

COMENTARIO BIBLIOGRAFICO

APPROXIMATION OF HILBERT SPACE OPERATORS, Vol.I, 2nd.Edition, by Domingo A.Herrero, Longman, Essex, 1990.

Este libro es un compendio que abarca desde los primeros hasta los más recientes resultados en teoría de aproximación de operadores en espacios de Hilbert, del cual el autor es uno de los principales exponentes.

El problema típico de aproximación de operadores puede formularse de la siguiente manera: si R es una clase de operadores cerrada por similaridad (esto es, si $T \in R$ y U es inversible, entonces $UTU^{-1} \in R$), calcular en los términos más sencillos posibles, es decir, en términos de propiedades de partes del espectro y del índice de Fredholm, la clausura R^- ; o bien, la distancia de un operador dado a dicha clausura.

Hay abundantes ejemplos de clases de este tipo, lo que justifica plenamente su estudio: operadores algebraicos, triangulares, cuasitriangulares, ideales biláteros de operadores, operadores con espectro dado, etc.

La primera parte (capítulos 1 a 4) desarrolla las técnicas a utilizar en el resto del libro, incluido el motivante capítulo 2, que está dedicado a problemas de aproximación en dimensión finita. Las principales herramientas expuestas son el cálculo funcional de Riesz-Dunford, operadores de semi-Fredholm, modelos de espacios de Hilbert, el operador de Rosenblum, representación triangular de Apostol, perturbación por operadores compactos y dos resultados fundamentales de C^* -álgebras, el teorema de Voiculescu y la teoría de Brown-Douglas-Fillmore.

Si bien el tratamiento de estos temas no es extensivo - la vastedad de los mismos lo impide en un volumen de estas características - su lectura es recomendable tanto para el lector que

no está familiarizado con ellos, por cuanto el tratamiento es ordenado y profuso en referencias útiles, como para el lector iniciado, ya que su formulación es útil a lo que sigue en el libro.

Que es propiamente el estudio de problemas de aproximación en los principales ejemplos, de los cuales cito dos: operadores algebraicos y operadores cuasitriangulares.

El estudio de la clausura de $\text{alg}(H)$ (operadores algebraicos son los que son cero de algún polinomio con coeficientes complejos) se reduce al examen del caso especial de los nilpotentes. El resultado, cuyo aspecto es característico de los resultados de esta teoría, es el siguiente que transcribo por su sencillez:

La clausura $N(H)^-$ del conjunto de operadores nilpotentes coincide con el conjunto de todos los $A \in L(H)$ tales que: i) $\sigma(A)$ es conexo y contiene al origen; ii) $\sigma_e(A)$ es conexo y contiene al origen; iii) $\text{ind}(\lambda - A) = 0$ para todo $\lambda \in \rho_{s-F}(A)$, donde σ denota al espectro y σ_e al espectro esencial, ind es el índice de Fredholm y ρ_{s-F} es la resolvente de semi-Fredholm.

El lector advertirá que las tres condiciones son claramente necesarias. Es en la prueba de la suficiencia donde interviene la teoría. Sobre todo, el autor echa mano de un método exhaustivo, es decir, que consiste en descartar los casos "patológicos" uno a uno, y reducir la demostración a casos más sencillos. Método que si bien trabajoso, es sumamente instructivo e interesante, sobre todo para quien desee familiarizarse con técnicas de investigación en teoría de operadores.

También se incluyen en el estudio de este ejemplo estimaciones de cotas para la distancia de un operador arbitrario a $\text{alg}(H)$.

Para el caso del conjunto QT de operadores cuasitriangulares, que es cerrado, se exhiben estimaciones de la distancia de un operador a dicho conjunto, expresadas en términos de distancias entre partes del espectro.

La analogía entre las respuestas obtenidas en los distintos ejemplos lleva al autor a formular y demostrar el metateorema

de la teoría (apéndice 1). El teorema dice que si R es un conjunto del tipo de los previamente citados, con "estructura suficiente" (hipótesis técnica no muy complicada), entonces la pertenencia de un operador A a R^- depende sólo de propiedades espectrales de A .

Esta reseña está muy lejos de agotar los temas tratados en el libro; tampoco cita a los matemáticos involucrados en los antecedentes de los resultados ni en los resultados mismos, salvo, claro está, al autor, ya que ambas cosas excederían la ocasión de este comentario. Quisiera agregar que si bien el tema de aproximación y similaridad se halla satisfactoriamente cubierto por este libro (y su continuación), restan aún en él gran cantidad de problemas abiertos interesantes que el autor consigna al final de cada capítulo. Por lo cual este tratado se vuelve de lectura imprescindible para todo aquél que desee dedicarse al estudio de estos temas. Pero también es de lectura muy recomendable para los que quieran iniciarse o profundizar en cualquier área de teoría de operadores, pues, como está dicho, el tratamiento de los temas provee técnicas útiles y usuales en dicha teoría.

Esteban Andruchow