Revista de la
Unión Matemática Argentina
Volumen 38, 1992.

RESULTADOS SOBRE CLASES A_p EN ESPACIOS DE TIPO HOMOGENEO

ANA BERNARDIS y OSCAR SALINAS

RESUMEN: Se prueba que si $w \in A_p$, $1 < p < \infty$, para una bola B de un espacio de tipo homogéneo con medida regular, luego las reordenadas no decreciente y no creciente de w están en A_p del intervalo $[0, \mu(B)]$. Esto proporciona otra demostración de que si w está en A_p, también está en $A_{p-\varepsilon}$ para algún $\varepsilon > 0$. Se obtiene, además, una estimación del ε y una nueva caracterización de A_p.

§1. INTRODUCCIÓN.

Sea X un conjunto con una casi-métrica, es decir una función no negativa $d(\cdot,\cdot)$ definida en $X \times X$, tal que

(1.1) $d(x,y) = 0$ *si y solo si* $x = y$

(1.2) $d(x,y) = d(y,x)$

(1.3) existe una constante finita $K > 0$ tal que

$$d(x,y) \leq K(d(x,z) + d(z,y))$$

Sea μ una medida positiva definida en una $\sigma - algebra$ de subconjuntos de X que contiene las bolas $B(x,r) = \{y \in X / d(x,y) < r\}$ y tal que existe una constante $D > 0$ para la cual se verifica

$$0 < \mu(B(x,2r)) \leq D\mu(B(x,r)) < \infty, \tag{1.4}$$

para todo $x \in X$ y todo $r > 0$.

Este trabajo fue realizado mientras los autores disponían de becas del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas de la República Argentina.

1980 Mathematics Subject Classification (1985 Revision): Primary 28A25.

Al conjunto X con la casi-métrica d y la medida μ lo llamaremos un espacio de tipo homogéneo y lo denotaremos con (X,d,μ).

Las clases A_p de Muckenhoupt en espacios de tipo homogéneo fueron introducidos por A. P. Calderón en [C]. Para $p \in (1,\infty)$, dichas clases están conformadas por las funciones no negativas y localmente integrables w que satisfacen

$$\frac{1}{\mu(B(x,r))}\int_{B(x,r)} w\,d\mu\left(\frac{1}{\mu(B(x,r))}\int_{B(x,r)} w^{-1/(p-1)}\,d\mu\right)^{p-1} \le A < \infty, \tag{1.5}$$

para todo $x \in X$ y todo $r > 0$, para alguna constante A. Si una función w verifica (1.5) diremos que w pertenece a A_p con constante A. Si las bolas $B(x,r)$ se toman solo dentro de una bola fija $B_o = B(x_o,R)$ diremos que w pertenece a A_p en B_o.

Finalmente, denotaremos con w_* y w^* a las reordenadas no decreciente y no creciente, respectinamente, de una función w.

En 1989, Ingemar Wik ([W]) probó, para $X = \mathbb{R}^n$ con la métrica euclídea y la medida de Lebesgue, que si $w \in A_p$ en un cubo Q, luego w_* y w^* pertenecen a A_p en $[0,|Q|]$. Usando este resultado, a su vez, dió otra demostración de que si $w \in A_p$ luego $w \in A_{p-\varepsilon}$ para algún $\varepsilon > 0$, obteniendo al mismo tiempo, una estimación del ε. El propósito de este trabajo es extender estos resultados al caso de un espacio de tipo homogéneo (X,d,μ) con μ una medida regular. Concretando, nuestros resultados principales son los siguientes:

(1.6) TEOREMA: *Sea $w \in A_p$ en una bola B_o con constante A. Luego w^* (w_*) pertenece a A_p en $[0,\mu(B_o)]$ con constante $\tilde{A} = 2^p A^{\delta+1} D^{(\delta+1)p-1}$.*

(1.7) TEOREMA: *Sea $w \in A_p$ con constante A. Luego $w \in A_{p_1}$, para todo $p_1 > p - \sigma(p-1)$, con constante*

$$\frac{1}{c_1}\left(\frac{p_1 - 1}{p_1 - p + \sigma(p-1)}\right)^{p_1 - 1};$$

donde $\sigma = \left(2(2\tilde{A})^{1/(p-1)}\right)^{-1}$, $c_1 = 2^{-\sigma(p-1)}\tilde{A}^{-1}$ y $\tilde{A}$ es la constante del Teorema anterior.

Como consecuencia del Teorema anterior, es posible obtener otra caracterización de A_p.

(1.8) COROLARIO: *Una función no negativa, localmente integrable w está en A_p, $p > 1$, si y solo si existe un número p_1, $1 < p_1 < p$, y una constante A, tal que para toda bola B*

$$\frac{w(E)}{w(B)} \ge A\left(\frac{\mu(E)}{\mu(B)}\right)^{p_1}, \tag{1.9}$$

para todo conjunto medible $E \subset B$.

Las técnicas que utilizaremos para la demostración de los resultados anteriores son una adaptación de las aplicadas por I. Wik. Dichas demostraciones son presentadas en §3. El §2 está dedicado a algunos resultados técnicos.

§2. RESULTADOS TÉCNICOS.

Comenzaremos con dos lemas de cubrimiento. El primero nos servirá para probar el segundo.

(2.1) LEMA: *Sea E un subconjunto acotado de X y $\{B(x, r(x))\}$ un cubrimiento de E. Luego, existe una sucesión de bolas disjuntas $\{B(x_i, r(x_i))\}$ tal que $E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} B(x_i, SKr(x_i))$, donde K es la constante de (1.3).*

Demostración: Ver [CW], pág. 69 #.

(2.2) LEMA: *Sean E un conjunto medible con medida finita y $\lambda \in (0,1)$. Supongamos que E está contenido en una bola B y que $\mu(E) \leq \lambda\mu(B)$. Luego existe una familia numerable $\{B(x_i, r_i)\}$ de bolas disjuntas tales que:*

(2.3)
$$D^{-1}\lambda < \frac{\mu(B(x_i, r_i) \cap E)}{\mu(B(x_i, r_i))} \leq \lambda,$$

donde D es la constante de (1.4)

(2.4)
$$E' \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} B(x_i, SKr_i),$$

donde E' difiere de E en, a lo sumo, un conjunto de medida nula.

Demostración: Para cada $x \in E$, sea $R(x) = \{r > 0 / \frac{\mu(E \cap B)}{\mu(B)} > \lambda, \quad B = B(x, r)\}$. Es claro que, excepto por un conjunto de medida nula, $R(x) \neq \emptyset$ y está acotado superiormente. Indicaremos con E' a E menos dicho conjunto. Sea $x \in E'$, luego existe $r(x) > 0$ tal que se verifica simultaneamente

$$\frac{\mu(E \cap B(x.r(x)/2))}{\mu(B(x, r(x)/2))} > \lambda, \qquad \frac{\mu(E \cap B(x, r(x))}{\mu(B(x, r(x))} \leq \lambda.$$

Ahora, aplicando el Lema anterior a la familia $\{B(x, r(x))\}_{x \in E'}$, obtenemos una subfamilia numerable de bolas disjuntas $\{B(x_i, r_i)\}$ tal que $E' \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} B(x_i, 5Kr_i)$. Además

$$\lambda \geq \frac{\mu(E \cap B(x, r(x)))}{\mu(B(x, r(x)))} \qquad \geq \frac{\mu(E \cap B(x, r(x)/2))}{\mu(B(x, r(x)))} > D^{-1}\lambda,$$

con lo cual tenemos, en particular, (2.3) para la sucesión hallada y queda demostrado el lema.#

(2.5) OBSERVACION: Notemos que el lema (2.2) no es sino un caso particular de la descomposición de Calderón-Zygmund en espacios de tipo homogéneo (ver, por ejemplo, [MS]).

A continuación presentamos dos resultados de teoría de funciones en $\mathbb{R}$. Los mismos ya fueron aplicados por Wik para obtener el Teorema (1.7) para $X = \mathbb{R}^n$.

(2.6) LEMA: *Sea g una función integrable en $[0,1]$ y c una constante tal que*

(2.7.) $$\int_0^t g(u)\,du \leq \quad ctg(t), \qquad 0 < t \leq 1$$

Luego

$$\int_0^t g(u)\,du \leq \quad t^{1/c} \int_0^1 g(u)\,du.$$

Demostración: Sea $\sigma = 1/c$. Multiplicando ambos miembros de (2.7) por $t^{-1-\sigma}$ e integrando, obtenemos

$$\int_a^1 t^{-1-\sigma}\,dt \int_0^t g(u)\,du \leq c \int_a^1 t^{-\sigma} g(t)\,dt.$$

Un cambio de orden de integración nos conduce a

$$\frac{a^\sigma - 1}{\sigma} \int_0^a g(u)\,du + \frac{1}{\sigma} \int_a^1 (u^{-\sigma} - 1) g(u)\,du \leq c \int_a^1 t^{-\sigma} g(t)\,dt.$$

Luego, como $\sigma c = 1$, se sigue

$$a^{-\sigma} \int_0^a g(u)\,du \leq \int_0^1 g(u)\,du$$

que es nuestra tesis.#

(2.8) LEMA: *Sea f una función no decreciente y positiva en $[0,1]$ tal que*

(2.9) $$\frac{1}{t}\int_0^t f(u)\,du \left(\frac{1}{t} \int_0^t (f(u))^{-1/(p-1)}\,du \right)^{p-1} \leq A_1,$$

para algún $p > 1$, alguna constante A_1 y todo $t \in (0,1]$. Luego

$$\int_0^t f(u)\,du \geq c_1 t^{p-\sigma(p-1)} \int_0^1 f(u)\,du,$$

donde $c_1 = 2^{-\sigma(p-1)} A_1^{-1}$ y $\sigma = \left(2(2A_1)^{1/(p-1)} \right)^{-1}$

Demostración: Usando el hecho que

$$\frac{1}{t}\int_0^t f(u)\,du \geq \frac{1}{2}f(\frac{t}{2}) \qquad ,0 \leq t \leq 1,$$

de (2.9) se sigue

$$\frac{1}{t}\int_0^t f(u)^{-1/(p-1)}\,du \leq (2A_1)^{1/(p-1)}\, f(\frac{t}{2})^{-1/(p-1)}$$

lo que, a su vez, permite obtener

$$\frac{1}{t}\int_0^t f(\frac{u}{2})^{-1/(p-1)}\,du \leq 2\frac{1}{t}\int_0^t f(u)^{-1/(p-1)}\,du \leq 2(2A_1)^{1/(p-1)} f(\frac{t}{2})^{-1/(p-1)}$$

Luego, la función $g(u) = f(u/2)^{-1/(p-1)}$ satisface las hipótesis del Lema (2.6), entonces:

$$\int_0^t f(\frac{u}{2})^{-1/(p-1)}\,du \leq t^\sigma \int_0^1 f(\frac{u}{2})^{-1/(p-1)}\,du$$

para $\sigma = \left(2(2A_1)^{1/(p-1)}\right)^{-1}$. De esta desigualdad se sigue que

(2.10) $\int_0^t f(u)^{-1/(p-1)}\,du \leq (2t)^\sigma \int_0^{1/2} f(u)^{-1/(p-1)}\,du$

$$\leq (2t)^\sigma \int_0^1 f(u)^{-1/(p-1)}\,du$$

vale para $0 \leq t \leq 1/2$. Por otra parte, aplicando la desigualdad de Hölder, obtenemos

$$t^p \leq \int_0^t f(u)\,du \left(\int_0^t f(u)^{-1/(p-1)}\,du\right)^{p-1},$$

lo que, combinado con (2.10), nos lleva a

$$\int_0^t f(u)\,du \geq 2^{-\sigma(p-1)} t^{p-\sigma(p-1)} \left(\int_0^1 f(u)^{-1/(p-1)}\,du\right)^{-(p-1)}.$$

Aplicando nuevamente (2.9), resulta

$$\int_0^t f(u)\,du \geq A_1^{-1} 2^{-\sigma(p-1)} t^{p-\sigma(p-1)} \int_0^1 f(u)\,du$$

con lo que queda probado el lema.#

§3. DEMOSTRACIONES DE LOS TEOREMAS. Con los resultados de la sección anterior, estamos en condiciones de proceder con las demostraciones de (1.6), (1.7) y (1.8).

Demostración del teorema (1.6): Sean $a > 0$, $E = \{x \in B_o / w(x) \leq a\}$ y $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$ la familia de todas las bolas disjuntas obtenida aplicando el Lema (2.2) a E con $\lambda = 1/2$. Dado que $w \in A_p$, se verifica

$$\int_{B_i} w^{-1/(p-1)}\, d\mu \leq \mu(B_i)^{p/(p-1)} A^{p/(p-1)} \left(\int_{B_i} w\, d\mu \right)^{-1/(p-1)},$$

para todo i. Como, por (2.3), $w > a$ en, al menos, la mitad de cada B_i, resulta que

(3.1)

$$\int_{B_i} w^{-1/(p-1)}\, d\mu \leq \mu(B_i)^{p/(p-1)} (2A)^{1/(p-1)} a^{-1/(p-1)} \mu(B_i)^{-1/(p-1)} = (2A)^{1/(p-1)} a^{-1/(p-1)} \mu(B_i)$$

Por otra parte, puesto que la medida dada por $w^{-1/(p-1)}$ satisface una propiedad como (1.4) con constante $A^{1/(p-1)} D^{p/(p-1)}$, indicando con $\tilde{B}_i$ a la dilatada SK veces de B_i y con δ a $log_2 D + 1$, resulta

$$\int_E w^{-1/(p-1)}\, d\mu \leq \int_{\cup_i \tilde{B}_i} \mu^{-1/p-1}\, d\mu \leq \sum_i w^{-1/(p-1)}(\tilde{B}_i) \leq A^{\delta/(p-1)} D^{\delta p/(p-1)} \sum_i w^{-1/(p-1)}(B_i).$$

Luego, de ésto y (3.1), se sigue:

(3.2)

$$\begin{aligned}\int_E w^{-1/(p-1)}\, d\mu &\leq A^{\delta/(p-1)} D^{\delta p/(p-1)} (2A)^{1/(p-1)} a^{-1/(p-1)} \sum_i \mu(B_i)\\ &\leq (2A)^{(\delta+1)/(p-1)} 2^{-\delta/(p-1)} D^{\delta p/(p-1)} a^{-1/(p-1)} 2D \sum_i \mu(E \cap B_i)\\ &\leq (2A)^{(\delta+1)/(p-1)} 2^{(p-\delta-1)/(p-1)} D^{(\delta p+p-1)/(p-1)} a^{-1/(p-1)} \mu(E).\end{aligned}$$

Ahora, a partir de la definición de w_* y la última desigualdad, es claro que

$$\frac{1}{b} \int_0^b w_*(t)^{-1/(p-1)}\, dt \leq (2A)^{(\delta+1)/(p-1)} 2^{(p-\delta-1)/(p-1)} D^{(\delta p+p-1)/(p-1)} w_*(b)^{-1/(p-1)},$$

vale para todo $b \in [0, \mu(B_o)]$. Luego, teniendo en cuenta ésto y las desigualdades

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b w_*(t)^{-1/(p-1)}\, dt \leq \frac{1}{b} \int_0^b w_*(t)^{-1/(p-1)}\, dt,$$

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b w_*(t)\, dt \leq w_*(b),$$

es inmediato que

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b w_*(t)\,dt\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b w_*(t)^{-1/(p-1)}\,dt\right)^{p-1} \leq 2^p A^{(\delta+1)} D^{(\delta+1)p-1},$$

vale para todos los a y b tal que $0 \leq a < b \leq \mu(B_o)$. Esto prueba nuestra tesis para w_*. El razonamiento para w^* es similar.#

(3.3) OBSERVACION: A partir de la demostración anterior se puede ver que w también satisface una desigualdad de tipo A_p para los conjuntos $\{x \in B_o / w(x) \leq a\}$, $a > 0$. En efecto, indicando con E_a a dichos conjuntos, la desigualdad (3.2) y el hecho obvio que $\int_{E_a} w\,d\mu \leq a\mu(E_a)$ permiten obtener

$$\frac{1}{\mu(E_a)}\int_{E_a} w\,d\mu\left(\frac{1}{\mu(E_a)}\int_{E_a} w^{-1/(p-1)}\,d\mu\right)^{p-1} \leq 2^p A^{(\delta+1)} D^{\delta(p+1)-1}.$$

Demostración del Teorema (1.7): Sea B una bola en X. Como $w \in A_p$, es claro que $w \in A_p$ en B. Luego, del Teorema (1.6) se sigue que

$$\frac{1}{b}\int_0^b w_*(u)\,du\left(\frac{1}{b}\int_0^b w_*(u)^{-1/(p-1)}\,du\right) \leq \tilde{A},$$

vale para todo $b \in (0, \mu(B)]$. Luego, haciendo el cambio de variables $u = s\mu(b)$ e indicando con t a $b/\mu(B)$, tenemos

$$\frac{1}{t}\int_0^t w_*(s\mu(B))\,ds\left(\frac{1}{t}\int_0^t w_*(s\mu(B))^{-1/(p-1)}\,ds\right)^{p-1} \leq \tilde{A}$$

para todo $t \in (0,1]$. Entonces, a partir del Lema (2.8) resulta

$$\text{(3.4)} \qquad \int_0^t w_*(s\mu(B))\,ds \geq c_1 t^{p-\sigma(p-1)} \int_0^1 w_*(s\mu(B))\,ds$$

para todo $t \in [0,1]$, con $\sigma = \left(2(2\tilde{A})^{1/(p-1)}\right)^{-1}$ y $c_1 = \left(2^{\sigma(p-1)}\tilde{A}\right)^{-1}$.

Ahora bien, como $w\mu(B)/w(B)$ también está en A_p con constante A, las conclusiones anteriores también valen para su reordenada no decreciente en B, la cual simbolizaremos con $\tilde{w}_*$. Luego, de (3.4), dado que $\int_0^1 \tilde{w}_*(s\mu(B))\,ds = 1$, tenemos

$$\tilde{w}_*(t\mu(B)) \geq c_1 t^{(p-1)(1-\sigma)}, \qquad \forall t \in [0,1].$$

Entonces, para cada $p_1 > p - \sigma(p-1)$ vale

$$\frac{w(B)}{\mu(B)}\left(\frac{1}{\mu(B)}\int_B w^{-1/(p_1-1)}\,d\mu\right)^{p_1-1} = \left(\frac{1}{\mu(B)}\int_0^{\mu(B)} \tilde{w}_*(t)^{-1/(p_1-1)}\,dt\right)^{p_1-1}$$
$$= \left(\int_0^1 \tilde{w}_*(t\mu(B))^{-1/(p_1-1)}\,dt\right)^{p_1-1} \leq \frac{1}{c_1}\left(\int_0^1 t^{(p-1)(\sigma-1)/(p_1-1)}\,dt\right)^{p_1-1} = \frac{1}{c_1}\left(\frac{p_1-1}{p_1-p+\sigma(p-1)}\right)^{p_1-1}$$

con lo que concluye la demostración del Teorema.#

Demostración del Corolario(1.8): Supongamos que $w \in A_p$. Luego, por el Teorema (1.7), sabemos que existe $p_1 \in (1,p)$ tal que $w \in A_{p_1}$ con una constante A^{-1}. Entonces, para cada bola $B \subset X$, aplicando la desigualdad de Hölder, tenemos

$$\begin{aligned}\left(\frac{\mu(E)}{\mu(B)}\right)^{p_1} &= \left(\frac{1}{\mu(B)}\int_B \chi_E\,d\mu\right)^{p_1}\\ &\leq \frac{1}{\mu(B)}\int_B \chi_E w\,d\mu\left(\frac{1}{\mu(B)}\int_B w^{-1/(p_1-1)}\,d\mu\right)^{p_1-1}\\ &\leq A^{-1}\frac{w(E)}{w(B)},\end{aligned}$$

para todo conjunto medible $E \subset B$, es dicir, se verifica (1.9). Ahora supongamos que vale (1.9). Sean B una bola en X y w_* la reordenada no decreciente de w en B. Luego, a partir de (1.9), tenemos

$$\int_0^t w_*(u)\,du \geq A\left(\frac{t}{\mu(B)}\right)^{p_1} w(B),$$

para todo $t \in [0,\mu(B)]$. Esto, a su vez, implica que $w_*(t) \geq \left(A/\mu(B)\right)^{p_1} t^{p_1-1}w(B)$ para dichos valores de t. Entonces

$$\begin{aligned}w(B)\left(\int_B w^{-1/(p-1)}\,d\mu\right)^{p-1} &= w(B)\left(\int_0^{\mu(B)} w_*(t)^{-1/(p-1)}\,dt\right)^{p-1}\\ &\leq \frac{\mu(B)^p}{A}\left(\int_0^{\mu(B)} t^{(-p_1-1)/(p-1)}\,dt\right)^{p-1},\\ &= A^{-1}\left(\frac{p-1}{p-p_1}\right)^{p-1}\mu(B)^p\end{aligned}$$

de manera que $w \in A_p$, y queda probado el corolario.#

BIBLIOGRAFIA

[C] CALDERON, A. P.: "Inequalities for the maximal function relative to a metric"; Studia Math. 57 (1976), 297-306.

[MS] MACIAS, R.; SEGOVIA, C.: "A well behaved quasi-distance for spaces of homogeneous type", Trabajos de Matemática, N°32, Instituto Argentino de Matemática, (1981), 1–18.

[W] WIK, I.: " On Muckenhoupt's classes of weight functions", Studia Math. 94 (1989), 245–255.

Programa Especial de Matemática Aplicada,
Güemes 3450, 3000 Santa Fe
Universidad Nacional del Litoral.

Recibido en mayo de 1992.