SOBRE EL AUTOVALOR PRINCIPAL DEL PROBLEMA
DE NEUMANN CON PESO

R. BURACHIK^(*) y A. MAESTRIPIERI^(**)

INTRODUCCION

Consideramos el problema de Neumann:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}u &= \lambda mu & \text{en } \Omega \\ (1) \quad \frac{\partial u}{\partial n} &= 0 & \text{en } \partial\Omega \end{aligned}$$

donde $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ es un dominio acotado de borde suave, $\partial\Omega$. $\mathcal{L}$ es un operador diferencial uniformemente elíptico en Ω , de la forma

$$(2) \quad \mathcal{L}u = - \sum_{i,j=1}^N a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i} + \sum_{i=1}^N a_i \frac{\partial u}{\partial x_i}$$

con coeficientes a valores reales pertenecientes a $C^\theta(\bar{\Omega})$ ($0 < \theta < 1$). Suponemos que $a_{ij} = a_{ji}$ y $m \in C(\bar{\Omega})$ es una función dada a valores reales y $\lambda \in \mathbf{R}$ (ó $\mathbf{C}$) es el parámetro autovalor.

Observemos que $\lambda = 0$ y $u \equiv 1$ son un autovalor y una autofunción positiva, respectivamente, de (1).

* Trabajo parcialmente subsidiado por la CIC de la Pcia. de Buenos Aires.

** Trabajo parcialmente subsidiado por CONICET.

Hess y Senn [3] obtuvieron, centrándose en la aplicación del teorema de Krein-Rutman al problema (1), los siguientes resultados:

Si m cambia de signo en Ω y cumple que $\int_{\Omega} m\psi \neq 0$, donde ψ es una cierta función asociada al problema, entonces (1) admite un único autovalor $\lambda_1(m) \neq 0$ que tiene una autofunción positiva. Además $\lambda_1(m)$ tiene multiplicidad uno, y si $\lambda_1(m) > 0$ y $\tilde{\lambda} \in \mathbb{C}$ es otro autovalor con $\text{Re } \tilde{\lambda} > 0$ entonces $\text{Re } \tilde{\lambda} \geq \lambda_1(m)$ (similarmen- te si $\lambda_1(m) < 0$). Si $\int_{\Omega} m\psi = 0$ entonces $\lambda = 0$ es el único autovalor de autofunción positiva.

Gossez y Lami Dozo [1] obtuvieron, para el problema (1) pero con condiciones de borde Dirichlet, el siguiente resultado:

Si m es positiva en algún punto de Ω , entonces en la recta vertical $\text{Re } z = \lambda_1$ no hay otros autovalores, donde λ_1 es el autovalor principal positivo, mejorando un resultado anterior de Hess y Kato [2], en el que se establecía la existencia de λ_1 , y en el que se prueba que si $\lambda \in \mathbb{C}$ es otro autovalor, con $\text{Re } \lambda \geq 0$, entonces $\text{Re } \lambda \geq \lambda_1$.

Basándonos en el trabajo de Gossez-Lami Dozo, obtendremos un resultado similar para el caso Neumann.

Para establecer nuestro resultado principal diremos que una función $\omega \in C^3(\bar{\Omega})$ es admisible si:

$$\omega > 0 \text{ en } \bar{\Omega}, \quad \frac{\partial \omega}{\partial n} = 0 \text{ en } \partial \Omega, \quad \mathcal{L}\omega \geq 0 \text{ en } \text{Int}\{m = 0\}$$

donde $\{m = 0\}$ abrevia el conjunto $\{x \in \Omega: m(x) = 0\}$.

Definimos

$$P_-(\omega) = \sup_{\{m < 0\}} \frac{\mathcal{L}\omega}{m\omega} \qquad P_+(\omega) = \inf_{\{m > 0\}} \frac{\mathcal{L}\omega}{m\omega}$$

si $\int_{\Omega} m\psi \neq 0$, llamaremos λ_1 a $\lambda_1(m)$ el autovalor y u_1 a la autofunción positiva con $\|u_1\|_{\infty} = 1$.

TEOREMA 1. *Sea ω una función admisible tal que $P_-(\omega) \leq P_+(\omega)$. Entonces la banda $P_-(\omega) \leq \text{Re } \lambda \leq P_+(\omega)$ no contiene autovalores, a menos que ω sea un múltiplo positivo $u \equiv 1$ o u_1 .*

Como consecuencia del Teorema 1 tenemos:

TEOREMA 2. Supongamos $\int_{\Omega} m\psi \neq 0$ y ω una función admisible no constante, tal que $P_-(\omega) \leq \lambda_1$, donde λ_1 es el único autovalor no nulo con autofunción positiva u_1 de (1). Entonces $P_+(\omega) < \lambda_1$, a menos que ω sea un múltiplo positivo de u_1 .

TEOREMA 3. Sea $\int_{\Omega} m\psi \neq 0$, entonces en la recta vertical $\operatorname{Re}(z) = \lambda_1$ y en la recta $\operatorname{Re} z = 0$, no hay otros autovalores de (1).

TEOREMA 4. Si $\int_{\Omega} m\psi < 0$, entonces $\lambda_1 = \sup\{P_+(\omega)/\omega \text{ admisible y } P_-(\omega) < \lambda_1\}$.

Los teoremas 1,2,3 y 4 serán probados en la Sección 1.

1. DEMOSTRACION DE LOS TEOREMAS 1,2,3 Y 4.

Demostración del Teorema 1:

Sea $\lambda \in \mathbb{C}$ un autovalor de (1) y sea u una autofunción a valores complejos de autovalor λ . Por teoremas de regularidad resulta $u \in C^{2+\theta}(\bar{\Omega})$.

Sea $v = u/\omega$, resulta que $v \in C^2(\bar{\Omega})$, y operando obtenemos

$$(2) \quad \mathcal{L}_1(v) + [(\mathcal{L} - \lambda m)\omega](v) = 0, \quad \text{donde}$$

$$\mathcal{L}_1 = -\omega \sum_{i,j=1}^N a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \omega \sum_{i=1}^N a_i \frac{\partial}{\partial x_i} - 2 \sum_{i,j=1}^N a_{ij} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i}$$

es uniformemente elíptico por ser $\omega > 0$ en $\bar{\Omega}$ y

$$(3) \quad \mathcal{L}_1(|v|^2) = \mathcal{L}_1(v\bar{v}) = v\mathcal{L}_1(\bar{v}) + \bar{v}\mathcal{L}_1(v) - 2\omega \sum_{i,j=1}^N a_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_j}.$$

De (2) y (3) resulta:

$$(4) \quad \mathcal{L}_1(|v|^2) = -2[(\mathcal{L} - \operatorname{Re} \lambda m)(\omega)]|v|^2 - 2\omega \sum_{i,j=1}^N a_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_j} \quad \text{en } \Omega.$$

Supongamos que $P_- = P_-(\omega) \leq \operatorname{Re} \lambda \leq P_+(\omega) = P_+$.

De la definición de P_- obtenemos

$$(\mathcal{L} - \operatorname{Re} \lambda m)(\omega) \geq 0 \quad \text{en } \bar{\Omega}.$$

Entonces, deducimos de (4)

$$(5) \quad \mathcal{L}_1(|v|^2) \leq -2\omega \sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_j} \leq -2\omega\mu_0 |\nabla v|^2 \leq 0 \quad \text{en } \Omega,$$

donde $\mu_0 > 0$ es la constante de elipticidad de $\mathcal{L}$ en Ω .

Aplicando el principio de máximo, resulta que $|v|^2$ alcanza su máximo M , en algún punto $x_0 \in \partial\Omega$, y si $|v|^2$ no es constante,

$$(6) \quad \frac{\partial |v|^2}{\partial n}(x_0) > 0 \quad \text{aplicando a } \mathcal{L}_1 \text{ el principio de máximo [4].}$$

Supongamos $|v|^2$ constante en Ω , entonces por (5), tenemos que $v \equiv \alpha$, $\alpha \in \mathbb{C}$, en $\bar{\Omega}$, con $\alpha \neq 0$, pues u es una autofunción no nula. Resulta $\omega = \alpha^{-1}u$ una autofunción de (1) correspondiente a λ , como ω es real resulta $\lambda \in \mathbb{R}$. Si $\lambda = 0$, entonces ω es constante, aplicando de nuevo el principio de máximo.

Sea $\lambda > 0$. Supongamos primero que $\int_{\Omega} m\psi < 0$. Resulta, usando el resultado de Hess y Senn [3], $\omega = \sigma u_1$ con $\sigma > 0$. Si $\int_{\Omega} m\psi > 0$, entonces por el mismo resultado, existe un único autovalor $\lambda_1 < 0$ de autofunción positiva. Absurdo, al ser $\lambda > 0$. Finalmente si $\int_{\Omega} m\psi = 0$ entonces 0 es el único autovalor que tiene una autofunción positiva, contradiciendo $\lambda > 0$.

Análogamente, si $\lambda < 0$, resulta ω un múltiplo positivo de u_1 .

Si $|v|^2$ no es constante

$$\begin{aligned} \frac{\partial |v|^2}{\partial n}(x_0) &= \frac{\partial (v\bar{v})}{\partial n}(x_0) = \left(\frac{\partial v}{\partial n} \bar{v} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial n} v \right)(x_0) = 2\operatorname{Re} \left(\bar{v} \frac{\partial v}{\partial n} \right)(x_0) = \\ &= 2\operatorname{Re} \left(\frac{\bar{v}}{\omega} \left(\frac{\partial u}{\partial n} \omega - \frac{\partial \omega}{\partial n} u \right) \right)(x_0) = 0 \end{aligned}$$

en contradicción con (6).

Demostración del Teorema 2:

Si $P_+ < P_-$, el resultado sigue. Supongamos $P_+ \geq P_-$, entonces si $\lambda_1 > P_+$ no hay nada que demostrar, y si $\lambda_1 \leq P_+$, aplicando el Teorema 1, resulta $\omega = \sigma u_1$, con $\sigma > 0$ y $P_- = P_+$.

Demostración del Teorema 3:

Análoga a la del Teorema 1.

Demostración del Teorema 4:

Dada $m \in C(\bar{\Omega})$, existe una sucesión de funciones $\{m_j\}_{j \in \mathbb{N}}$, $m_j \in C^0(\bar{\Omega})$, tales que m_j decrece uniformemente a m .

Podemos suponer $\int_{\Omega} m_j \psi < 0$. Sea $\lambda_1(m_1) > 0$ el autovalor principal correspondiente al problema (1) con peso igual a m_1 . Como $m_1 > m$, entonces $\lambda_1(m_1) < \lambda_1(m)$ ([3], Prop.4).

Sea P_0 tal que $0 < P_0 < \lambda_1(m_1) < \lambda_1(m)$, consideremos el problema:

$$\begin{cases} (\mathcal{L} - P_0 m_1) \omega_1 = 1 & \text{en } \Omega, \\ \frac{\partial \omega_1}{\partial n} = 0 & \text{en } \partial \Omega. \end{cases}$$

La teoría de Schauder garantiza la existencia de una única solución $\omega_1 \in C^{3+\theta}(\bar{\Omega})$, que resulta estrictamente positiva en $\bar{\Omega}$ ([3], Lema 8).

Como $\mathcal{L} \omega_1 \geq 0$ en $\text{int}\{m_1 = 0\}$, entonces ω_1 es admisible.

Siendo $P_-(\omega_1) \leq P_0 < \lambda_1(m_1)$, por el Teorema 2, $P_+(\omega_1) < \lambda_1(m_1)$; tenemos entonces que:

$$P_0 < P_0 + \inf_{\{m_1 > 0\}} \frac{1}{m_1 \omega_1} = P_+(\omega_1) = P_1 < \lambda_1(m_1).$$

Definimos ω_k y P_k inductivamente:

$$\begin{cases} (\mathcal{L} - P_{k-1} m_k) \omega_k = 1 & \text{en } \Omega, \\ \frac{\partial \omega_k}{\partial n} = 0 & \text{en } \partial \Omega, \end{cases}$$

$$y \quad P_k = P_+(\omega_k) = P_{k-1} + \inf_{\{m_k > 0\}} \frac{1}{m_k \omega_k}.$$

Claramente, $P_{k-1} < P_k < \lambda_1(m_k) < \lambda_1(m)$. La sucesión P_k converge entonces a algún valor $P \leq \lambda_1(m)$. Esto implica que $\inf_{\{m_k > 0\}} \frac{1}{m_k \omega_k}$ tiende a cero con k . De donde resulta que $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\omega_k\| = \infty$.

Sea $\tilde{\omega}_k = \frac{\omega_k}{\|\omega_k\|}$. Tenemos que

$$\begin{cases} \mathcal{L}\tilde{\omega}_k = P_{k-1} m_k \tilde{\omega}_k + \frac{1}{\|\omega_k\|} & \text{en } \Omega, \\ \frac{\partial \tilde{\omega}_k}{\partial n} = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

$\{\tilde{\omega}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ es acotado en $C^{1+\theta}(\bar{\Omega})$ (por teoría elíptica standard).

Tomando una subsucesión si es necesario, $\tilde{\omega}_k$ converge a ω en $C(\bar{\Omega})$.

Consideremos ahora el operador $(L+1)^{-1}$, definido en [3].

$(L+1)^{-1}: C(\bar{\Omega}) \rightarrow C(\bar{\Omega})$ es continuo con la norma uniforme,

$$(L+1) \text{ verifica } (L+1)\tilde{\omega}_k = (P_{k-1} m_k + 1)\tilde{\omega}_k + \frac{1}{\|\omega_k\|}.$$

Resulta entonces $L\omega = Pm\omega$, con $\omega > 0$ en $\bar{\Omega}$ y $P > 0$. Se tiene que $P = \lambda_1(m)$ y $\omega = u_1$ ([3], Teorema 2).

Daremos, a continuación, un ejemplo del problema de Neumann con peso.

Consideremos el problema

$$(*) \quad \begin{cases} -u'' = \lambda m u & \text{en } (0, \sqrt{\frac{\pi}{4}}) = \Omega \\ u'(0) = u'(\sqrt{\frac{\pi}{4}}) = 0, \end{cases}$$

donde $m(x) = 2x^2 - \cotg(x^2 + \frac{\pi}{4})$.

Resulta $m \in C(\bar{\Omega})$, m cambia de signo en Ω y $\int_{\Omega} m < 0$,

$u(x) = \text{sen}(x^2 + \frac{\pi}{4})$ es solución de (*) de autovalor $\lambda = 2$.

REFERENCIAS

- [1] GOSSEZ, J.-P., & E.LAMI DOZO, *On the Principal Eigenvalue of a Second Order Linear Elliptic Problem*, Arch. for Rat. Mech. and Anal. 89, 169-175 (1985).
- [2] HESS, P. & T.KATO, *On some linear and nonlinear eigenvalue problems with an indefinite weight function*, Comm. Part. Diff. Eq. 10, 999-1030 (1980).
- [3] HESS, P. & S.SENN, *On Positive Solutions of a linear Elliptic Eigenvalue Problem with Neumann Boundary Conditions*, Math. Annalen. 258, 459-470 (1982).
- [4] PROTTER, M.H., & H.F.WEINBERG, *Maximum Principles in differential equations*, Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall 1967.

Instituto Argentino de Matemática, CONICET
Viamonte 1636, (1055) Buenos Aires
Departamento de Matemática, FCEyN
Universidad de Buenos Aires

Recibido en octubre de 1990.