Revista de la
Unión Matemática Argentina
Volumen 38, 1992.

SOLUCION ANALITICA NUMERICA DE SISTEMAS ACOPLADOS IMPLICITOS DE ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES

LUCAS JODAR y MATILDE LEGUA

Abstract. In this paper analytic numerical solution for systems of coupled second order partial differential equations are considered. Starting from an exact infinite series solution we construct finite approximate solutions whose error in a bounded finite domain is upper bounded in terms of the data.

1. INTRODUCCION. Muchos sistemas físicos son modelados mediante un sistema acoplado implicito de ecuaciones del tipo

$$AU_{xx}(x,t)-U_t(x,t)=0, \quad 0<x<p, \ t>0 \tag{1.1}$$

$$U(0,t)=T_1, \ U(p,t)=T_2, \ t>0, \tag{1.2}$$

$$U(x,0)=f(x), \qquad 0\leq x\leq p, \tag{1.3}$$

donde A es una matriz compleja en $\mathbb{C}_{m\times m}$, y la incógnita U y los T_1, T_2 y f toman valores en $\mathbb{C}_m$, [3],[9] . Sistemas del tipo (1.1)-(1.3) para el caso en que la matriz A es singular aparecen en las ecuaciones de conducción de nervios de Hodgkin-Huxley,[13,12]

El objetivo de este artículo es construir soluciones analíticas numericas y cotas de error de las mismas para sistemas del tipo (1.1)-(1.3), donde A es una matriz singular cuyos valores propios $\sigma(A)=\{\lambda_i;\ 1\leq i\leq s\}\cup\{\beta_j;\ 0\leq j\leq r\}$ satisfacen las propiedades

$$0<\mathrm{Re}(\lambda_1)\leq\mathrm{Re}(\lambda_2)\leq\ldots\leq\mathrm{Re}(\lambda_s);\ \mathrm{Re}(\beta_j)=0 \ \text{y} \ m(\beta_j)=m_j=1, \ 0\leq j\leq r \tag{1.4}$$

donde $m(\beta_j)=m_j$ denota el índice del valor propio β_j de A, que recordamos que es el menor entero positivo m_j tal que el núcleo de $(\beta_jI-A)^{m_j}$ coincide con el de $(\beta_jI-A)^{m_j+1}$, véase [4,p.556] .
En la sección 2 obtenemos una solución en serie del problema mediante un método de separación de variables matricial. Las solu-

ciones analíticas numéricas se construyen en la sección 3. Representaremos por I la matriz identidad en $\mathbb{C}_{m\times m}$ y para una matriz A en $\mathbb{C}_{m\times m}$ denotaremos por A^H su transpuesta conjugada y por $\|A\|$, el máximo del conjunto $\{|z|^{\frac{1}{2}};$ z valor propio de $A^H A\}$, véase [11, p.21].

Problemas del tipo (1.1)-(1.3) para el caso donde $T_1=T_2=0$ y A es una matriz invertible cuyos valores propios tienen parte real estríctamente positiva, han sido estudiados recientemente en [7].

2. SOLUCION EN SERIE DEL PROBLEMA. Consideremos funciones vectoriales U(x,t) de la forma

$$U(x,t)=T(t)X(x) \tag{2.1}$$

donde $T(t)\varepsilon\mathbb{C}_{m\times m}$, $X(x)\varepsilon\mathbb{C}_m$, λ es un número real positivo y satisfacen

$$X''(x)+\lambda^2 X(x)=0, \quad X(0)=X(p)=0, \tag{2.2}$$

y

$$T'(t)+\lambda^2 AT(t)=0 \tag{2.3}$$

entonces U(x,t) definida por (2.1) satisface

$$AU_{xx}(x,t)-U_t(x,t)=AT(t)X''(x)-T'(t)X(x)=-\lambda^2 AT(t)X(x)+\lambda^2 AT(t)X(x)=0$$

De acuerdo con la definición introducida en [6], el par de funciones $\{\cos(\lambda Ix),\operatorname{sen}(\lambda Ix)\}$ define un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación $X''(x)+\lambda^2 X(x)=0$, y por tanto, su solución general toma la forma $X(x)=\cos(\lambda Ix)d_1+\operatorname{sen}(\lambda Ix)d_2)$, donde d_1, d_2 son vectores arbitrarios en $\mathbb{C}_m$. Imponiendo a X(x) las condiciones de contorno de (2.2) se sigue que $0=X(0)=d_1$, $0=X(p)=\operatorname{sen}(\lambda Ip)d_2$. De aquí, existen soluciones no triviales de (2.2) si $d_2\neq 0$, lo que quiere decir que la matriz $\operatorname{sen}(\lambda Ip)$ debe ser singular. Por el teorema de la aplicación espectral [4, p.569], λ debe verificar $\operatorname{sen}(\lambda p)=0$, es decir,

$$\lambda=n\pi/p, \quad n\geq 1 \tag{2.4}$$

En consecuencia, para cualquier vector $d\varepsilon\mathbb{C}_m$, la sucesión de funciones

$$X_n(x)=\operatorname{sen}(n\pi xI/p)\,d, \quad n\geq 1 \tag{2.5}$$

satisface (2.2). Tomando los valores de λ dados por (2.4) y resolviendo la correspondiente ecuación (2.3), obtenemos la sucesión de soluciones

$$T_n(t)=\exp(-(n\pi/p)^2 At) \tag{2.6}$$

de (2.3). Por construcción hemos obtenido una sucesión de soluciones de (1.1)-(1.2), dadas por

$$U_n(x,t)=\exp(-(n\pi/p)^2At)\,\mathrm{sen}(n\pi xI/p)d_n, \quad d_n\in\mathbb{C}_m,\ n\geq 1 \tag{2.7}$$

Ahora consideremos el problema de contorno

$$AY''(x)=0,\ Y(0)=T_1,\quad Y(p)=T_2,\quad Y(x)\in\mathbb{C}_m, \tag{2.8}$$

siendo $Y(x)=(T_2-T_1)x/p+T_1$, una solución del mismo. Si consideramos el cambio

$$U(x,t)=Y(x)+W(x,t), \tag{2.9}$$

con el fin de resolver el problema (1.1)-(1.3), es suficiente tomar valores de $d_n\in\mathbb{C}_m$ tales que

$$W(x,t)=\sum_{n\geq 1}\exp(-(n\pi/p)^2At)\,\mathrm{sen}(n\pi xI/p)d_n, \tag{2.10}$$

satisface

$$W(x,0)=f(x)-Y(x)=f(x)+(T_1-T_2)x/p-T_1 \tag{2.11}$$

Nótese que tomando t=0 en (2.10), y suponiendo la convergencia de la serie, los vectores d_n tienen que verificar que

$$f(x)+(T_1-T_2)x/p-T_1=\sum_{n\geq 1}\mathrm{sen}(n\pi xI/p)d_n \tag{2.12}$$

Ahora, si suponemos que f(x) es una función dos veces continuamente diferenciable, como $\mathrm{sen}(n\pi xI/p)$ es una matriz diagonal, del corolario 1 de [2,p.95], la serie de Fourier de senos de $g(x)=f(x)-T_1+(T_1-T_2)x/p$, con

$$d_n=(2/p)\int_0^p \mathrm{sen}(n\pi xI/p)g(x)dx, \quad n\geq 1 \tag{2.13}$$

converge a g(x) para cada $x\in[0,p]$. Por lo tanto hemos obtenido una solución formal U(x,t) del problema (1.1)-(1.3). Ahora demostraremos que W(x,t) definida por (2.10),(2.13), es de hecho una solución de (1.1)-(1.2) que satisface la condición inicial (2.11), suponiendo que la matriz A satisface la condición (1.4).

Sea $t_0>0$, $\delta>0$ con $0<\delta<t_0$, y sea el rectángulo $B(t_0,\delta)=[0,p]\times[t_0-\delta,t_0+\delta]$. Demostraremos que la serie vectorial (2.10),(2.13), es uniformemente convergente en $B(t_0,\delta)$ y que admite derivación parcial, calculables mediante derivación término a término, dos veces con respecto a x, y una vez con respecto a t, para $(x,t)\in B(t_0,\delta)$.

Fijemos t>0 y consideremos la función de variable compleja z, $h_n(z)=\exp(-(n\pi/p)^2tz)$. Por el teorema 8 de [4,p.569], tenemos que

$$h_n(A)=\exp(-(n\pi/p)^2 tA)=$$

$$=\sum_{i=1}^{s}\sum_{k=0}^{m_i-1}(A-\lambda_i I)^k E(\lambda_i)h_{ik}(n)/k! + \sum_{j=0}^{r}\exp(-(n\pi/p)^2 t\beta_j)E(\beta_j) \quad (2.14)$$

donde $E(\lambda_i)$,$E(\beta_j)$ representan las proyecciones espectrales tales que $\operatorname{Im} E(\lambda_i)=\operatorname{Ker}(A-\lambda_i I)^{m_i}$ e $\operatorname{Im} E(\beta_j)=\operatorname{Ker}(A-\beta_j I)$ respectivamente, [4, p.559], [8,p.319], y

$$h_{ik}(n)=(n\pi/p)^{2k}(-1)^k\exp(-(n\pi/p)^2 t\lambda_i)t^k \quad (2.15)$$

Como $g(x)$ es dos veces contínuamente diferenciable, los coeficientes d_n satisfacen

$$\|d_n\|\leq (ap/\pi^2)n^{-2}, \quad a=\sup\{\|g''(x)\| ; 0\leq x\leq p\}, \quad n\geq 1 \quad (2.16)$$

De aquí y de (2.10),(2.14), la serie que se obtiene de (2.10),(2.13) converge si cada una de las siguientes series converge

$$V_{ik}(x,t)=\sum_{n\geq 1}(A-\lambda_i I)^k E(\beta_i)h_{ik}(n)\operatorname{sen}(n\pi x/p)d_n/k!, \quad (2.17)$$

$$V_j(x,t)=\sum_{n\geq 1}\exp(-(n\pi/p)^2 t\beta_j)E(\beta_j)\operatorname{sen}(n\pi x/p)d_n, \quad (2.19)$$

para $1\leq i\leq s$, $0\leq j\leq r$, $0\leq k\leq m_i-1$.

Sean ahora constantes C_j,C_{ik} tales que

$$C_j\geq\|E(\beta_j)\| \;;\quad C_{ik}\geq\|(A-\lambda_i I)^k E(\lambda_i)\|/k! \;, \quad (2.20)$$

entonces de (2.16),(2.19) y (1.4), se sigue que para $(x,t)\varepsilon B(t_o,\delta)$

$$\sum_{n\geq 1}\|\exp(-(n\pi/p)^2 t\beta_j)E(\beta_j)\operatorname{sen}(n\pi x/p)d_n\|\leq C_j(ap/\pi^2)\sum_{n\geq 1}n^{-2} \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned}&\|(A-\lambda_i I)^k E(\beta_i)\operatorname{sen}(n\pi x/p)h_{ik}(n)d_n/k!\,\|\leq\\ &\leq C_{ik}(pa/\pi^2)(n\pi/p)^{2k}(t_o+\delta)^k\exp(-(n\pi/p)^2(t_o-\delta)\operatorname{Re}(\lambda_1))n^{-2}\end{aligned} \quad (2.22)$$

De (2.21),(2.22) se concluye que la serie (2.10),(2.13) converge absoluta y uniformemente en $B(t_o,\delta)$, y que por tanto define una función contínua para cualquier (x,t) con $0\leq x\leq p$, $t>0$.

De los comentarios previos y del teorema 9.14 de [1] se sigue que las series cuyo término general se obtiene derivando término a término, una vez respecto a t, y dos veces respecto a x, convergen absoluta y uniformemente en $B(t_o,\delta)$, y por tan o

$$W_t(x,t)=\sum_{n\geq 1}\frac{\partial}{\partial t}(\exp(-(n\pi/p)^2At)\operatorname{sen}(n\pi x/p)d_n)=$$

$$=\sum_{n\geq 1}(-A)(n\pi/p)^2\exp(-(n\pi/p)^2At)\operatorname{sen}(n\pi x/p)d_n$$

$$W_{xx}(x,t)=\sum_{n\geq 1}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\exp(-(n\pi/p)^2At)\operatorname{sen}(n\pi x/p)d_n)=$$

$$=-\sum_{n\geq 1}(n\pi/p)^2\exp(-(n\pi/p)^2At)\operatorname{sen}(n\pi x/p)d_n$$

Como el razonamiento local es aplicable a cualquier $t_o>0$, el siguiente resultado queda demostrado:

TEOREMA 1. Sea $f(x)$ una función dos veces contínuamente diferenciable $f:[0,p] \dashrightarrow \mathbb{C}_m$, y sea A una matriz en $\mathbb{C}_{m\times m}$ que satisface la propiedad (1.4). Entonces la función

$$U(x,t)=(T_2-T_1)x/p+T_1+W(x,t), \tag{2.23}$$

donde $W(x,t)$ viene dada por (2.10),(2.13), es una solución del problema (1.1)-(1.3).

3. SOLUCIONES APROXIMADAS Y COTAS DE ERROR.

El teorema 1 asegura la existencia de solución $U(x,t)$ del problema (1.1)-(1.3), dada por (2.23). Desde un punto de vista computacional dicha solución presenta dos inconvenientes. En primer lugar U viene definida por una serie infinita, y en segundo, el término general de ella involucra la función matricial exponencial y su cálculo exacto requiere el conocimiento exacto de los valores propios de A,[10]. El objeto de esta sección es evitar esos inconvenientes partiendo de la solución en serie U dada por el teorema 1.

Consideremos la notación de la sección anterior y sean C,D, constantes positivas que satisfacen

$$C\geq\max\{C_{ik},\ 1\leq i\leq s,\ 0\leq k\leq m_i-1\};\ D\geq\max\{C_j;\ 0\leq j\leq r\}\ , \tag{3.1}$$

donde C_{ik},C_j, estan definidas por (2.20). De aquí y de (2.14), si $t>0$ se verifica que

$$\|\exp(-(n\pi/p)^2At)\|\leq mCa_n t^m\exp(-tb_n)+(r+1)D=g_n(t)+(r+1)D, \tag{3.2}$$

donde

$$a_n=(n\pi/p)^{2m},\quad b_n=(n\pi/p)^2\gamma_1,\quad 0<\gamma_1\leq\operatorname{Re}(\lambda_1),\quad g_n(t)=mCa_n t^m\exp(-tb_n) \tag{3.3}$$

Nótese que $g_n'(t)=mCa_n t^{m-1}\exp(-tb_n)(m-tb_n)$, y que la sucesión b_n crece con n. Si $t\varepsilon[t_o,t_1]$ con t_o 0, se sigue que $g_n'(t)<0$ para t en $[t_o,t_1]$ y $m<tb_n$. Por tanto, si elegimos n_o tal que

$$b_{n_o} > m/t_o \tag{3.4}$$

entonces g_n es una función decreciente de t en el intervalo $[t_o,t_1]$ para $n\geq n_o$. De aquí y de (3.2) resulta que

$$\|\exp(-(n\pi/p)^2 At)\| \leq g_n(t_o)+(r+1)D, \quad n\geq n_o, \quad t_o\leq t\leq t_1 \tag{3.5}$$

Ahora consideremos la sucesión de las n-ésimas sumas parciales de la serie W(x,t) definida por (2.10),(2.13). esto es,

$$W_n(x,t)=\sum_{k=1}^{n} \exp(-(k\pi/p)^2 At)\operatorname{sen}(n\pi x/p)d_k \tag{3.6}$$

Teniendo en cuenta (2.16),(2.10),(2.13),(3.5) y (3.6), si $t_o\leq t\leq t_1$ se verifica que

$$\|W(x,t)-W_n(x,t)\|\leq \sum_{k>n} \|\exp(-(k\pi/p)^2 At)\| \, \|\operatorname{sen}(n\pi x/p)d_k\|\leq$$
$$\leq (pa/\pi^2) \sum_{k>n} g_k(t_o)k^{-2}+(pa/\pi^2)(r+1)D \sum_{k>n} k^{-2}, \quad n\geq n_o \tag{3.7}$$

Sea S definido por

$$S=(\pi/p)^2 t_o, \tag{3.8}$$

entonces de (3.3),(3.7) y (3.8), se sigue que

$$\|W(x,t)-W_n(x,t)\|\leq \tag{3.9}$$
$$\leq(pa/\pi^2)D(r+1) \sum_{k>n} k^{-2} +mC(pa/\pi^2)(\pi/p)^{2m}(t_o)^m \sum_{k>n} k^{2(m-1)}\exp(-Sk^2)$$

$$\sum_{k>n} k^{-2}=\pi^2/6 - \sum_{k=1}^{n} k^{-2} \tag{3.10}$$

Sean R_1 y R_2 las constantes positivas definidas por

$$R_1=(pa/\pi^2)D(r+1), \qquad R_2=mC(pa/\pi^2)(\pi/p)^{2m}(t_o)^m \tag{3.11}$$

Si $t_o\leq t\leq t_1$ y $n\geq n_o$, entonces de (3.9)-(3.11) se sigue que

$$\|W(x,t)-W_n(x,t)\|\leq R_1(\pi^2/6 - \sum_{k=1}^{n} k^{-2})+ R_2 \sum_{k>n} k^{2(m-1)}\exp(-Sk^2) \tag{3.12}$$

Consideremos la sucesión de números reales

$$Z(k)=(2(m-1)\log k)/k -kS, \quad k\geq 1 \tag{3.13}$$

y nótese que $Z(k)<0$ si y solamente si, $(\log k)/k^2 < S/(2(m-1))$. Es evidente que $Z(k)$ decrece para $k\geq 3$ y que $Z(k)$ tiende a $-\infty$ cuando k tiende a ∞. De aquí la siguiente constante está bien definida

$$q_o=\sup\{Z(k);\ k\geq 3 \text{ y } Z(k)<0\} \qquad (3.14)$$

De aquí y de (3.13), se sigue que

$$k^{2(m-1)}\exp(-k^2S)\leq \exp(kq_o),\quad k\geq 3, \qquad (3.15)$$

y por tanto, para $n\geq 2$, se tiene que

$$\sum_{k>n} k^{2(m-1)}\exp(-k^2S)\leq \sum_{k>n}\exp(kq_o)=(1-\exp(q_o))^{-1}\exp(q_o(n+1)) \qquad (3.16)$$

De aquí, si n_o está definido por (3.4), $n\geq\max(2,n_o)$, y si $0\leq x\leq p$, $t_o\leq t\leq t_1$, de (3.12) y (3.16) resulta que

$$\|W(x,t)-W_n(x,t)\|\leq R_1(\pi^2/6-\sum_{k=1}^{n}k^{-2})+R_2(1-\exp(q_o))^{-1}\exp(q_o(n+1)) \qquad (3.17)$$

Ahora estamos interesados en determinar los valores de n tales que $\|W(x,t)-W_n(x,t)\|$ sea más pequeño que un número prefijado $\varepsilon>0$. Si llamamos R_3 a la constante definida por

$$R_3=(1-\exp(q_o))^{-1}R_2 \qquad (3.18)$$

entonces de (3.17) resulta que n debe satisfacer la desigualdad

$$R_1(\pi^2/6-\sum_{k=1}^{n}k^{-2})+R_3\exp(q_o(n+1))<\varepsilon \qquad (3.19)$$

La desigualdad (3.19) se satisface si elegimos n tal que

$$\exp(q_o(n+1))<(2R_3)^{-1} \qquad (3.20)$$

y

$$R_1(\pi^2/6-\sum_{k=1}^{n}k^{-2})<\varepsilon/2 \qquad (3.21)$$

Por tanto, podemos tomar $n\geq n_o$ tal que

$$\sum_{k=1}^{n}k^{-2}>\pi^2/6-(2R_1)^{-1}\varepsilon \quad \text{y} \quad n>(1/q_o)\log((2R_3)^{-1}\varepsilon)-1 \qquad (3.22)$$

El siguiente resultado queda demostrado:

TEOREMA 2. Consideremos la hipotésis y notación del teorema 1, sea $\varepsilon>0$ prefijado y sea $0<t_o\leq t\leq t_1$. Sea q_o definido por (3.14), y sean R_1, R_2, R_3 definidos por (3.11),(3.18). Si n satisface (3.22) y n_o

está definido por (3.4), entonces si $W_n(x,t)$ está definida por (3.6), la función $V_n(x,t)$ definida por

$$V_n(x,t)=(T_2-T_1)x/p+T_1+W_n(x,t) \tag{3.23}$$

es una solución aproximada del problema (1.1)-(1.3), cuyo error con respecto a la solución exacta U(x,t) obtenida en el teorema 1 satisface

$$\|U(x,t)-W_n(x,t)\|<\varepsilon \text{, uniformemente para } 0\leq x\leq p;\ t_o\leq t\leq t_1$$

El teorema 2 evita los inconvenientes computacionales del desarrollo en serie de la solución U(x,t) proporcionada en el teorema 1, sin embargo, la suma finita $V_n(x,t)$ dada por el teorema 2, involucra la matriz exponencial $\exp(-(k\pi/p)^2At)$. Ahora estamos interesados en aproximar la exponencial matricial por sumas parciales apropiadas de su desarrollo de Taylor. Recordamos que si B es una matriz en $\mathbb{C}_{mxm}$ y $\mu_2(B)$ representa el mayor valor propio positivo de la matriz hermítica $(B+B^H)/2$, si $y\geq 0$, entonces de [5, p.401] ,se sigue que

$$\|\exp(yB)\| \leq \exp(y\mu_2(B)), \quad y\geq 0 \tag{3.24}$$

Si q es un entero positivo, entonces de [5, teorema 11.2.4], tenemos que

$$\begin{aligned}&\|\exp(-(k\pi/p)^2At)-\sum_{j=0}^{q}(-1)^j(k\pi/p)^{2j}A^jt^j/j!\|\leq\\ &\leq(m/(q+1)!)\max\{\|\exp(-(k\pi/p)^2Ats)\|;\ 0\leq s\leq 1\}\end{aligned} \tag{3.25}$$

Tomando y=ts, con $0\leq s\leq 1$, $t_o\leq t\leq t_1$, y $B=-(k\pi/p)^2At$, de (3.24),(3.25) tenemos que

$$\begin{aligned}&\|\exp(-(k\pi/p)^2At)-\sum_{j=0}^{q}(-1)^j(k\pi/p)^{2j}A^jt^j/j!\|\leq\\ &\leq(m/(q+1)!)\exp(t_1\mu_2(-(k\pi/p)^2A))\end{aligned} \tag{3.26}$$

Denotemos por $W_{n,q}(x,t)$ la suma finita obtenida cuando se substituye la matriz exponencial $\exp(-(k\pi/p)^2At)$ por la q-ésima suma del desarrollo de Taylor,en $W_n(x,t)$,

$$W_{n,q}(x,t)=\sum_{k=1}^{n}\{\sum_{j=0}^{q}(-1)^j(k\pi/p)^{2j}A^jt^j/j!\}\operatorname{sen}(k\pi x/p)d_k \qquad (3.27)$$

De aquí y de (2.16),(3.6) y (3.26), si $t_o\leq t\leq t_1$, $0\leq x\leq p$, se sigue que

$$\|W_{n,q}(x,t)-W_n(x,t)\|\leq(ap/\pi^2)m/(q+1)!\sum_{k=1}^{n}\exp(t_1\mu_2(-(k\pi/p)^2A)) \qquad (3.28)$$

De la definición de $\mu_2(B)$, está claro que $\mu_2(B)\leq\|B\|$, y por tanto tenemos que

$$\mu_2(-(k\pi/p)^2A))\leq(k\pi/p)^2\|A\| \qquad (3.29)$$

De aquí y de (3.28), para encontrar el valor de q tal que el error de truncación $\|W_{n,q}(x,t)-W_n(x,t)\|$ sea menor que ε , tenemos que tomar q tal que

$$((q+1)!)^{-1}\leq(\varepsilon\pi^2/apm)(\sum_{k=1}^{n}\exp((k\pi/p)^2\|A\|t_1))^{-1} \qquad (3.30)$$

De lo anteriormente dicho se concluye la demostración del siguiente resultado:

TEOREMA 3. Consideremos las hipótesis y la notación del teorema 2, y sea q un entero positivo que satisface la condición (3.30). Si $\varepsilon>0$, n satisface la condición (3.22) y $W_{n,q}(x,t)$ está definido por (3.27), $n\geq\max(2,n_o)$ donde n_o viene definido por (3.4), $t_o\leq t\leq t_1$, $0\leq x\leq p$, entonces la función $U_{n,q}(x,t)$ definida por

$$U_{n,q}(x,t)=(T_2-T_1)x/p+T_1+W_{n,q}(x,t) \qquad (3.31)$$

es una solución aproximada del problema (1.1)-(1.3), cuyo error con respecto a la solución exacta U(x,t) dada en el teorema 1, satisface

$$\|U(x,t)-U_{n,q}(x,t)\|<2\varepsilon, \text{ uniformemente para } 0\leq x\leq p,\ t_o\leq t\leq t_1$$

NOTA. Si la matriz A que aparece en (1.1) es no singular y sus valores propios tiene parte real estríctamente positiva, es decir, $\sigma(A)=\{\lambda_i;\ 1\leq i\leq s\}$, $0<\operatorname{Re}(\lambda_1)\leq\ldots\leq\operatorname{Re}(\lambda_s)$, entonces las conclusiones de los teoremas 2 y 3 son válidas tomando $R_1=0$. De este modo los resultados de este artículo extienden los incluidos en [7] . Es conveniente hacer notar que la construcción de las soluciones aproximadas suministradas por los teoremas 2 y 3 dependen de la información espectral de A, la información que se necesita extá expresada en términos de cotas y no de la información espectral exacta. En efecto, obsérvese que en (3.3), γ_1 es una cota inferior de la parte real de λ_1. Análogamente las constantes C y D en (3.1) dependen de cotas de los valores propios y de las normas de las proyecciones espectrales de A. Estas proyecciones espectrales se pueden acotar en norma utilizando su expresión en términos de la fórmula de Riesz-Dunford y acotando la integral resultante, véase [4 ,p.555]. En relación con la accesibilidad de la hipótesis (1.4), tampoco se necesita la información espectral de A. En efecto, en [14] se presenta un algoritmo para calcular el indice de los valores propios de una matriz. Finalmente, una vez obtenida la solución aproximada mediante la suma finita (3.31), aunque depende de x y de t y de potencias de A, no es preciso repetir el cálculo de dichas potencias al cambiar el instante temporal, porque utilizando lenguajes algebraicos simbólicos como REDUCE , MACSYMA o MATHEMATICA, se puetrabajar simbólicamente con las matrices. Cabe destacar que en relación con los métodos discretos clásicos el método propuesto en este artículo suministra la solución analítica-numérica simultaneamente para (x,t) en una banda finita cualquiera con el error admisible que se desee. Los métodos discretos no suministran cotas de error y no obtienen la aproximación más que en una malla finita de puntos.

AGRADECIMIENTOS. Este artículo ha sido realizado con la ayuda de la Dirección General de Investigación Científica y Técnica, proyecto PS90-0140, y de la NATO proyecto CRG 900040.

REFERENCIAS

1 T.M. Apostol, Mathematical Analysis, Addison-Wesley, Reading, MA., 1977.

2 R.V. Churchill y J.W. Brown, Fourier Series and Boundary Value Problems, McGraw-Hill, 1978.

3 J.R. Cannon y R.E. Klein, On the Observability and Stability of the Temperature Distribution in a Composite Heat Conductor, SIAM J. Appl. Math., 24(1973), 596-602.

4 N. Dunford y J. Schwartz, Linear Operators I, Interscience, New York, 1957.

5 G.H. Golub y C.F. Van Loan, Matrix Computations, John Hopkins Univ. Press, Baltimore, 1985.

6 L. Jódar, Explicit Solutions for Second Order Operator Differential Equations with Two Boundary Value Conditions, Linear Algebra and Appl., 103(1988), 73-86.

7 L. Jódar, Computing Accurate Solutions for Coupled Systems of Second Order Partial Differential Equations, Int. J. Computer Maths., 37(1990),201-212.

8 P.Lancaster y M. Tismenetsky, The Theory of Matrices, Second Ed. Academic Press, 1985.

9 A.I.Lee y J.H.Hill, On the General Linear Coupled System for Diffussion in Media with Two Diffusivities, J.Math. Anal. Appl., 89(1982), 530-538.

10 C.B. Moler and C.F. Van Loan, Nineteen Dubious Ways to Compute the Exponential of a Matrix, SIAM Review 20(1978),801-836.

11 J.M. Ortega, Numerical Analysis, A Second Course, Academic Press, New York, 1972.

12 W. Troy, The Bifurcation of Periodic Solutions in the Hodgkin-Huxley Equations, Quart. Appl. Math.,(1978), 73-83.

13 W. Troy, Oscillation Phenomena in the Hodgkin-Huxley Equations, Proc. Roy. Soc. Edinburgh 74A (1976),299-310.

14 K.M. Anstreicher y U.G. Rotblum, Using Gauss-Jordan Elimination to Compute the Index,Generalized Nullspaces and the Drazin Inverse, Linear Algebra Appl. 85(1987), 221-239.

Lucas Jódar y Matilde Legua
Departamento de Matemática Aplicada
Universidad Politécnica de Valencia
Apdo.22.012 Valencia ESPAÑA

Recibido en Mayo de 1991.
Versión modificada en Junio de 1992.