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot f(u\eta^{\frac{1}{\rho}})g[(x-\eta)^{\frac{1}{\rho}}(1-u)]d\eta dx du;s\right\}=$$

$$=\frac{s^{2\beta}}{\rho^2}\mathfrak{L}\left\{t^{-2\alpha+1}\int_0^{\infty}e^{-t^{-\rho}x}dx\int_0^x(x-\eta)^{\frac{\alpha+\beta-\rho}{\rho}}\eta^{\frac{\alpha+\beta-\rho}{\rho}}d\eta\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\int_0^1 u^{\beta}(1-u)^{\beta}f(u\eta^{\frac{1}{\rho}})g[(x-\eta)^{\frac{1}{\rho}}(1-u)]du;s\right\}=$$

$$=\frac{s^{2\beta}}{\rho^2}\mathfrak{L}\left\{t^{-2\alpha+1}\int_0^{\infty}e^{-t^{-\rho}x}H(f,g;x)dx;s\right\} \qquad (4.3)$$

donde

$$H(f,g;x)=\int_0^x (x-\eta)^{\frac{\alpha+\beta-\rho}{\rho}}\eta^{\frac{\alpha+\beta-\rho}{\rho}}d\eta\int_0^1 u^{\beta}(1-u)^{\beta}f(u\eta^{\frac{1}{\rho}})g[(1-u)(x-\eta)^{\frac{1}{\rho}}]du.$$

Si finalmente se tiene en cuenta el comportamiento de la transformada de Laplace frente a la derivada, (4.3) adopta la forma:

$$\frac{s^{2\beta}}{\rho^2}\mathfrak{L}\left\{t^{-\alpha}\int_0^\infty e^{-t^{-\rho}x}D_I^{\frac{\alpha-1}{\rho}}H(f,g;x)dx;s\right\}=$$

$$=\frac{s^{2\beta}}{\rho}\mathfrak{L}\left\{t^{-\alpha}\int_0^\infty e^{-t^{-\rho}x}x^{\frac{\alpha+\beta-\rho}{\rho}}\frac{1}{\rho}x^{1-\frac{\alpha+\beta}{\rho}}D_I^{\frac{\alpha-1}{\rho}}H(f,g;x);s\right\}=$$

$$=s^{\beta}\cdot\frac{s^{\beta}}{\rho}\mathfrak{L}\left\{t^{-\alpha}\mathfrak{L}\left\{x^{\frac{\alpha+\beta-\rho}{\rho}}(f*g)(x^{\frac{1}{\rho}});t^{-\rho}\right\};s\right\}=s^{\beta}R_{\alpha,\beta}^{(\rho)}\{(f*g)(t)\}.$$

Definición 4.-

Se introduce ahora la convolución $\circ$ de dos funciones f(t) y g(t) mediante:

$$(f\circ g)(t)=\frac{1}{\rho}t^{-\beta}D_I^{1-\alpha}\int_0^t(t-\eta)^{\beta}\eta^{\beta}d\eta\int_0^1 u^{\frac{\alpha+\beta}{\rho}-1}(1-u)^{\frac{\alpha+\beta}{\rho}-1}\cdot$$

$$\cdot f(u^{\frac{1}{\rho}}\eta)g[(1-u)^{\frac{1}{\rho}}(t-\eta)]du. \qquad (4.4)$$

Proposición 11.-

Si la convolución $\circ$ de dos funciones f(t) y g(t) viene dada por (4.4) y f(t), g(t) verifican las hipótesis de la proposición 7, entonces $R_{\alpha,\beta}^{(\rho)}\{(f*g)(t)\}$ es absolutamente convergente cuando Re $s^{\frac{\rho}{\rho+1}}>\frac{c}{b}$ y se verifica

$$R_{\alpha,\beta}^{(\rho)}\{(f*g)(t)\}=s^{1-\alpha-\beta}R_{\alpha,\beta}^{(\rho)}\{f(t)\}\cdot R_{\alpha,\beta}^{(\rho)}\{g(t)\}. \qquad (4.5)$$

Para su demostración se parte de (3.7) y se sigue un procedimiento semejante al empleado en la prueba de la proposición anterior.

5. CALCULO OPERACIONAL.

En este apartado se obtienen algunas reglas operacionales de la $R^{(\rho)}_{\alpha,\beta}$ transformación integral con respecto al operador diferencial fraccionario $B_{\rho,\alpha,\beta}=t^{-\beta}D^{\rho}_{I}t^{\rho-\alpha+1}Dt^{\alpha+\beta-\rho}$, con ρ, α y β números reales.

Proposición 12.-

Si ρ es un número real tal que $n-1<\rho\le n$, $n\in\mathbb{N}$, y si $f(t)$ es una función $(n+1)$-veces diferenciable en $(0,\infty)$ que verifica:

i)
$$f(t)=\begin{cases} O(t^{-\beta+n-\lambda}) & \text{si } \alpha-1>0 \\ O(t^{-\beta-\alpha+1+n-\lambda}) & \text{si } \alpha-1\le 0\end{cases} \quad \text{cuando } t\to 0^{+} \tag{5.1}$$

para alg[un λ $(0\le\lambda<1)$.

$$\text{ii)} \quad f(t)=O\left(e^{ct^{\frac{\rho}{\rho+1}}}\right), \quad \text{cuando } t\to\infty, \tag{5.2}$$

En estas condiciones se tiene:

$$R^{(\rho)}_{\alpha,\beta}\{B_{\rho,\alpha,\beta}f(t)\}=\rho s^{\rho}R^{(\rho)}_{\alpha,\beta}\{f(t)\tag{5.3}$$

Demostración:

$$R^{(\rho)}_{\alpha,\beta}\{B_{\rho,\alpha,\beta}f(t)\}=\int_0^{\infty}W_{\rho,\alpha-1,\beta}(st)t^{-\beta}D^{\rho}_{I}t^{\rho-\alpha+1}Dt^{\alpha+\beta-\rho}f(t)dt=$$

$$=\int_0^{\infty}t^{-\beta}W_{\rho,\alpha-1,\beta}(st)D^{n}I^{n-\rho}t^{\rho-\alpha+1}Dt^{\alpha+\beta-\rho}f(t)dt. \tag{5.4}$$

Como quiera que $t^{\rho-\alpha+1}Dt^{\alpha+\beta-\rho}f(t)\longrightarrow 0$, cuando $t\to 0$, se puede aplicar (2.11) y el último miembro de (5.4) queda

$$\int_0^{\infty}t^{-\beta}W_{\rho,\alpha-1,\beta}(st)I^{n-\rho}D^{n}t^{\rho-\alpha+1}Dt^{\alpha+\beta-\rho}f(t)dt.$$

Y, por (2.13),

$$\int_0^{\infty}K^{n-\rho}t^{-\beta}W_{\rho,\alpha-1,\beta}(st)D^{n}t^{\rho-\alpha+1}Dt^{\alpha+\beta-\rho}f(t)dt.$$

Integrando ahora (n+1)-veces por partes se llega a:

$$\sum_{l=1}^{n}(-1)^{l-1}A_{l}+(-1)^{n}B+(-1)^{n+1}\int_0^{\infty}t^{\alpha+\beta-\rho}Dt^{\rho-\alpha+1}D^{\rho}_{K}t^{-\beta}W_{\rho,\alpha-1,\beta}(st)f(t)dt \tag{5.5}$$

donde

$$A_i=\left[(D^{n-1}t^{\rho-\alpha+1}Dt^{\alpha+\beta-\rho})(D^{i-1}K^{n-\rho}t^{-\beta}W_{\rho,\alpha-1,\beta}(st)\right]_0^{\infty}=0, \quad i=1,2,3,\ldots,n.$$

$$B=\left[(t^{\alpha+\beta-\rho}f(t))(t^{\rho-\alpha+1}D_K^{\rho}t^{-\beta}W_{\rho,\alpha-1,\beta}(st))\right]_0^{\infty}=0$$

en virtud de (1.6), (1.7), (5.1), (5.2) y (2.6). Por tanto, teniendo en cuenta (2.17), resulta

$$\rho s^{\rho}\int_0^{\infty}W_{\rho,\alpha-1,\beta}(st)f(t)dt=\rho s^{\rho}R_{\alpha,\beta}^{(\rho)}\{f(t).$$

Este resultado se generaliza en la siguiente.

Proposición 13.-

Sea $n-1<\rho\le n$, $n\in\mathbb{N}$, y sea $f(t)$ una función $k(n+1)$-veces diferenciable en el intervalo $(0,\infty)$ tal que:

i)

$$f(t)=\begin{cases} O(t^{kn-\beta-\lambda}) & \text{si } \alpha-1>0 \\ O(t^{kn+1-\alpha-\beta-\lambda}) & \text{si } \alpha-1\le 0 \end{cases}, \quad \text{cuando } t\to 0^{+}$$

para algún λ $(0\le\lambda<1)$.

ii) $f(t)=O\left(e^{ct^{\frac{\rho}{\rho+1}}}\right)$, cuando $t\to\infty$.

Entonces, se verifica:

$$R_{\alpha,\beta}^{(\rho)}\{B_{\rho,\alpha,\beta}^{k}f(t)\}=\rho^{k}s^{k\rho}R_{\alpha,\beta}^{(\rho)}\{f(t)\}.$$

BIBLIOGRAFIA

[1] ERDELYI, A., MAGNUS, W., OBERHETTINGER, TRICOMI, F.. Tables of Integral transforms. Vol. II, McGraw-Hill, New york.(1954).

[2] HAYEK, N.. Estudio de la ecuación diferencial $xy''+(\nu+1)y'+y=0$ y sus aplicaciones. Collectanea Mathematica, Vol. XVIII, fasc. 1 y 2, 57-174. Barcelona. 1966-67.

[3] KRÄTZEL, E.. Integral transformations of Bessel-type. Proceeding of International Conference on Generalized Functions and Operational Calculus. 148-155, Varna, (1975).

[4] KRÄTZEL, E. und MENZER, H.. Verallgemeinerte Hankel-Funktionen. Publ. Math. Debrecen 18, fasc. 1-4, 139-147 (1973).

[5] RODRIGUEZ, J.. Sobre una variante de la K-transformación. Actas V Congreso Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones. (V. C.E.D.Y.A.). 503-515, Tenerife (1982).

[6] RODRIGUEZ, J.. Cálculo operacional de la $L_{\nu}^{(\rho)}$-transformación integral. IX Congreso Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones.(IX C.E.D.Y.A.). 343-348, Valladolid. (1986).

[7] RODRIGUEZ, J., TRUJILLO, J.J., RIVERO, M.. Operational fractional calculus of Krätzel integral transformation. Conference on Differential Equations, EQUADIFF 87, (1987). Preprint.

[8] ROSS, B.. Fractional calculus and its applications. Springer-Verlag. Berlin (1975).

[9] WRIGHT, E.M.. The asymptotic expansions of generalized Bessel function. Proc. London Math. Soc. 2, ser. 38, 257-270. (1934).

Departamento de Análisis Matemático
Facultad de Matemáticas
Universidad de La Laguna
LA LAGUNA (TENERIFE)
ISLAS CANARIAS. ESPAÑA.

Recibido en Agosto de 1989.