

**RESUMENES DE LAS COMUNICACIONES PRESENTADAS A LA XXXIX  
REUNION ANUAL DE LA UNION MATEMATICA ARGENTINA**

NOTA: Las comunicaciones sin asteriscos fueron expuestas por su autor, o por alguno de sus autores.  
Las comunicaciones que van precedidas por un asterisco, fueron expuestas, en ausencia de su autor, por un integrante del grupo de investigación al que él pertenece.  
Las comunicaciones que van precedidas por dos asteriscos, no fueron expuestas.

**FUNDAMENTOS, TOPOLOGIA, TEORIA DE NUMEROS.**

PUYAU, H.A. (Rosario-Facultad de Humanidades): *Homología y Homotopía: Los axiomas de Eilenberg y Steenrod.*

En 1952 Eilenberg y Steenrod axiomatizaron el tránsito de los espacios topológicos a los grupos de homología mediante tres funciones definidas en una categoría admisible que se ajustan a siete axiomas.

Esta axiomatización alcanza a la homología simplicial y singular, a las teorías cohomológicas y con algunas restricciones a la teoría de la homotopía.

Sin embargo el axioma de excisión presenta dificultades para justificar el isomorfismo entre grupos de homotopía.

El estado actual de la topología algebraica muestra múltiples relaciones entre homología y homotopía que van más allá de las justificadas por los axiomas. Las operaciones de cohomología (cuadramientos de Steenrod) se muestran eficaces para resolver problemas de obstrucción en homotopía.

Por otra parte los grupos de homotopía estables se comportan como los grupos de homología.

También la homotopía se ha mostrado más dúctil a las fibraciones lo que ha permitido desarrollos como K-teoría y L-teoría.

El camino de una revisión de los axiomas ha sido emprendido por algunos autores como Whitehead, Milnor, etc. Son estos resulta-

dos lo que nos proponemos valorar en la presente comunicación.

FASCELLA, M.B. y SCARPARO, R.C. (PROMAR-CONICET-U.N.R.): *Existencia de sistemas directos de selecciones medibles.*

Fundamentalmente se prueba el resultado siguiente:

Sea:  $\{\Phi_\alpha, (h_{\alpha\beta}, k_{\alpha\beta})\}_{\alpha \in [0, \kappa), (\alpha, \beta) \in \leq}$

un sistema directo de multifunciones, medible cerrado y convexo con dominio en un sistema directo de espacios pavimentados:

$\{X_\alpha, h_{\alpha\beta}\}_{\alpha \in [0, \kappa), (\alpha, \beta) \in \leq}$

$(k, \sigma)$ -paracompactos y blanco en un sistema directo de espacios de Banach:

$\{Y_\alpha, k_{\alpha\beta}\}_{\alpha \in [0, \kappa), (\alpha, \beta) \in \leq}$

$k$ -acotados, entonces si las aplicaciones  $h_{\alpha\beta}$  son inmersiones cerradas y para cada  $\gamma \in [0, \kappa)$  de segunda especie  $\{h_{\alpha\gamma}\}_{\alpha < \gamma}$  es objeto inicial en la categoría  $\text{Dir.}\{X_\alpha, h_{\alpha\beta}\}_{\alpha \leq \beta < \gamma}$

el sistema directo de multifunciones admite la existencia de un sistema directo de selecciones medibles:

$\{f_\alpha, (h_{\alpha\beta}, k_{\alpha\beta})\}_{\alpha \in [0, \kappa), (\alpha, \beta) \in \leq}$

SCARPARO, R.C. (PROMAR-CONICET-U.N.R.): *Relación entre selectividad y  $(S_1-\infty)$ -paracompacidad.*

Fundamentalmente se demuestra el resultado siguiente:

Un espacio pavimentado  $\{X, A\}$  es  $(S_1-\infty)$ -paracompacto si y solo si para todo espacio de Banach  $B$   $S_1$ -acotado toda multifunción medible  $\Phi: X \rightarrow B$ , cerrada y convexa admite la existencia de selección medible.

DUBUC, E.J. (U.B.A.): *Ciertos algoritmos en teoría de números.*

Para todo número primo  $p$  tal que  $p \equiv 7 \pmod{8}$ , se considera la curva elíptica  $A(p)$  con multiplicación compleja sobre la

extensión cuadrática imaginaria  $Q(-p)$ . La función zeta de Hasse-Weil asociada se identifica con la L-serie siguiente (bajo la forma de producto de Euler):

$$L(s) = \prod_{\substack{g(p) \\ \neq 0}} (1 - a_g / N(g)^s)^{-1}$$

donde  $g$  recorre el conjunto de ideales primos del anillo  $Z((1+ -p)/2)$  de enteros de  $Q(-p)$ ,  $N(g)$  es la norma y  $a_g$  es un número complejo definido como sigue: sea  $h$  el orden del grupo de cuerpos de clases correspondiente,  $g^h$  es principal generado por  $a$   $Z((1+ -p)/2)$ , notado  $a_g$ . La conjetura de Birch y Swinnerton-Dyer predice la fórmula siguiente:

$$L(1) = |\omega| \Omega$$

donde  $\omega$  es el grupo de Tate-Schafarevitch y  $\Omega$  el período asociado a la curva. La teoría dice que  $|\omega|$  es un cuadrado perfecto. El cálculo de  $L(1)/\Omega$  hasta el presente siempre ha producido un cuadrado perfecto. La dificultad reside en el desarrollo de algoritmos que permitan calcular  $L(1)$ . El período  $\Omega$  se calcula fácilmente por medio de ciertas fórmulas. Los algoritmos presentados necesitan de conocimientos elementales de teoría de números y son implementables en la práctica.

NOTA. Este trabajo ha sido hecho siguiendo ideas de Fernando Rodríguez Villegas para calcular ciertos caracteres de Hecke.

REFERENCIAS. La referencia inmediata del trabajo es la tesis de B.Gross Arithmetic on Elliptic Curves with Complex Multiplication LN in Math. vol.776, 1980.

COSTA, H.A. (U.N.Ca.): *Criterios generales de divisibilidad*.

Si  $m = a_k a_{k-1} a_{k-2} \dots a_3 a_2 a_1 a_0$  ( $r$  se tiene  $m = qr + a_0$ , donde  $q = a_k a_{k-1} a_{k-2} \dots a_3 a_2 a_1$  ( $r$ : Siendo  $n$  un natural no nulo menor que  $m$ , se verifica el siguiente Criterio General de Divisibilidad: "La condición necesaria y suficiente para que  $m$  sea múltiplo de  $n$  es que lo sea el número  $dq + ha_0$ ; donde  $d = \text{mcd}(n, r)$  y  $h$  es una solución, prima con  $n$ , de la ecuación lineal de congruencia  $rx \equiv d \pmod{n}$ ".

En el presente trabajo se demuestra el criterio anterior y se realiza un estudio comparativo, tendiente a establecer la practicidad de su utilización, entre el mismo y el conocido Criterio de restos potenciales, que dice: "La condición necesaria y suficiente para que un número natural  $m$  sea divisible por otro  $n$ , es que lo sea la suma de los productos de las cifras de  $m$  por los restantes módulo  $n$  de las potencias correspondientes de la base".

### ORDEN, RETICULADOS, ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS ORDENADAS.

CIGNOLI, R., LAFALSE, S. y PETROVICH, A. (U.B.A.): *Dualidad de Priestley y operadores modales sobre reticulados distributivos.*

Un operador modal sobre un reticulado distributivo  $L$  con  $0$  y  $1$  es una función  $\nabla: L \rightarrow L$  que satisface la siguiente ecuación:  

$$\nabla(x \wedge y) = \nabla x \wedge \nabla y.$$

Una estructura de Priestley es una terna  $(X, N, R)$  tal que  $X$  es un espacio de Priestley,  $N$  es un subconjunto de  $X$  y  $R$  es una relación binaria sobre  $X$  que satisfacen las siguientes condiciones, donde  $R(x) = \{y \in X: (x, y) \in R\}$ : (i)  $R(x)$  es cerrado para todo  $x$  en  $X$ , (ii)  $R(x)$  es un subconjunto creciente de  $X$  para todo  $x$ , y (iii)  $R(x) = X$  para todo  $x \notin N$ .

Si  $\nabla$  es un operador modal sobre  $L$  y  $X$  es un espacio de Priestley de  $L$ , entonces definiendo  $N = \{p \in X: \nabla^{-1}(p) \neq \emptyset\}$  y  $R = \{(p, q) \in X \times X: \nabla^{-1}(p) \subseteq q\}$ , se obtiene una estructura de Priestley. Si  $(X, N, R)$  es una estructura de Priestley y  $L$  es el reticulado de los abiertos-cerrados crecientes de  $X$ , entonces definiendo  $\nabla U = N \cap \{x \in X: R(x) \subseteq U\}$  para todo  $U$  en  $L$ , se obtiene un operador modal sobre  $L$ . Se prueba que estas correspondencias son functoriales, y que establecen una dualidad entre categorías apropiadas.

Se demuestran, entre otras, las siguientes propiedades:

1)  $\nabla$  es un operador de interior si y sólo si  $N = X$  y  $R$  es una

relación de preorden sobre  $X$ .

- 2)  $\nabla$  es un cuantificador si y sólo si  $N = X$  y  $R$  es una relación de equivalencia sobre  $X$ .
- 3)  $\nabla$  es un homomorfismo de reticulado con 0 y 1 si y sólo si  $R$  es una función de  $X$  en  $X$ .

El interés de estos resultados es que permiten considerar en cierto sentido a los modelos de Kripke de las lógicas modales e intuicionista como "duals" de los respectivos modelos algebraicos.

\*\* GALLI, A.C. y SAGASTUME, M. (U.N. La Plata): *Criterios de n-normalidad finita.*

Dada un álgebra de Heyting simétrica finita  $A$  se caracterizan los coátomos del álgebra de Boole de los elementos regulares de  $A$  por medio de los elementos primos de  $A$ . Se obtienen así condiciones para que un álgebra de Heyting simétrica sea  $n$ -normal. Como consecuencia se obtiene un ejemplo de álgebra infinita en la cual el conjunto de los booleanos fuertes coincide con el de los booleanos y que no es  $n$ -normal para ningún  $n$ .

MARTINEZ, N. (U.B.A.): *Una dualidad topológica para grupos reticulados.*

Se desarrolla una dualidad topológica para los grupos reticulados. El espacio dual se obtiene considerando una variación del espacio de Stone del reticulado (los espacios de Stone ordenados con extremos) e introduciendo en estos espacios una involución de De Morgan y una función binaria y continua que satisface adecuadas condiciones algebraicas y topológicas. Con esta función el espacio dual resulta un semigrupo topológico ordenado.

La dualidad desarrollada permite recuperar a partir del espacio de representación la operación de suma del grupo.

FIGALLO, A.V. (U.N.S.J.), MONTEIRO, L.F. y ZILIANI, A.N. (U.N.S.): *Algebras de Lukasiewicz trivalentes libres sobre un conjunto ordenado.*

Sea  $I$  un conjunto ordenado. Consideremos el conjunto  $E$  de todas las funciones isótonas de  $I$  en el álgebra de Lukasiewicz

$T = \{0, 1/2, 1\}$  donde  $0 < 1/2 < 1$  y sea  $T^E$  el conjunto de todas las funciones de  $E$  en  $T$ .  $T^E$  algebraizado punto por punto es un álgebra de Lukasiewicz trivalente. Consideremos la aplicación  $g: I \rightarrow T^E$  definida por  $g(i) = G_i$ , donde  $G_i(f) = f(i)$ , para toda  $f \in E$  y sea  $G = \{G_i: i \in I\}$ . Sea  $L$  la subálgebra de Lukasiewicz de  $T^E$  engendrada por  $G$ , es decir  $L = SL(G)$ . Se prueba que  $L$  es el álgebra de Lukasiewicz libre sobre el conjunto ordenado  $I$ .

Observemos que si el orden sobre  $I$  coincide con la igualdad,  $L$  es el álgebra de Lukasiewicz con un conjunto de generadores libres cuyo cardinal coincide con el cardinal de  $I$ .

En el caso particular en que  $I$  es un conjunto ordenado finito se considera la siguiente bipartición de  $E$ :

$E_1 = \{f \in E: f(I) \subseteq \{0, 1\}\}$ ,  $E_2 = \{f \in E: 1/2 \in f(I)\}$  y se prueba que  $L$  es isomorfa a  $B^{E_1} \times T^{E_2}$  donde  $B^{E_1}$  es el conjunto de todas las aplicaciones de  $E_1$  en el álgebra de Boole

$B = \{0, 1\}$  y  $T^{E_2}$  es el conjunto de todas las aplicaciones de  $E_2$  en el álgebra de Lukasiewicz  $T = \{0, 1/2, 1\}$ .

Este resultado nos permite determinar el número de elementos de  $L$  en varios casos. Por ejemplo si: 1)  $I$  es una cadena finita, 2)  $I$  es una suma cardinal de cadenas finitas.

MONTEIRO, L.F., SAVINI, S. y SEWALD, J. (U.N.S.): *Construcción de álgebras de Lukasiewicz trivalentes monádicas.*

La noción de Algebra de Lukasiewicz (trivalente) Monádica fue introducida por L. Monteiro [4,5] como una generalización del concepto de Algebra de Boole Monádica [1].

Utilizando resultados de R. Mayet [2] se indica cómo construir un álgebra de Lukasiewicz monádica  $M(A, I)$  a partir de un álgebra de Boole monádica  $A$  y un ideal monádico  $I$  de  $A$ .

Si  $\exists$  y  $\exists^*$  son dos operadores de cuantificación sobre un álgebra de Boole  $A$  que verifican (c)  $\exists \forall^* x = \forall^* \exists x$  para todo  $x$  de  $A$ , donde  $\forall^* = \neg \exists^* \neg$ , entonces a partir de  $A$  se construye un álgebra de Lukasiewicz monádica  $\mathfrak{L}M(A)$ , [3,6].

Para el caso en que  $A$  es un álgebra de Boole finita y  $\exists$  es un operador de cuantificación sobre  $A$ , se indica cómo obtener todos los operadores de cuantificación  $\exists^*$  sobre  $A$  que verifican (c).

- [1] HALMOS, P., Algebraic Logic, Chelsea, New York (1962).
- [2] MAYET, R., Algèbres trivalentes de Lukasiewicz, anneaux booléens et anneaux monadiques. Séminaire de Logique Algèbrique, II 19, 1-10 (1969-1970). Faculté des Sciences. Université de Lyon.
- [3] MONTEIRO, A., Construction des Algèbres de Lukasiewicz trivalentes dans les algèbres de Boole Monadiques I, Math. Japonicae, 12 (1967), 1-23.
- [4] MONTEIRO, L., Algebras de Lukasiewicz Monádicas. Rev. de la U.M.A. 23 (1968), p.200.
- [5] MONTEIRO, L., Algebras de Lukasiewicz trivalentes monádicas, Notas de Lógica Matemática 32. Instituto de Matemática. Universidad Nacional del Sur, (1974).
- [6] MONTEIRO, L. et GONZALEZ COPPOLA, L., Sur une construction des algèbres de Lukasiewicz trivalentes. Portugaliae Mathematica, 23,3 (1964), 157-167.

## ALGEBRA UNIVERSAL, TEORIA DE CONJUNTOS.

VAGGIONE, D.J. (U.N.C.): *Representación de álgebras por secciones continuas de haces.*

Un álgebra  $A$  es globalmente representable por una clase  $\Sigma$  de álgebras cuando es isomorfa a la subálgebra de las secciones continuas de un haz de álgebras compacto y  $T_0$  con fibras en

$\Sigma$ {álgebras triviales} y a lo sumo una fibra trivial [Krauss, P. H. and Clark, D.M. "Global subdirect Products" Mem. of the American Math. Society, number 210]. Se prueba el siguiente TEOREMA: "Sea A cualquier álgebra, sea  $\Sigma$  una clase de álgebras Hull-Kernel respecto de A, entonces son equivalentes: i) A es globalmente representable por  $\Sigma$  ; ii)  $TOT(A, \Sigma)$  es vompacto denso y en el semi-reticulado  $J_{TOT(A, \Sigma)}$  se verifica el teorema chino del resto (versión débil)".

FIGALLO, A.V. (U.N.S.J. y U.N.La Pampa) y LANDINI, P.V. (U.N.S.J.): *Sobre las álgebras tetravalentes modales.*

En esta nota se caracteriza a las álgebras modales tetravalentes en términos de los operadores de implicación ( $\rightarrow$ ) y negación ( $\sim$ ). Se estudia una clase de álgebras  $(A, 1, \sim, \rightarrow)$  de tipo  $(0, 1, 2)$  que desempeña para las álgebras modales tetravalentes un papel análogo al que tienen las álgebras de Wajsberg trivalentes para las álgebras de Lukasiewicz trivalentes.

CELANI, C. (U.N.La Pampa) y FIGALLO, A.V. (U.N.S.J y U.N.La Pampa): *H-álgebras de De Morgan.*

En esta nota consideramos una nueva clase ecuacional de álgebras llamadas H-álgebras de De Morgan  $(A, \wedge, \vee, \sim, h, 0, 1)$  donde  $(A, \wedge, \vee, \sim, 0, 1)$  es un álgebra de De Morgan y  $h$  es endomorfismo. Obtenemos la dualidad de Priestley para estas álgebras.

Consideramos las H-álgebras de Morgan  $k$ -cíclicas, esto es verifican  $h^k(x) = x$  para todo  $x \in A$ , y determinamos la estructura del H-álgebra de De Morgan libre sobre un conjunto ordenado, generalizando resultados obtenidos por L. Monteiro (Une construction des algèbres de Morgan libres sur un ensemble ordonné, Rep. on Math, Logic, 3(1974), 31-36).

GONZALEZ, C.G. (U.B.A.): *La independencia del axioma de unión en la teoría de conjuntos de Zermelo.*

Sea  $Z$ , la teoría de conjuntos de Zermelo, la teoría formada



por los axiomas de extensionalidad, pares, infinito, unión, partes y separación, y sea  $T$  la teoría  $Z$  menos el axioma de unión. Se prueba que si  $T$  es consistente, entonces el axioma de unión no se deriva de  $T$ . Es decir, que el axioma de unión es independiente en la teoría de Zermelo. La prueba es totalmente finitista, de modo que, si se encontrara una deducción del axioma de unión a partir de los axiomas de  $T$  entonces se podría mostrar una deducción de una contradicción a partir de  $T$ .

La prueba se lleva a cabo construyendo un modelo de  $T$  más la negación del axioma de unión. Se trata de un modelo de permutación que se construye según la técnica desarrollada por Fraenkel-Mostowski-Specker.

Se comienza por indicar una fórmula que define una biyección del universo. Si  $F(x)$  es tal biyección se define una relación de pertenencia no standard

$$x \in' y \text{ y si y sólo si } F(x) \in y$$

luego se prueba que la relativización de los axiomas de  $T$  son teoremas de  $Z$ .

Por último se prueba: si la relativización del axioma de unión fuera teorema de  $Z$  entonces  $T$  sería inconsistente.

Además se prueba que el axioma de unión es independiente en la teoría  $ZC$ , que es la teoría de Zermelo con el agregado del axioma de elección. La técnica es similar a la prueba anterior, debido a que la relativización del axioma de elección es teorema de  $ZC$ . Es decir, vale en el modelo construido si vale en el modelo de base (ground model).

Estos resultados aparecerán en el volumen 36 (1990) del *Zeitschrift für Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*.

GONZALEZ, C.G. (U.B.A.): *El axioma de unión y  $V = L$* .

$V = L$  es el axioma de Gödel para la teoría de conjuntos, que dice "todo conjunto es constructible", es decir, obtenible

por cierto proceso de recursión transfinita. El modelo habitual de la teoría ZF más  $V=L$  es  $L$ , el universo constructible. Se construye un submodelo de  $L$  donde valen los axiomas de ZF, salvo unión, el axioma de elección, la hipótesis generalizada del continuo,  $V = L$  y la negación del axioma de unión. De este modo se prueba la independencia del axioma de unión de ZF más  $V = L$ .

El modelo se construye de la siguiente manera. En primer lugar se define por recursión transfinita  $L_{\omega_\omega}$ . Luego se define una sucesión transfinita  $S_\alpha$  como indica a continuación. Se parte haciendo  $S_0$  igual a  $L_{\omega_\omega}$ . Dado un estadio  $S_\alpha$  se define  $S_{\alpha+1}$  agregando todos los subconjuntos de  $S_\alpha$  que sean biyectables a algún conjunto de  $S_\alpha$ . Para los ordinales límites  $\alpha$  se define  $S_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} S_\beta$ . Luego se construye  $S = \bigcup S_\alpha$  para todo ordinal  $\alpha$ . Se prueba que en  $S$  valen los axiomas ZF menos unión, que valen el axioma de elección, la hipótesis generalizada del continuo y  $V = L$ , y que no vale el axioma de unión.

Se prueba también que en el modelo no existen conjuntos de cardinal  $\aleph_\omega$  ni de cardinal mayor.

## TEORIA DE GRUPOS, ALGEBRAS ASOCIATIVAS, TEORIA DE ANILLOS.

\*\* ARAUJO, J.O. (U.N.C.P.B.A.): *Invariantes Primitivos en Teoría de Galois.*

Sea  $K$  un cuerpo y  $f$  en  $K[X]$  un polinomio mónico irreducible de grado  $n$  con raíces  $x_1, \dots, x_n$ . Notemos con  $G_f$  el grupo de Galois de  $f$  y con  $\xi_f$  el discriminante de  $f$ . Se dará una extensión del siguiente hecho: " $G_f \subseteq A_n$  si y sólo si  $\xi_f \in K^2$ " donde  $A_n$  denota el grupo de permutaciones pares de orden  $n$ .

Sea  $G$  un subgrupo de  $S_n$ . Para una matriz  $A = [a_{ij}]$  de orden  $n$ , definimos el  $G$ -permanente de  $A$  como:

$$A_G = \sum_{g \in G} \prod_{i=1}^n a_{ig}(i)$$

En particular, si  $X_1, \dots, X_n$  son indeterminadas y  $a_{ij} = X_j^{i-1}$  se tiene  $A_G = i_G(X_1, \dots, X_n)$  en  $K[X_1, \dots, X_n]$ . Para  $h$  en  $\mathcal{S}_n$  sea  $i_G^h(X_1, \dots, X_n) = i_G(X_{h(1)}, \dots, X_{h(n)})$  y notamos con  $i_G^1, \dots, i_G^k$  los distintos conjugados de  $i_G$  bajo la acción de  $\mathcal{S}_n$ .

Finalmente definimos

$$I_G^f(T) = \prod_{j=1}^k (T - i_G^j(x_1, \dots, x_n)) \text{ en } K[T]$$

Con las notaciones precedentes se tiene:

TEOREMA. i)  $i_G^h = i_G$  si y sólo si  $h \in G$ . ii) Si  $I_G^f(T)$  tiene raíces simples y admite una raíz en  $K$ , entonces existe  $h$  en  $\mathcal{S}_n$  tal que  $G_f \subseteq h.G.h^{-1}$ . iii) Si  $|G| = n$ , la condición en ii) implica  $G_f \cong G$ .

NOTA. 1) Si  $G = A_n$ ,  $I_{A_n}^f(T) = T^2 - (\xi_0 + \xi_1)T + \xi_0 \cdot \xi_1$  con  $\xi_0 = i_{A_n}(x_1, \dots, x_n)$  y  $(\xi_0 - \xi_1)^2 = \xi_f$ . 2) El papel de  $i_G$  puede ser jugado por cualquier polinomio que verifique la condición i) del teorema, los que consideramos como invariantes primitivos para  $G$ .

#### BIBLIOGRAFIA.

- EDWARDS, H.M., Galois Theory, Springer-Verlag, New York, 1984.  
 GAAL, L., Classical Galois Theory, Chelsea Publishing Company, New York, 1970.  
 Van der WAERDEN, B.L., Moderne Algebra, Springer-Verlag, Berlin, 1930, New York, 1970.

\*\* SABIA, J.V.R. (U.B.A.): *Una demostración de la existencia de las sucesiones de Lewis.*

En este trabajo se demuestra la existencia de las sucesiones exactas de Lewis, usando las fórmulas de Atiyah-Wall para la aproximación diagonal que aparecen en la definición del pro-

ducto cup. La existencia de una sucesión exacta larga similar para grados positivos se puede demostrar alternativamente modificando la sucesión espectral de Hochschild-Serre. Se encuentra una sucesión exacta corta de bicomplejos y la sucesión larga es la correspondiente en homología.

GASTAMINZA, S. (U.N.S.): *Preprojective partition and global dimension.*

It is a well known fact that if  $\Lambda$  is an artin algebra of finite representation type and  $\underline{P}_0, \dots, \underline{P}_n$  is the preprojective partition of  $\text{ind } \Lambda$ , then the Auslander algebra of  $\Lambda$ , that is  $\Gamma = \text{End}_{\Lambda}(\bigsqcup X)^{\text{op}}$ ,  $X \in \bigcup_{j=0}^n \underline{P}_j$ , has global dimension  $\leq 2$ . Now we prove that if  $\Lambda$  is a hereditary artin algebra then the algebra  $\Lambda_i = \text{End}_{\Lambda}(\bigsqcup X)^{\text{op}}$ ,  $X \in \bigcup_{j < i} \underline{P}_j$ , has global dimension = 2, for each  $i$  such that  $\underline{P}_i$  is nonempty,  $0 < i < \infty$ . An example is given showing that this result fails if  $\Lambda$  is not a hereditary artin algebra.

CISNEROS, E., GONZALEZ, M.I. (PROMAR, CONICET-U.N.R.): *Anillos de Jacobson y anillos de polinomios tipo automorfismo  $R\langle x, \alpha \rangle$ .*

Sea  $A$  una clase de anillos primos. Un ideal  $P$  de un anillo  $R$  es un  $A$ -ideal si  $R/P \in A$ . Un anillo  $R$  es un  $A$ -anillo de Jacobson si todo ideal primo de  $R$  es intersección de  $A$ -ideales.

Sea  $B$  una clase de anillos  $\alpha$ -primos. Un ideal invariante  $I$  de  $R$  es un  $B$ -ideal si  $R/I \in B$ . Se establece la siguiente condición para el par  $(A, B)$ :

(A) Si el  $\alpha$ -anillo  $R \in B$  entonces  $R\langle x, \alpha \rangle/P \in A$  para todo ideal  $P$  de  $R\langle x, \alpha \rangle$  tal que  $P$  es maximal con respecto a la condición  $P \cap R = 0$ .

Se pretende probar el siguiente:

TEOREMA. Supongamos que el par  $(A, B)$  satisface la condición (A) entonces si el  $\alpha$ -anillo  $R$  es un anillo  $B$ -Jacobson,  $R\langle x, \alpha \rangle$

es un anillo A-Jacobson.

TILLI, M., GLUSCHANKOF, D.A. (U.B.A.): *Una nueva prueba del teorema de Hochster.*

Un viejo resultado de M. Stone (ver [St]) es la construcción del espacio espectral o de representación de un anillo conmutativo. Estos espacios produjeron la noción topológica de espacios espectrales (espacios con una base de abiertos compactos cerrada por intersecciones finitas y tal que todo cerrado indescomponible es la clausura de un punto). En [Ho] M. Hochster probó que ese nombre era merecido ya que, para cualquier espacio espectral  $X$  y cuerpo  $K$ , existe una  $K$ -álgebra cuyo espacio espectral es homeomorfo a  $X$ . Este resultado es fundamental pero la prueba es muy poco intuitiva y difícil de captar.

Para el caso en que el espacio espectral es Hausdorff y el cuerpo es  $Z_2$ , el teorema de Hochster se reduce al teorema de Stone para álgebras de Boole, que dice que un espacio espectral  $X$  es homeomorfo al espectro primo del anillo de funciones continuas de  $X$  en  $Z_2$ . Es fácil verificar que se puede repetir el mismo procedimiento para cualquier cuerpo.

En esta comunicación redemostraremos el teorema de Hochster dándolo como una generalización del teorema de Stone.

La clave está en ver que en el teorema de Stone, el conjunto  $2$  tiene tres funciones:

- Conjunto de idempotentes de un cuerpo;
- Conjunto de valores de verdad;
- Reticulados de ideales (incluyendo el impropio) de un cuerpo.

Para el caso no Hausdorff hay que separar estas tres funciones, para lo cual tomamos como nuestro conjunto de valores de verdad a la cadena  $\langle 0, \dots, 1/2^n, \dots, 1/4, 1/2, 1 \rangle$  y sobre ella definimos las valuaciones.

Dado un cuerpo  $K$  y un espacio espectral  $X$  con base  $B$ , se genera el anillo de polinomios con una indeterminada por cada elemento de  $B$ . A partir de las valuaciones definidas se da un con

junto de "cocientes admisibles" con los cuales se construye una extensión del anillo de polinomios cuyo espectro es homeomorfo a  $X$ .

#### REFERENCIAS

- [Ho] HOCHSTER, M., Prime Ideal Structure in Commutative Rings, Trans. A.M.S. 142.  
 [St] STONE, M., Topological representation of distributive lattices and Brouwerian logics, Canopis Pest. Mat. 67 (1937), 1-25.

GLUSCHANKOF, D.A. y TILLI, M. (U.B.A.): *Un teorema de caracterización de los pseudocuerpos.*

Uno de los primeros ejemplos en álgebra universal sobre qué es una clase ecuacional y qué no lo es, es la comparación entre las teorías de anillos y la de los cuerpos. Se define entonces un cuerpo como un anillo con una propiedad adicional, no ecuacional.

En esta comunicación presentaremos de forma ecuacional a la variedad de anillos generada por los cuerpos y daremos una serie de propiedades que los caracterizan.

DEFINICION. Un anillo conmutativo  $A$  se dice pseudocuerpo si admite una operación  $*$  que satisface las ecuaciones:

$$1) \quad x^{**} = x \quad ; \quad 2) \quad (xy)^* = y^*x^* \quad y \quad 3) \quad xx^*x = x.$$

Ecuacionalmente, un pseudocuerpo  $\langle K, +, \cdot, -, *, 0, 1 \rangle$  de tipo  $\langle 2, 2, 1, 1, 0, 0 \rangle$  donde  $\langle K, +, \cdot, -, 0, 1 \rangle$  es un anillo conmutativo que satisface las ecuaciones adicionales 1), 2) y 3).

TEOREMA. Para un anillo reducido  $A$  son equivalentes:

- i)  $A$  admite una estructura de pseudocuerpo;
- ii) Cada clase de divisibilidad de  $A$  tiene un idempotente;
- iii) Todos los ideales de  $A$  son semiprimos (radicales);
- iv) El reticulado de ideales de  $A$  admite una estructura de álgebra de Heyting para la residuación;
- v) El producto de ideales coincide con su intersección;

- vi) Todo ideal primo es maximal;
- vii) La topología de su espacio espectral es Hausdorff;
- viii) Para todo  $x \in A$  existe un idempotente  $y$  tal que  $xy = 0$  y  $x+y$  es inversible, en particular, si  $x$  es idempotente,  $x+y = 1$ ;
- ix) Para todo  $x \in A$  existe un  $y$  tal que  $xy = 0$  y  $x+y$  es idempotente;
- x) Para todo  $x \in A$  e ideal primo  $P$  tal que  $x \in P$  existe un  $y$  fuera de  $P$  tal que  $xy = 0$ ;
- xi) Toda localización de  $A$  es un cuerpo;
- xii) Toda clase de divisibilidad de  $A$  admite una estructura de grupo para el producto;
- xiii)  $A$  es isomorfo a un producto subdirecto de cuerpos.

\*\* GUCCIONE, J.A. y GUCCIONE, J.J. (IAM-CONICET): *Homología de Hochschild de intersecciones completas.*

Sea  $k$  un anillo conmutativo arbitrario con unidad y sea  $f_1, \dots, f_r$  una sucesión regular en  $k[X_1, \dots, X_n]$ . En este trabajo se calculan la homología y cohomología de Hochschild de  $A = k[X_1, \dots, X_n]/(f_1, \dots, f_r)$  con coeficientes en un  $A$ -módulo  $M$ . Los resultados obtenidos expresan estas homologías en función de complejos de Koszul generalizados (ver (Br-Ve) y la bibliografía que allí se cita). Cuando  $r = 1$ , los complejos de Koszul obtenidos coinciden con el clásico. En este caso se puede calcular también la homología cíclica de  $A$  bajo la hipótesis de que  $k$  contenga a  $\mathbb{Q}$  y  $f$  sea homogéneo y singular sólo en el origen.

#### Referencias

(Br-Ve) W. BRUNS, U. VETTER, Determinantal rings LN in Math.1237.

## GEOMETRIA ALGEBRAICA.

\* HEINTZ, J.U. (IAM-CONICET): *Cálculo efectivo de la clausura proyectiva.*

Sea  $k$  un cuerpo, con clausura algebraica  $\bar{k}$ , y sean  $X_0, \dots, X_n$  indeterminadas. Dados  $F_1, \dots, F_s \in k[X_1, \dots, X_n]$  con  $d := \max_{1 \leq i \leq s} \deg(F_i)$ , sea  $V := \{x \in \bar{k}^n; F_1(x) = 0, \dots, F_s(x) = 0\}$  la variedad afín definida por  $F_1, \dots, F_s$ . Se da un algoritmo que calcula ecuaciones homogéneas  $G_1, \dots, G_t \in k[X_0, \dots, X_n]$  para la clausura proyectiva de  $V$  en el espacio proyectivo  $n$ -dimensional sobre  $\bar{k}$ . El número  $t$  y los grados de  $G_1, \dots, G_t$  están acotados por  $\sum_j \deg(G_j) = d^{O(n^2)}$ , y el algoritmo tiene complejidad secuencial  $(sd)^{O(n^3)}$  y paralela  $O(n^6 \log^2 sd)$ .

Este resultado permite transferir resultados fundamentales de complejidad del cálculo de bases standard de ideales homogéneos al caso afín (ver D.Lazard: Grobner bases, Gaussian elimination and Resolution of algebraic equations; Proc. Eurocal 83, Springer LN Comput. Sci. 162 (1983) 146-156, y M.Giusti: Some effectivity problems in polynomial ideal theory; Proc. Eurosam 84, Springer LN Comput. Sci. 174 (1984) 159-171).

Este trabajo ha sido realizado en conjunto con L.CANIGLIA (U.B.A.) y A.GALLIGO (Niza).

\* KRICK, T.E. (U.B.A.): *Nota sobre el cálculo efectivo de radicales.*

Sea  $k$  un cuerpo y sean  $X_1, \dots, X_n$  indeterminadas sobre  $k$ . Dados  $F_1, \dots, F_s \in k[X_1, \dots, X_n]$  tales que el ideal que generan en  $k[X_1, \dots, X_n]$  tenga dimensión 0, y  $d := \max_{1 \leq i \leq s} \deg(F_i)$ , se construyen generadores  $G_1, \dots, G_t$  del ideal radical del ideal  $(F_1, \dots, F_s)$  en tiempo:



- secuencial:  $s^{O(1)} d^{O(n^2)}$
- paralelo:  $(n \cdot \log sd)^{O(1)}$ .

Además, se tiene que  $\sum_{1 \leq i \leq t} \deg(G_i) = d^n$ .

Relacionando también nuestros resultados con los de Alessandro Logar (A Note in the Complexity of the Membership Problem in the Polynomial Ring; Preprint), se puede exhibir el mismo tipo de cotas para el caso en que el ideal  $(F_1, \dots, F_s)$  es equidimensional de dimensión 1 y no tiene componentes inmersas.

El propósito futuro de nuestro grupo de trabajo es el cálculo efectivo del radical de un ideal polinomial, sin restricciones sobre la dimensión.

Este trabajo ha sido realizado conjuntamente con Joos HEINTZ (Buenos Aires).

\* DICKENSTEIN, A.M. y SESSA, C.I. (U.B.A.): *Dualidad de Zariski, residuos e ideales polinomiales de dimensión 0.*

Dado  $I \subseteq \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$  un ideal con finitos ceros, se construye efectivamente con operadores residuales un sistema lineal homogéneo, cuya anulación en los coeficientes de un polinomio  $P$  es equivalente a la condición  $P \in I$ .

La construcción del sistema se apoya, por un lado, en nuestro resultado previo para intersecciones completas y, por otro, en un resultado inédito de N. Coleff que pone en evidencia la dualidad de Zariski para ideales conteniendo una intersección completa 0-dimensional fija.

\* DANON, S.P. (U.B.A.): *El problema de la pertenencia a ideales polinomiales.*

Un problema central del Algebra Conmutativa Computacional es el de saber decidir efectivamente si un polinomio  $f$  en las indeterminadas  $X_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , a coeficientes en un cuerpo  $K$ ,

puede ser representado como combinación lineal (a coeficientes polinomiales) de otros polinomios  $f_1, \dots, f_m$  prefijados.

Sea  $d = \max(\deg f_i)$ . En 1926 Hermann demostró en (Her) que si el polinomio  $f$  pertenece al ideal  $(f_1, \dots, f_m)$ , entonces existe una representación de la forma

$$f = a_1 f_1 + \dots + a_m f_m$$

en la que  $\max(\deg a_i f_i) \leq \deg f + 2 \cdot d^{2^n}$ .

Estas cotas en los grados muestran que es posible diseñar un algoritmo que resuelva efectivamente el problema de la pertenencia, pero estos algoritmos no se pueden implementar dado que su complejidad es doblemente exponencial en el número de variables ((en Ma-Me) se muestra que esta complejidad es inherente al problema).

En este trabajo se resuelve el problema de la pertenencia con complejidad simplemente exponencial bajo hipótesis de carácter geométrico. En particular quedan comprendidos los casos de intersección completa y dimensión cero.

#### REFERENCIAS

- (Her) G.HERMANN, Die Frage der endlich vielen Schritte in der Theorie der Polynomideale, Math. Annalen 95 (1926).
- (Ma-Me) E.MAYR-A.MEYER, The complexity of the word problem for commutative semigroups and polynomial ideals, Advances in Math.46 (1982), 305-329.
- (D-F-G-S) A.DICKENSTEIN, N.FITCHAS, M.GIUSTI, C.SESSA, The membership problem for unmixed polynomials ideals is solvable in single exponential time, Proc.AAECC-7 Toulouse France 1989.

\* CANIGLIA, L.M. (IAM-CONICET): *Un algoritmo para calcular la forma de Chow de un ideal polinomial equidimensional y aplicaciones.*

Sea  $V$  una subvariedad algebraica del espacio proyectivo  $P^n$  sobre un cuerpo algebraicamente cerrado de característica arbitraria. Supongamos que todas las componentes irreducibles de

$V$  tienen la misma dimensión  $r$ . Consideremos el espacio  $L$  de todas las subvariedades lineales  $E$  de  $P^n$  de dimensión mayor o igual que  $n-r+1$ . Es sabido que este espacio  $L$  tiene una estructura canónica de subvariedad cerrada de un cierto espacio proyectivo  $P^N$ . Ocurre que el subconjunto de  $L$  formado por todas aquellas subvariedades lineales  $E$  que tienen intersección no vacía con  $V$  es una *hipersuperficie* de nuestro espacio  $L$ . En otras palabras, las subvariedades lineales  $E$  de  $L$  que tocan a  $V$  son aquellas que, en tanto puntos de  $P^N$  satisfacen una ecuación homogénea  $F=0$ , donde  $F$  es un polinomio en  $N$  indeterminadas sobre el cuerpo de base. Este polinomio  $F$  se llama la *Forma de Chow* de  $V$ .

En el presente trabajo damos un algoritmo eficientemente paralelizable que calcula Formas de Chow de variedades equidimensionales a partir de las ecuaciones que las definen. El algoritmo sólo requiere técnicas de Algebra Lineal sobre el cuerpo de base y trabaja en tiempo secuencial simplemente exponencial y paralelo polinomial. Las aplicaciones inmediatas son el cálculo del grado de variedades equidimensionales y el cálculo de ecuaciones que definan las componentes irreducibles de tales variedades.

SOLERNO, P.L. (U.B.A.): *Eliminación rápida de cuantificadores en R*.

Se presenta un nuevo algoritmo que elimina cuantificadores para el lenguaje de primer orden de  $R$  y que funciona con órdenes de complejidad más bajos que los conocidos hasta el presente (simultáneamente en complejidad secuencial y paralela).

Sea  $\phi$  una fórmula dada en forma prenexa:

$$\phi : (Q_1 X^{(1)}) \dots (Q_r X^{(r)}) \varphi(Y, X^{(1)}, \dots, X^{(r)})$$

donde:  $Y := (Y_1, \dots, Y_m)$ ,  $X^{(i)} := (X_1^{(i)}, \dots, X_{n_i}^{(i)})$   $1 \leq i \leq r$ ,

$$Q_i \in \{\exists, \forall\} \quad 1 \leq i \leq r \quad \text{y} \quad Q_i X^{(i)} := Q_i X_1^{(i)} Q_i X_2^{(i)} \dots Q_i X_{n_i}^{(i)}$$

$\varphi$  es una fórmula sin cuantificadores formada por con-

diciones de signo sobre una familia de polinomios  $P$ .

Si  $n := m + n_1 + \dots + n_r$  y  $d := \sum_{P \in P_\varphi} \deg(P)$ , entonces:

Existe un algoritmo que funciona en tiempo secuencial  $d^{n^{0(r)}}$  y tiempo paralelo  $n^{0(r)} (\log d)^{0(1)}$  y que construye una fórmula  $\Psi$  sin cuantificadores en las variables libres  $Y_1, \dots, Y_m$  equivalente a  $\Phi$ . Se dan también aplicaciones a la geometría efectiva y a la geometría diferencial (cálculo de funciones de Morse).

Los resultados anteriores para complejidad secuencial eran del orden  $d^{n^{0(n)}}$  (Collins; Monk; Wuthrich 1975) y  $d^{n^{0(r)}}$  (Grigor'ev, 1986) para el caso particular en que  $m=0$ . Para el caso paralelo se tenía  $n^{0(n)} (\log d)^{0(1)}$  (Fitchas-Galligo-Morgenstern, 1987) y Renegar (1988) para el caso  $m=0, r=1$ .

#### GRUPOS DE LIE.

BREGA, A.O. y TIRAO, J.A. (U.N.C.): *Un teorema de factorización en el álgebra universal de  $sl(n, \mathbb{C})$ .*

Se presenta el siguiente teorema de factorización en el álgebra universal  $U(k)$  donde  $k = sl(n, \mathbb{C})$ : sea  $\{\lambda_i - \lambda_j : 1 \leq i < j \leq n\}$  un sistema de raíces positivas de  $k$  y sea  $m^+$  la subálgebra nilpotente generada por los vectores raíces correspondientes a  $\{\lambda_i - \lambda_j : 1 \leq i < j \leq n-2\} \cup \{\lambda_i - \lambda_n : 1 \leq i \leq n-2\}$ . Si  $u \in U(k)m^+$  es un vector dominante de peso  $j(\lambda_1 - \lambda_n)$  entonces  $u \in U(k)X_{\lambda_1 - \lambda_n}$ . Este resultado fue conjeturado por Tirao hace ocho años y permite concluir la caracterización de la imagen en  $U(k) \otimes U(a)$  del anillo clasificante  $U(g)^K$  de un grupo de Lie semisimple  $G$ , cuando  $G$  es  $SU(n, 1)$ .

ANDRUSKIEWITSCH, N. y TIRAO, J.A. (U.N.C.): *Un teorema de res-*

tricción para módulos con un submódulo esférico.

Todas las representaciones que se consideran son de dimensión finita.

DEFINICION. Una representación  $L \rightarrow GL(V)$  de un grupo algebraico reductivo  $L$  se dice *esférica (de rango uno)* si

a) tiene órbitas genéricamente cerradas.

b)  $(L, M)$  es un par de Gelfand, donde  $M$  es el grupo de isotropía principal. (Por un teorema de Matsushima  $M$  es reductivo. Pongamos  $W = (\text{Normalizador en } L \text{ de } M)/M$ .)

c) la dimensión de  $V^M$  es 1.

TEOREMA. Sea ahora  $L \rightarrow GL(N)$  otra representación. Entonces el homomorfismo de restricción  $S'(N \oplus V) \rightarrow S'(N \oplus V^M)$  induce un monomorfismo  $S'(N \oplus V)^L \rightarrow S'(N \oplus V^M)^W$  cuya imagen es

$$\left( \bigoplus_{n \in \mathbb{N}_0} \left( \bigoplus_{\gamma \in \Gamma_n} S'(N)_\gamma^M \otimes S'_n(V^M) \right) \right)^W$$

Aquí  $S'_n$  es el subespacio de todos los polinomios homogéneos de grado  $n$  y si  $L^\wedge$  es el conjunto de todas las representaciones irreducibles de  $L$  de dimensión finita

$$\Gamma_n = \{ \gamma \in L^\wedge : \gamma^M \neq 0, m(\gamma) \leq n \}$$

donde  $m(\gamma)$  es el grado de homogeneidad de  $\gamma^*$  en los polinomios armónicos en  $V$ .

Aún podemos generalizar el enunciado anterior si  $(V, L)$  es un "producto" de representaciones esféricas de rango uno (ver [1]). Además

$$C_n = \bigoplus_{\gamma \in L^\wedge : m(\gamma) \leq n} S'(N)_\gamma^M$$

define una filtración de  $C = S'(N)^M$ .

TEOREMA. El anillo graduado asociado a esta filtración es isomorfo al anillo de  $P$ -invariantes en  $S'(N)$  donde  $P$  es el subgrupo de isotropía de un elemento inestable de dimensión máxima de  $V$ .

[1] "A restriction theorem for modules having a spherical submodule". Aparecerá en Transactions of the AMS.

GALINA, E. (U.N.C.): *Autovalores y autoespacios del operador de Dirac sobre Spin(2N,1), SU(N,1) y Sp(2,R)*.

Sea  $G$  un grupo reductivo real y  $K$  un subgrupo maximal de  $G$ . Sea  $(\tau_\sigma, V_\sigma)$  una representación irreducible de  $K$  de peso máximo  $\sigma$  y  $(s, S)$  la representación spin de  $K$ , se define  $D$  el operador de Dirac

$$D: L^2(G/K, V_\sigma \otimes S) \rightarrow L^2(G/K, V_\sigma \otimes S)$$

Se sabe que  $D$  es elíptico, esencialmente autoadjunto y  $G$ -invariante. Para el caso  $G = \text{Spin}(2n,1)$  y  $G = \text{SU}(n,1)$  he obtenido el conjunto de parámetros de las series discretas que ocurren en  $L^2(G/K, V_\sigma \otimes S)$ , su multiplicidad como una potencia de 2, el conjunto finito de autovalores de  $D$  y cada autoespacio como suma de determinadas series discretas. Además, para el caso  $G = \text{Sp}(2, \mathbb{R})$  encuentro ejemplos de series discretas que ocurren en  $L^2(G/K, V_\sigma \otimes S)$  cuyas multiplicidades no son potencias de 2.

VARGAS, J.A. (U.N.C.): *Restricción de representaciones de cuadrado integrable*.

Sea  $G$  un grupo de Lie real semisimple y  $H$  un subgrupo semisimple de  $G$ .

PROPOSICION 1. Si  $(\pi, V)$  es una representación de cuadrado integrable de  $G$ , entonces cada subrepresentación  $H$ -irreducible de  $V$  es de cuadrado integrable.

PROPOSICION 2. Si  $G = \text{SU}(2,1)$  y  $H$  es un subgrupo isomorfo a  $\text{SU}(1,1)$  y  $(\pi, V)$  es una representación de cuadrado integrable no holomorfa entonces  $V$  no contiene  $H$ -submódulos irreducibles no triviales.

PROPOSICION 3. Si  $G = \text{SU}(n,1)$  y  $H$  es isomorfo a  $\text{SU}(n-1,1)$  y

$(\pi, V)$  es una representación límite de serie discreta entonces  $V$  contiene  $H$ -submódulos irreducibles no triviales.

\*\* MIATELLO, R.J. (U.N.C.) y WALLACH, N.R. (Univ. Rutgers, U.S.A.):  
*Fórmulas de Kuznetsov en grupos de rango 1.*

En [K] Kuznetsov obtuvo en el caso en que  $G = SL(2, R)$ ,  $\Gamma = S(2, Z)$  una importante fórmula que vincula coeficientes de Fourier de formas automorfas de cuadrado integrable con sumas de Kloosterman  $S(m, n; c)$  ( $m, n, c \in N$ ). Posteriormente Proskurin extendió la fórmula a grupos Fuchsianos arbitrarios y a formas de peso arbitrario ([P]). Bruggemann ([Br1]) probó una fórmula análoga, pero menos explícita y más recientemente, Barchini obtuvo un análogo de la fórmula de Bruggemann en [Br1], en el caso en que  $G = SO(n, 1)$  ([B]). En un trabajo conjunto con N. R. Wallach [MW2] hemos obtenido una generalización de la fórmula inicial de Kuznetsov en el caso de  $G$  un grupo de Lie semi-simple de rango real 1 arbitrario. El método es también válido para fibrados de líneas, por lo tanto generaliza todos los resultados anteriores. La dificultad principal en la generalización es el determinar un sustituto para las funciones de Bessel  $J_\nu$  en la fórmula original. La reinterpretación apropiada es que  $J_\nu$  es, salvo un factor de normalización, la transformada de Fourier de la transformada  $T(\nu)$  que transforma vectores cónicos en vectores de Whittaker ([GW], [MW1]). La prueba de la generalización depende fuertemente de los cálculos explícitos de los coeficientes de Fourier de las  $M$ -series en ([MW1]). Un caso particular de interés por las posibles aplicaciones es el del espacio hiperbólico  $H^3$  ( $G = S(2, C)$ ), en el cual la fórmula obtenida es muy explícita.

- [B] BARCHINI, L., Fourier coefficients of automorphic forms and an estimate for cusp forms. Preprint.
- [Br1] BRUGGEMANN, R., Fourier coefficients of Cusp Forms, *Inventiones Math.* 45, 1-18 (1978).
- [Br2] BRUGGEMANN, R., Fourier Coefficients of Automorphic Forms, *Lecture Notes in Math.* 865, Springer Verlag (1981).

- [GW] GOODMAN, R., WALLACH, N.R., Whittaker Vectors and Conical Vectors. Journal of Functional Analysis 39, 1980, 199-279.
- [K] KUZNETSOV, N., The conjecture of Petersson for forms of weight 0 and the conjecture of Linnik, preprint 1977, Math. Sbornik 111 153, 334-383 (1980).
- [MW1] MIATELLO, R., WALLACH, N.R., Construction of automorphic forms by means of Whittaker Vectors, aparecerá en Journal of Functional Analysis.
- [MW2] MIATELLO, R., WALLACH, N.R., Kuznetsov formulas for rank one groups, aparecerá en Journal of Functional Analysis.
- [P] PROSKURIN, N., Sum formulas for general Kloosterman sums. Seminarov Lomi 82, 103-135 (1979).

#### GEOMETRIA DIFERENCIAL. GEOMETRIA RIEMANNIANA.

SANCHEZ, C.U. (U.N.C.): *Algunos Resultados sobre Puntos Fijos de Simetrías y un Invariante de Chen y Nagano.*

En este trabajo se estudian, en un espacio  $k$ -simétrico, compacto y conexo  $M$  los subconjuntos  $A \subset M$  tales que para todo  $x \in A$  la simetría de  $M$  en  $x$  fija todo otro punto de  $A$ . Estos subconjuntos son finitos y se denota por  $N_k(A)$  su cardinalidad. Se estudian estas cardinalidades para los espacios  $k$ -simétricos que son  $C$ -espacios de Kähler (es decir  $C$ -espacios con características de Euler positiva).

DRUETTA, M.J. (U.N.C.): *Espacios homogéneos de curvatura no positiva.*

Dado un espacio homogéneo  $M$  irreducible (simplemente conexo) de curvatura seccional no positiva y rango  $(M) \geq 2$ , se trata de encontrar condiciones para que éste sea un espacio simétrico de tipo no compacto.

$M$  se puede expresar como un grupo de Lie soluble  $G$  con una métrica invariante a izquierda de curvatura no positiva. Si  $\mathfrak{g}$  es el álgebra de Lie de  $G$ ,  $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \oplus \mathfrak{a}$  donde  $\mathfrak{a}$ , el ortogonal



de  $[g, g]$  respecto de la métrica, es una subálgebra abeliana de  $g$ .

Se estudian las órbitas  $G(\gamma_H(\infty))$  en  $M(\infty)$  ( $\gamma_H$  es la geodésica asociada al subgrupo monoparamétrico de  $G$  determinado por  $H$  en  $a$ ) y sus imágenes por  $S_e$ , la simetría geodésica en  $e$ , la identidad de  $G$ .

El objetivo es obtener un subconjunto propio, cerrado de  $M(\infty)$  que sea invariante por  $G$  y  $S_e$ , para aplicar un teorema de P. Eberlein ("Symmetry diffeomorphism group of a manifold of non-positive curvature II", a aparecer en *Indiana Mathematics Journal*) que relaciona subconjuntos propios cerrados invariantes de  $M(\infty)$  por el grupo de difeomorfismos de  $M$ , con el grupo de holonomía del espacio.

GYSIN, L.M. (U.B.A.): *Una generalización de la desigualdad isoperimétrica en los planos elíptico e hiperbólico.*

La clásica desigualdad isoperimétrica fue generalizada por Banchoff y Pohl al caso de curvas no necesariamente simples, y a dimensión y codimensión arbitrarias.

En este trabajo se prueba que, llamando  $W^2$  al plano hiperbólico, elíptico o euclídeo;  $C$  a una curva cerrada no necesariamente simple contenida en el plano; y  $H(r)$  a la función  $\text{sh } r$ ,  $\text{sen } r$ , o  $r$  respectivamente

$$L^2 - 4\pi \int_{W^2} \omega^2 dP - \int_{G \cap (C \times C)} (H(r) - r) d\vec{G} \geq 0$$

(donde  $L$  es la longitud de la curva,  $\omega(p)$  es el "winding nr." de la curva con respecto a  $p$ ,  $dP$  es la densidad de puntos en  $W^2$ , y  $d\vec{G}$  la densidad de geodésicas orientadas) valiéndola si y sólo si  $C$  es una circunferencia o varias circunferencias coincidentes recorridas todas en la misma dirección.

Aplicado al caso de curvas simples esto da las clásicas desigualdades isoperimétricas, y aplicado al caso euclídeo da el resultado de Banchoff y Pohl.

Este resultado también se generaliza a dimensión y codimensión

arbitrarias.

SALVAI, M.L. (U.N.C.): *Sobre la diferenciabilidad de la foliación horosférica.*

Sea  $M$  una variedad riemanniana compacta de curvatura seccional negativa  $K$ . Se dice que la curvatura de  $M$  es globalmente  $\alpha$ -pinching si  $\alpha < \inf |K_x(P)/K_x(Q)|$ , donde el ínfimo se toma sobre todos los  $x, y$  en  $M$ , y todos los 2-planos  $P, Q$  en  $T_x M, T_y M$ . La curvatura de  $M$  es localmente  $\alpha$ -pinching si  $\alpha < \inf |K_x(P)/K_y(Q)|$ , donde el ínfimo se toma sobre todos los  $x$  en  $M$  y todos los 2-planos  $P, Q$  en  $T_x M$ . Notar que la primera condición implica la segunda.

En [H-P] se prueba que si la curvatura de  $M$  es globalmente  $1/4$ -pinching, entonces la foliación horosférica de  $M$  es de clase  $C^1$ . En el trabajo [G] se da una demostración, imprecisa y con errores, de un enunciado equivalente, usando herramientas de Geometría Riemanniana, a diferencia que en [H-P]. Hemos corregido esa prueba, y encontrado una condición suficiente (en términos de campos de Jacobi en dimensión dos) para que el resultado siga siendo válido si en la hipótesis se cambia global por localmente (esta generalización fue conjeturada en [H-P]). Creemos que esa condición suficiente es verdadera, y estamos tratando de probarla.

#### REFERENCIAS

- [H-P] M.HIRSCH & C.PUGH, Smoothness of horocycle foliations, J. Differential Geometry 10 (1975).  
 [G] L.GREEN, The generalized geodesic flow, Duke Math. J.41 (1974).

\*\* DOTTI, I.G. (U.N.C.): *Estructuras complejas en variedades homogéneas.*

Sea  $M$  una variedad homogénea de Kähler que admite un grupo soluble y transitivo  $S$  de automorfismos. El principal problema

abordado en este trabajo es determinar el número de estructuras de Kähler en  $M$ , (estructuras complejas pueden variar) tal que  $S$  es grupo de isometrías holomorfas. Sigue de resultados de Dorfmeister que se puede suponer que  $M$  es isométrica a un grupo de Lie soluble  $S$  de tipo split (los autovalores de  $\text{ad}_x$  son reales,  $x \in \underline{s}$ ) munido de una estructura de Kähler invariante. Mas aún Gindikin-Vinberg prueban que uná tal álgebra se descompone ortogonalmente

$$\underline{s} = \underline{u} \oplus \underline{s}_1$$

donde  $\underline{u}$  es un ideal abeliano  $j$ -invariante maximal. Los resultados principales del presente trabajo son

- El ideal  $\underline{u}$  no depende de la estructura compleja.
- En cada componente irreducible de  $\underline{s}_1$  existe a lo sumo una estructura compleja salvo conjugación.

Notamos que resultados de Pyatetskii-Shapiro implican que la clase de variedades de Kähler que corresponden a  $\underline{s}_1$  son exactamente los dominios homogéneos acotados de  $C^n$ .

**\*\* DOTTI, I. y MIATELLO, R.J. (U.N.C.):** *Isometrías de tipo interior en grupos de Lie.*

Sea  $G$  un grupo de Lie conexo con una métrica invariante a izquierda y sea  $I(G)$  el grupo total de isometrías. Es un problema no resuelto la determinación de  $I(G)$ . Un subgrupo importante  $U$  de  $I(G)$  está dado por las isometrías de tipo  $I_x$ ,  $x \in G$ , llamadas isometrías de tipo interior. Por ejemplo si  $G$  es compacto simple o  $G$  es semisimple sin factores compactos,  $U$  determina totalmente a  $I(G)$ , por resultados de Ochiai-Takahashi y C. Gordon. El propósito del presente trabajo ([D.M]) es dar condiciones sobre los posibles subgrupos  $U$  cuando la métrica en  $G$  varía.

Existen fuertes restricciones a la realización de subgrupos de rango no maximal. En el caso de un toro  $T$  en un grupo compacto y semisimple probamos un teorema que da una condición algebraica necesaria y suficiente en término de las raíces de  $T$  (ver Th.2.1). Se obtiene también un resultado en el caso de subgrupos de rango máximo. Se prueba que dado un tal subgrupo

conexo  $H$ , existe una métrica en  $G$  tal que  $U_0 = H$  (Th.3.2). Se exhiben además una variedad de ejemplos mostrando que  $U$  es en general altamente desconexo. Por ejemplo se prueba (Th.2.2, Prop.3.2): (i) Si  $G$  es compacto semisimple,  $T$  un toro maximal, para toda métrica invariante a izquierda con  $U = T$ , resulta  $U$  desconexo. (ii) Si  $G = SU(2)$ , para toda métrica invariante a izquierda  $U$  es desconexo. En particular sigue de los resultados anteriores que  $I(G)$  es desconexo. Notamos que en [D.Z], Remark 1, p.24, se afirma exactamente lo contrario, es decir que en cierta clase de grupos simples compactos  $I(G)$  es conexo para toda métrica, lo cual no es correcto.

[D.M] DOTTI, I., MIATELLO, R., Inner type isometries on Lie groups, aparecerá en Journal of the London Math. Society.

[D.Z] D'ATRI, J., ZILLER, W., Naturally reductive metrics and Einstein metrics on compact Lie groups, Memoirs AMS, 18, (1979), 1-72.

GARCIA, A. (U.N.C.) y JIMENEZ, J.A. (Pennsylvania State University): *Espacios 4 - simétricos*.

Este trabajo es parte de un proyecto tendiente a obtener:

i) la clasificación de los espacios 4-simétricos simplemente conexos  $G/L$  de tipo reductivo (esto es,  $G$  grupo de Lie conexo reductivo,  $L$  componente de la identidad del conjunto de puntos fijos de un automorfismo de orden 4 de  $G$ ),

ii) determinar aquellos que admiten estructuras a) Riemannianas; b) complejas; c) semi-kahlerianas; invariantes bajo las simetrías definidas por el automorfismo.

Es conocida la clasificación en el caso compacto (J.A. Jimenez, Riemannian 4-symmetric spaces, Transactions of the Am. Math. Soc. 1988). Actualmente tenemos resultados bastante completos, a nivel de álgebras, sobre (i) y (ii) cuando la complejificación del álgebra de Lie de  $G$  es simple clásica.

CORACH, G. (U.B.A.), PORTA, H. (Univ. of Illinois at Urbana) y RECHT, L. (Univ. Simón Bolívar, Caracas): *Geometría de operado-*

*res hermitianos inversibles.*

Dada un álgebra  $C^*$ ,  $A$ , se estudia la geometría diferencial del espacio  $G^S$  de elementos inversibles y hermitianos de  $A$ . Se demuestra que el grupo de inversibles de  $A$  actúa sobre  $G^S$  por  $(g, a) \rightarrow g a g^*$ ; esto define, sobre la órbita de  $a \in G^S$ , una estructura de fibrado principal con una conexión; hay una noción de curvas horizontales con respecto a la conexión; el levantamiento horizontal de curvas en  $G^S$  se obtiene resolviendo una ecuación diferencial del tipo  $\dot{x}(t) = f(t)x(t)$ , relacionada a las integrales multiplicativas de Volterra y Potapov. Hay asimismo resultados sobre longitud de geodésicas en  $G^S$ .

#### TEORIA DE AUTOMATAS, COMBINATORIA, TEORIA DE GRAFOS.

RYCKEBOER, H. (U.B.A.): *No se requiere autómatas para mostrar que las expresiones regulares son cerradas para la complementación.*

Como ya comentó L.C.Eggan, las demostraciones de familias cerradas para la complementación recurren a la correspondencia entre las expresiones regulares y los lenguajes aceptados por autómatas finitos.

Tiene atractivo teórico lograr la demostración sin recurrir a ese artificio.

Ello se logra mostrando que:

- i) Todo lenguaje regular integra la solución de un sistema de ecuaciones del cual es deducible en forma de expresión regular.
- ii) El sistema de ecuaciones es deducible a partir de la expresión regular.
- iii) Los lenguajes complementarios surgen de modificar los términos independientes del sistema.

Colaboró en el presente trabajo la Lic. Miriam Sohn.

\*\* SOHN, M. (U.B.A.): *Monoïdes sintácticos aperiódicos.*

Dado un autómatas determinístico de  $n$  estados, los elementos del monoïde sintáctico son aplicaciones de  $I_n$  en  $I_n$ .

Pará ver si el monoïde sintáctico contiene algún grupo no trivial, basta ver si algunos de sus elementos genera un submonoïde que contenga un grupo no trivial.

Una aplicación  $f: I_n \rightarrow I_n$  genera un submonoïde que contiene un grupo no trivial si, y sólo si, existe un subconjunto  $A$  de  $I_n$  tal que la restricción  $\hat{f}: A \rightarrow A$  es una permutación distinta de la identidad.

En el presente trabajo se da un algoritmo lineal para decidir cuándo un elemento del monoïde sintáctico genera un submonoïde aperiódico.

Colaboró en el presente resultado el Ing. Hugo Ryckeboer.

\*\* ZUCHELLO, R.J. (E.S.L.A.I.): *Hipergrafos compuestos.*

Dado el par  $(H_0, \{H_i; i = 1, \dots, n\})$  donde  $H_0$  es un hipergrafo (llamado *modelo*) cuyo conjunto de vértices es  $V(H_0) = \{1, \dots, n\}$  y  $\{H_i; i = 1, \dots, n\}$  es un conjunto de hipergrafos (llamados *satélites*) cuyos conjuntos de vértices son dos a dos disjuntos, la operación de composición definida por Chein, Habib y Maurer, le asigna un hipergrafo  $H$ , el compuesto de  $H_0$  por el conjunto  $\{H_i; i = 1, \dots, n\}$ .

Se estudia la composición para el caso en que  $H_0$  y los satélites son grafos.

Se encuentra bajo qué condiciones un hipergrafo  $H$  admite una descomposición en la cual el modelo sea un grafo, o bien tanto el modelo como los satélites sean grafos.

Se estudian las propiedades de las partes 2-estables, las particiones 2-estables y los comités 2-estables de un hipergrafo que se encuentran vinculados al problema citado arriba.

SALAZAR, R. and MONTENEGRO, E. (Univ. Católica de Valparaíso, Chile): *Graph with given automorphism group and given nuclear number.*

In 1938, Frucht (1) proved that every finite group may be represented by a graph; in other words, given any finite group  $H$ , there is a graph  $G$  whose automorphism group is isomorphic to  $H$ . Starting from this result a great many mathematicians have studied the following problem: "Given a finite group  $H$  and given a property  $P$ , is there a graph  $G$  that represents  $H$  and that satisfies the property  $P$ ?"

The aim of this paper is to solve a problem of such characteristics. The statement we get is the following: "Every finite group  $H$  may be represented by a graph  $G$  whose nuclear number is  $n \geq 2$ , where  $n$  is a given positive integer.

(1) FRUCHT, R., Herstellung von Graphen mit vorgegebener abstrakter Gruppe!. *Compositio Math.*, 6(1938) 239-150.

SALAZAR, R., MONTENEGRO, E. (Univ. Católica de Valparaíso, Chile): *Automorphism group and hamiltonian properties preserved by the substitution.*

When all the vertices of a complete graph  $K_n$ , are substituted (1) by copies of the cycle  $C_{n-1}$ , we obtain a trivalent family of graphs denoted by  $K_n(C_{n-1})$ . Let  $M_k$  be the graph obtained through successive substitution of  $k$  vertices of  $K_n$ ,  $k \leq n$ , by copies of the cycle  $C_{n-1}$ . It is shown that the graphs  $M_k$  are hamiltonian-connected. The trivalent graphs  $M_n$  are members of  $K_n(C_{n-1})$ .

Now, if all the vertices of  $K_n$  are substituted in an homogeneous way (2), by isomorphic copies of the cycle  $C_{n-1}$ , which is denoted by  $H_n(C_{n-1})$ , the result obtained here is the following:

$\text{Aut}(H_n(C_{n-1})) \cong \text{Aut}(C_n) \cong D_n$ , where  $D_n$  is the dihedral group of order  $2n$ .

- (1) SALAZAR, R., A family of trivalent hamiltonian-connected graphs. Anuario Instituto de Matemáticas U.C.V. pg.30-42, 1989.
- (2) MONTENEGRO, E.-SALAZAR, R., Automorphism group of a graph and its substitution. Submitted.

MONTENEGRO, E., SALAZAR, R. (Univ. Católica de Valparaíso, Chile):  
*A result of Sabidussi from the substitution framework.*

In 1949, R. Frucht (2) established that any finite group can be represented by a graph of degree three in the sense that the automorphism group of the graph is isomorphic to the given group. In 1957, G. Sabidussi (4) gave another step in this direction, proving that every finite group can be represented by an infinite number of regular graphs. It is the object of this work to present a proof which is more elementary than the existing in the literature. The techniques used are based on a generalization of a construction given by Frucht (1) in his paper of 1938 and in one operation named substitution (3). In general terms, this operation consists in substituting a vertex for one graph.

- (1) FRUCHT, R., Herstellung von Graphen mit vorgegebener abstrakter Gruppe, *Compositio Math.*, 6(1938), 239-250.
- (2) FRUCHT, R., Graphs of degree three with a given abstract group, *Canad. J.* 1(1949), 365-378.
- (3) MONTENEGRO, E., Un resultado sobre el orden y el tamaño de grafos que representan a un grupo finito, *Visiones Científicas*, 2(1986), 49-71, Valparaíso, Chile.
- (4) SABIDUSSI, G., Graphs with given group and given graph-theoretical properties, *Canad. J. Math.*, 9(1957), 515-552.

#### TEORIA DE CONTROL. TEORIA DE JUEGOS.

CESCO, J.C. (U.N.S.L.): *A convergent transfer scheme to the core of a tu-game.*

En este trabajo se define un esquema de transferencias para



juegos cooperativos  $n$ -personales con utilidades transferibles. El esquema converge al "core" del juego toda vez que este conjunto es no vacío. Se presenta también un algoritmo de cálculo asociado. El esquema de transferencia está relacionado con el modelo estudiado en Stearns [1].

- [1] STEARNS, R.E., Convergent transfer schemes for  $n$ -person games, Trans.Amer.Math.Soc. 134, 449-459, 1969.

QUINTAS, L., NAKAYAMA, M. y MUTO, S. (U.N.S.L.): *Una noción de estabilidad en modelos de transferencia de tecnología.*

Esta comunicación está basada en los artículos de Nakayama y Quintas [1] y Nakayama, Quintas y Muto [2].

Se considera un modelo matemático para modelar cómo cierto conocimiento o tecnología ("an information good") es diseminado desde su generador (el innovador) hasta los usuarios de dicha tecnología.

Se asume que esta tecnología puede ser libremente replicada a un costo despreciable y que no existe una adecuada ley de patentamiento que efectivamente controle y/o limite este proceso de replicación.

Se modela esta situación como un juego  $n$ -personal y se introduce un concepto de estabilidad ("resale-proofness") que prescribe hasta dónde se diseminará la tecnología. Este concepto prescribe que aquellos adquirentes de la tecnología no tendrán incentivos para revenderla. Esto en general prescribe una familia de posibles resultados ("resale-proof trades"). Para cada uno de estos resultados se estudia el Core de un juego asociado. Se dan caracterizaciones del Core y condiciones necesarias y suficientes para que éste consista de un solo punto (la imputación monopolística). Se observa que en general el innovador no goza de una posición monopolística en tratos estables ("resale proof trades").

#### REFERENCIAS

- [1] NAKAYAMA, M. and QUINTAS, L.G., The Core of Resale-Proof Information Trades, Discussion Paper N°740, The Center for

Mathematical Studies in Economic and Management Science, Northwestern University (Abril 1988).

- [2] NAKAYAMA, M., QUINTAS, L.G. and MUTO, S., Resale-Proof Trades of Information, Discussion Paper N° .763, The Center for Mathematical Studies in Economic and Management Science, Northwestern University (January 1988).

OLIVERA, E.Z. y AURIOL, N.I. (U.N.S.L.): *Intercambiabilidad del conjunto de puntos de equilibrio en juegos n-personales cíclicos.*

Para juegos bipersonales en forma normal, convexidad e intercambiabilidad del conjunto de puntos de equilibrios son equivalentes.

En esta comunicación se demuestra que para juegos n-personales cíclicos esta equivalencia también vale.

MARCHI, E. y OVIEDO, J.A. (U.N.S.L.): *Construcción de juegos biracionales con puntos de equilibrio dados.*

Aquí se presentan técnicas para construir juegos biracionales con predeterminados puntos de equilibrios.

También se da una condición necesaria y suficiente para la existencia de un juego biracional con un único punto de equilibrio.

\*\* D'ATELLIS, C.E. (U.B.A.-C.N.E.A.) y GARCIA, R.A. (U.B.A.): *Dos métodos de control para sistemas no-lineales.*

Se exhiben dos métodos de control de sistemas no-lineales del tipo

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u$$

$$y = h(x)$$

donde  $x \in R^n$ ,  $u, y \in R$ ,  $f, g, h$  funciones analíticas.

El primero consiste en una realimentación lineal de la salida que resuelve completamente - bajo determinadas hipótesis -,

el problema de regulación.

El segundo método utiliza realimentación no lineal de los estados y algunos resultados acerca de la evolución del flujo sobre la variedad centro, para obtener un comportamiento estable del sistema controlado.

Se muestran algunos ejemplos, y resultados simulados.

TROPAREVSKY, M.I. (U.B.A.): *Comportamientos caóticos en sistemas discretos.*

El trabajo presenta algunas observaciones sobre la existencia de subconjuntos estables, inestables y órbitas periódicas en sistemas dinámicos en tiempo discreto en los que la variación de un parámetro determina dinámicas diferentes incluyendo comportamientos caóticos.

\*\* de SPINADEL, V.W. (U.B.A.): *Regularización de soluciones en un sistema de control sujeto a ruido.*

Al tratar de implementar numéricamente un problema de control, se diseña una construcción de movimientos paso-a-paso, en los cuales hay casi siempre presente un ruido de información de un tipo u de otro. P.ej., puede tratarse de imprecisiones en las mediciones del estado de las fases o bien retrasos en la información sobre el estado real del sistema. En esos casos, es factible que el ruido informativo destruya la solución ideal. Por ello, el diseño de procedimientos prácticos de control debe tomar en cuenta la estabilidad de las soluciones.

A ese respecto, es importante llegar a establecer estimados que permitan regularizar soluciones del sistema de control para que sean estables frente al ruido informativo. En este trabajo, se prueba una acotación uniforme local de las soluciones que puede ser útil para diseñar un control-guía, estando la evolución de la guía llevada a cabo mediante cálculos efectuados con una computadora.

QUINT, T. (U.N.S.L.): *The core of an m-sided assignment game.*

Se considera una generalización del mercado de casas de Shapley y Shubik (1972) en el cual hay m-diferentes tipos de agentes en lugar de dos. Estos juegos pueden tener "core" vacío. Una subclase de juegos con "core" no vacío es presentada.

#### REFERENCIAS

SHAPLEY, L. and SHUBIK, M., The assignment game I: the core, *International Journal of Game Theory* 1, 11-130, 1972.

#### TEORÍA DE LA APROXIMACION.

GONZALEZ, R. y TIDBALL, M. (U.N.R.): *Estimaciones Críticas para un esquema de aproximación de la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman.*

El objetivo de este trabajo es presentar una aproximación de la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman:

$$\max_{1 \leq d \leq m} \left\{ \lambda u - \sum_{i=1}^n g_i^d \frac{\partial u}{\partial x_i} - f^d \right\} = 0, \text{ en } \mathbb{R}^n, \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}^+, \quad (1)$$

relacionada con el problema de control óptimo con horizonte infinito y obtener el orden de convergencia de dicha aproximación.

Es conocido que la ecuación (1) no tiene en general una solución  $C^1$ , por lo que se considera la llamada solución de viscosidad de (1).

Para encontrar dicha solución consideramos la ecuación aproximada:

$$\max_{1 \leq d \leq m} \{ u^h(x) - (1-\lambda h)u^h(x+hg^d(x)) - hf^d(x) \} = 0, \text{ en } \mathbb{R}^n, \text{ con } x \in \mathbb{R}^n, \\ \lambda > 0.$$

Demostramos aquí que la velocidad de convergencia de la solución aproximada  $u^h$  a la función  $u$  de costo óptimo del problema original es de orden  $\gamma$ , es decir:

$$\|u(x) - u^h(x)\| \leq c h^\gamma$$

cuando se satisface que

$$\lambda > \gamma L_g$$

siendo  $L_g$  la constante de lipschitzianidad de  $g$ , lo que implica, en particular que  $u$  es una función hölderiana de orden  $\gamma$  o sea:

$$\|u(x) - u(\tilde{x})\| \leq C \|x - \tilde{x}\|^\gamma.$$

Resultados de este tipo fueron demostrados por Capuzzo Dolcetta e Ishii en [2] donde fue lograda esta acotación usando hipótesis fuertes sobre semiconcavidad de las funciones  $f$  y  $g$ . En este trabajo se demuestra la generalidad de la acotación (5) haciendo uso de técnicas del análisis convexo sin utilizar la hipótesis de semiconcavidad.

FAVIER, S.J. (U.N.S.L.): *Convergencia de promedios de intervalos para normas del tipo Orlicz.*

Para  $x_1, x_2, \dots, x_k$ ;  $k$  puntos distintos de la recta real  $\mathbb{R}$ , y

$\delta > 0$ , denotamos  $I_{i, \delta} = [x_i - \delta, x_i + \delta]$ ;  $i = 1, \dots, k$ ; y

$I_\delta = \bigcup_{i=1}^k I_{i, \delta}$ ; suponemos además que  $I_\delta \subseteq I$ , siendo  $I$  un intervalo fijo en  $\mathbb{R}$ .

Para  $\varphi: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ , continua, estrictamente creciente y  $\varphi(0) = 0$

llamamos  $L_\varphi[I] = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / \int_I \varphi[\frac{|f(t)|}{c}] dt < \infty \text{ para algún } c > 0\}$

y definimos

$$\|f\|_\varphi = \inf\{c > 0: \int_I \varphi[\frac{|f(t)|}{c}] dt \leq 1\}.$$

TEOREMA 1. Sea  $\varphi$ , estrictamente creciente,  $\varphi(0) = 0$ ,

$\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x) = \infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\varphi(\lambda x)}{\varphi(x)} = \psi(\lambda)$ , con  $\psi(\lambda) > k$  para  $\lambda > 1$

( $k = n^\circ$  de intervalos) entonces para  $f$  continua se tiene

$$\frac{\|f\chi_{I_\delta}\|_{L_\varphi[I]}}{\|\chi_{I_\delta}\|_{L_\varphi[I]}} \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \max\{|f(x_i)|\}_{i=1}^k$$

TEOREMA 2. Sea  $\varphi$  estrictamente creciente,  $\varphi(0) = 0$ ,

$\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x) = \infty$ , tal que  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\varphi(\lambda x)}{\varphi(x)} = \psi(\lambda)$  existe y es finito

$\forall \lambda \geq 0$ .

Supongamos además  $\psi$  continua por derecha en "0" y  $\psi(\infty) = \infty$ . Entonces para  $f$  continua se tiene

$$\frac{\|f\chi_{I_\delta}\|_{L_\varphi[I]}}{\|\chi_{I_\delta}\|_{L_\varphi[I]}} \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \inf\{c > 0: 1/k \sum_{i=1}^k \psi\left(\frac{|f(x_i)|}{c}\right) \leq 1\}$$

Estos teoremas se aplican a problemas de mejor aproximación local.

MARANO, M.A.A. (U.N.R.C.): *Aproximación en la media sobre intervalos disjuntos.*

Es sabido que una función continua definida en un intervalo tiene un único mejor aproximante en la media cuando se aproxima sobre un subespacio generado por un sistema de Tchebycheff. Este resultado deja de ser cierto en una unión disjunta de intervalos. En esta situación se estudia en este trabajo el rango del conjunto convexo de mejores aproximantes. Se obtiene que en  $k$  intervalos el rango es a lo sumo  $k-1$  cuando  $k$  no supera la dimensión del subespacio aproximante.

MARANO, M.A.A. (U.N.R.C.): *El algoritmo de Polya en el espacio  $c_0$ .*

El concepto de aproximante estricto, introducido por Rice [1], es extendido al espacio  $c_0$  de sucesiones tendiendo a 0. Se demuestra que si  $G$  es un conjunto convexo compacto de  $\mathcal{L}^{p_0}$  que satisface cierta propiedad aproximativa entonces el mejor

aproximante en  $L^p$  de un elemento  $f$  sobre  $G$  converge cuando  $p \rightarrow \infty$  al aproximante estricto de  $f$  sobre  $G$ .

- [1] RICE, J.R., Tchebycheff approximation in a complete metric space. Bull. Amer. Math. Soc., 68(1962), pp.405-410.

SERRANO, E.P. y MELAS, D.E. (U.B.A.): *Representación temporal frecuencial a partir de la transformada en ondelettes.*

Ciertas señales pueden considerarse como una sucesión de eventos de corta duración y en un rango definido de frecuencia. Tal es el caso de la música, sismogramas, emisiones acústicas que resultan de métodos no destructivos de análisis de materiales, etc. Dichos eventos determinan una distribución de la energía de la señal en el dominio tiempo-frecuencia y la caracterización de la misma constituye un problema relevante en el análisis de tal clase de señales.

Son bien conocidos los métodos que genéricamente pueden denominarse "Análisis de Fourier locales" así como las limitaciones que presentan, en particular en el caso de señales donde conviven componentes de bajas y altas frecuencias, y estas últimas son de corta duración.

En contrapartida los métodos basados en la Transformada en Ondelettes de reciente desarrollo prometen ser ventajosos.

En esta comunicación se presentan algunas características de una base ortonormal de  $L^2(\mathbb{R})$  de ondelettes y de la transformada discreta asociada, mostrándose las bondades de la representación temporal-frecuencial que de su aplicación resulta.

## ANÁLISIS NUMÉRICO, CÁLCULO COMPUTACIONAL.

CAPUTTI, T. (U.B.A.): *Métodos de direcciones factibles en optimización no diferenciable, II.*

El problema de optimización no diferenciable y las técnicas

para resolverlo juegan un rol central en los estudios actuales en programación matemática.

El propósito de este trabajo es el desarrollo de un método iterativo diseñado para la minimización de funciones objetivo convexas no diferenciables sujetas a un conjunto de restricciones lineales.

Este algoritmo generaliza el método del gradiente reducido de Wolfe en ausencia de la hipótesis de diferenciabilidad.

GONZALEZ, R., SAGASTIZABAL, C. y TIDBALL, M. (U.N.R. y U.N.C.): *Solución Rápida de Ecuaciones de Hamilton-Jacobi-Bellman e Isaacs Discretas.*

En este trabajo presentamos una variedad de algoritmos acelerados para resolver los problemas no lineales de punto fijo originados por discretización de problemas de control óptimo y de juegos diferenciales.

En general es posible solucionar estos problemas resolviendo las inecuaciones variacionales asociadas (de tipo Hamilton-Jacobi-Bellman o Isaacs). Cuando se aplican los métodos de elementos finitos o de diferencias finitas para resolver estas inecuaciones aproximadamente, se obtienen inecuaciones variacionales discretas cuya solución se logra hallando el punto fijo de un operador no lineal contractivo. La solución de este problema de punto fijo es hallada frecuentemente por un procedimiento iterativo que puede converger muy lentamente cuando el factor de contracción es muy cercano a 1. Los algoritmos de aceleración propuestos están basados en la resolución de los sistemas lineales de ecuaciones que aparecen implícitamente en la definición del operador contractivo; en los programas de cómputo desarrollados hemos aplicado los métodos de gradientes conjugados para solucionar estos sistemas.

Demostramos que los algoritmos acelerados aquí presentados convergen en un número finito de pasos a la solución exacta del problema discretizado. La demostración se basa en las propiedades de monotonía del operador asociado a los problemas de



control y en el uso de un sistema especial de inequaciones cuasivariacionales en el caso de juegos diferenciales. Se presentan variadas reglas de detención del lazo interno del cómputo de los algoritmos, que permiten garantizar la convergencia de este tipo de procedimientos de aceleración bajo condiciones muy generales.

NIELL, A.M. (U.N.C.): *Notas sobre un método para la aproximación simultánea de las raíces de un polinomio.*

Un método numérico sumamente eficaz para la aproximación simultánea de todas las raíces de un polinomio, desarrollado originalmente por Prešić y Petrić, ha sido recientemente presentado y analizado por Hopkins, Marshall, Schmidt y Zlobec, quienes lo denominan "Método PP".

En la presente comunicación se incluyen varios avances sobre el contenido del trabajo precitado: 1) Se simplifica la demostración de una importante propiedad del método (a saber, que después de la primera iteración la suma de las aproximaciones es igual a la suma de las raíces); 2) Se mejora el análisis de convergencia local, ampliando la tolerancia para la aproximación inicial; 3) Se propone una modificación del método que mejora sustancialmente la convergencia.

SMITH, J.E. (U.N.C.): *Suavización de datos con splines.*

Datos: 1) un intervalo  $(a, b)$ , y  $n$  abscisas  $\{x(i)\}$  en  $(a, b)$ .  
 2) Un paralelepípedo  $R$ , de  $m$  aristas  $[c(j), d(j)]$ ,  $j = 1, m$ .  
 3) Los  $n$  valores  $F(x(i))$  de una función real  $F$  y, en algunos casos, las derivadas derecha en  $x(1)$  e izquierda en  $x(n)$ , de  $F$  respecto de  $x$ , ordenados en un vector  $G$  de dimensión  $m$ . Según haya o no derivadas en los bordes,  $m$  vale  $n+2$  o  $n$ . Las componentes de  $G$  están afectadas de errores; el valor verdadero debe satisfacer las restricciones impuestas por  $R$ :

$$G \subset R \Rightarrow c(j) \leq G(j) \leq d(j) \quad j = 1, m$$

Problema. Elegida la clase  $Z$  de las funciones spline aproxi-

mantes  $S$ , se construye, para cada una, el vector  $V$ , análogo al  $G$  construido para  $F$ .  $S$  es admisible si  $V \subset R$ . Con un funcional  $J$  definir la "suavidad" de  $S$  y optimizar  $J$  en  $R$ .

Solución propuesta. Sea  $D(i)$  la discontinuidad de la primera derivada discontinua de  $S$  en  $x(i)$ ,  $D$  el vector  $\{D(i)\}$ .

Si  $Q$  es la matriz  $n \times m$ , tal que  $D = QV$ ,  $J$  es el funcional

$$J(V) = \langle QV, QV \rangle = \langle Q'QV, V \rangle = \langle D, D \rangle$$

La matriz  $Q'Q$  es semi definida positiva (mal condicionada).

La solución es única cuando  $R$  y  $K(Q)$  no se intersecan.

En caso contrario, conviene usar otras técnicas.

El método de optimización es el de gradiente conjugado con restricciones, y la implementación no usa  $Q'Q$ .

Se obtuvieron las matrices  $Q$  de splines poligonales y cúbicas para los casos periódico (sin derivadas) y no periódico.

Se dispone de programas operativos y ejemplos de aplicación.

DIAZ LOZANO de MACIAS, M.E. (U.N.S.E.): *La inversa de Moore-Penrose: una caracterización y el algoritmo asociado para su obtención.*

Se muestra la pertenencia de la inversa de Moore-Penrose (o pseudoinversa)  $A^+$  de una matriz real  $A$  dada, a una familia de matrices que está en correspondencia biyectiva con el conjunto de espacios complementarios del espacio columna de  $A$  y se prueba que  $A^+$  es la matriz que corresponde al complemento ortogonal de dicho espacio. Desde esta perspectiva, se determina un procedimiento alternativo para el cálculo de la pseudo-inversa.

GUTIERREZ, R.H., LAURA, P.A.A. y ROSSI, R.E. (U.T.N., IMA-CONICET, U.N.S.): *Optimización de autovalores en problemas formulados mediante ecuaciones integrales.*

Un trabajo reciente de C.W.Bert ha mostrado diferentes apli-

caciones de la optimización de Rayleigh en problemas de autovalores tratados con los métodos clásicos de Ritz y de Galerkin. En la presente comunicación se utiliza el concepto de optimización de Rayleigh, combinado con el método de Ritz de determinación del menor autovalor de ecuaciones integrales, en algunos problemas relativos a sistemas vibrantes. En lugar de usar funciones coordinadas específicas con coeficientes indeterminados, en tales funciones se utiliza un término potencial cuyo exponente se deja indeterminado. Puesto que las aproximaciones obtenidas son cotas superiores, minimizando con respecto al exponente mencionado, se mejora sensiblemente la aproximación al coeficiente de frecuencia buscado en cada caso. Asimismo, se muestran comparaciones con cotas inferiores obtenidas con el método de las trazas, con cotas superiores obtenidas empleando una base ortogonal del espacio  $L_2(0,1)$  y con valores obtenidos mediante el método de elementos finitos.

\* LAURA, P.A.A. y CORTINEZ, V.H. (IMA-CONICET, U.N.S.): *Análisis de placas vibrantes mediante el método de Kantorovich optimizado.*

El "método de reducción a ecuaciones diferenciales" (método de Kantorovich) ocupa una posición intermedia, desde el punto de vista de la precisión obtenida, entre la solución exacta de un problema dado y la solución aproximada generada mediante la aplicación del método de Ritz o de Galerkin. Tal como explican Kantorovich y Krylov en su clásico tratado... "la ventaja del método consiste en que sólo parte de la solución es escogida "a priori" mientras que el resto de la solución es determinada de acuerdo con el carácter del problema". La precisión del método de Kantorovich puede ser mejorada si se incluye un parámetro exponencial de optimización " $\gamma$ " en la parte de la expresión que es escogida "a priori". Dado que el método de Kantorovich permite obtener cotas superiores en el caso de problemas de autovalores, minimizando a éstos con respecto a " $\gamma$ " es posible optimizar a los autovalores en cuestión. En esta comunicación se resuelven diversos problemas de placas o losas vibrantes de espesor variable mediante la meto-

dología propuesta, comparándose las frecuencias naturales obtenidas con valores determinados por otros métodos. Se obtiene muy buena concordancia en todos los casos.

TARAZAGA, P. (U.N.S.L.): *Cotas para autovalores de matrices simétricas.*

En este trabajo es tomada en cuenta la estructura geométrica del subespacio de matrices simétricas, especialmente su localización respecto de la identidad para obtener cotas inferiores y superiores para los autovalores de dichas matrices.

Estas cotas están dadas en función de la traza de la matriz y su norma de Frobenius y son las mejores que se pueden obtener usando sólo esta información.

Otras propiedades de los autovalores de una matriz son estudiados sobre la base de su localización geométrica.

#### ECUACIONES PARABOLICAS.

BENILAN, P. (Univ. Besançon) y BOUILLET, J.E. (U.B.A.): *An equation of diffusion type whose singularities depend on the sign of the solution.*

For the problem  $u_t = \alpha(u)_{xx}$ ,  $t > 0$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ;  $\|u(x,t) - u_0(x)\|_{L^1(\mathbb{R})} \rightarrow 0$ ,  $t \rightarrow 0^+$ , where  $\alpha(r) = r^n$ ,  $r > 0$

$$= r |r|^{m-1}, \quad r \leq 0, \quad n \leq 1 < m,$$

and the initial profile  $u_0(x)$  satisfies

$$u_0 \in C_0(\mathbb{R}), \quad F_0^+ = \text{support } u_0^+ \neq \emptyset,$$

$$\inf F_0^+ < \inf F_0^-, \quad \sup F_0^+ < \sup F_0^- < \infty,$$

we prove the following precise behaviour of the solution  $u(x,t)$  for large  $t$  (cf. [1]):

**THEOREM.** There exists a unique  $u \in C([0, \infty); L^1(\mathbb{R})) \cap C$  solving the equation in  $D'((0, \infty) \times \mathbb{R})$ .

Let  $v_t = v_{xx}^m$ ,  $v(0,x) = u_0^-(x)$ .

(i)  $u \geq -v$ , and  $u(t,x) > 0$  for  $x < \inf \text{support } v(t, \cdot)$ ,  $t > 0$ ;

(ii)  $0 < T \leq \infty$  such that

if  $t \in (0, T)$ ,  $F_+(t) := \text{support } u^+(t, \cdot) \neq \emptyset$ , and

$\sup F_+(t) < \sup F_-(t) \leq \sup \text{support } v(t)$ , and

if  $t \in (T, \infty)$ ,  $u(t,x) > 0$ , all  $x \in \mathbb{R}$ ;

(iii)  $T < +\infty$  if and only if  $\int u_0 dx > 0$ , and if

$$M \leq 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} t^{\frac{1}{m+1}} \int u^+ dx = 0.$$

[1] BOUILLET, J.E., Evolución bajo  $u_t = \alpha(u)_{xx}$  de perturbaciones compactas del estado  $u = \text{constante}$ , Comm. XXXVII Reunión Anual UMA, B. Blanca, Sep. 1987.

KORTEN, M.K. (U.B.A.): Existencia de trazas de soluciones débiles no negativas de  $u_t = \Delta(u-1)_+$ .

TEOREMA. Sea  $0 \leq u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n \times (0, T))$  solución débil en  $\mathbb{R}^n \times (0, T)$  de la ecuación  $u_t = \Delta(u-1)_+$ , i.e.,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{(t_1, t_2)} [(u-1)_+ \Delta \phi + u \phi_t] dx dt = \int_{\mathbb{R}^n} u \phi|_{t=t_2} dx - \int_{\mathbb{R}^n} u \phi|_{t=t_1} dx$$

para todos los  $0 < t_1 < t_2 < T$  y  $\phi \in C^\infty$ ,  $\text{sop } \phi(\cdot, t)$  compacto para cada  $t$  y tal que cumpla que

$$\sup_{t \in (0, T)} \sup_{R > r} \frac{1}{R^n} \int u(x, t) \psi(x/R) e^{-c|x|^2} dx < \infty \text{ para cierto}$$

$c > 0$ , con  $\psi \in C_0^\infty$  una función de truncación,  $r > 0$  fijo.

Entonces existe una única medida de Borel positiva  $\mu$  que es traza de  $u(x, t)$ , es decir

$$\lim_{t \downarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} u(x, t) \phi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) d\mu(x), \text{ para toda } \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Además,  $\mu$  satisface la condición (de crecimiento en el infini

to)

$$\sup_{R \geq r} \frac{1}{R^n} \int e^{-c|x|^2} \phi(x/R) d\mu(x) < \infty.$$

MENALDI, J.L. (Wayne State University, USA) y TARZIA, D.A. (PROMAR, U.N.R.): *Una generalización de la solución de Lamé-Clapeyron para el problema de Stefan a una fase con una fuente de energía.*

Es bien conocida la clásica solución de Lamé-Clapeyron para el problema de Stefan a una fase correspondiente a un material semi-infinito con coeficientes térmicos constantes. Se generaliza esta solución para el caso en que se considere un término particular como fuente o sumidero de calor, es decir, se considera el siguiente problema de frontera libre:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho c \theta_t - k \theta_{xx} = \frac{\rho \ell}{t} \beta\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right), \quad 0 < x < s(t), \quad t > 0, \\ \theta(0, t) = B > 0, \quad t > 0 \\ s(0) = 0, \\ \theta(s(t), t) = 0, \quad k \theta_x(s(t), t) = -\rho \ell s(t), \quad t > 0, \end{array} \right.$$

para una temperatura  $B > 0$  en el borde fijo  $x = 0$  y coeficientes térmicos constantes  $k, \rho, c, \ell > 0$  ( $a = \sqrt{\frac{k}{\rho c}}$ ).

La solución está dada por

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta(x, t) = B \left\{ 1 - \frac{\sqrt{\pi}}{\text{Ste}} \xi e^{\xi^2} \text{erf}(\eta) + \frac{4}{\text{Ste}} \int_0^\eta \int_r^\xi \beta(y) e^{y^2} dy \right\} e^{-r^2} dr, \\ s(t) = 2a\xi\sqrt{t}, \quad \eta = \frac{x}{2a\sqrt{t}} \in (0, \xi), \end{array} \right.$$

donde el número  $\xi > 0$  es solución de la ecuación

$$x e^{x^2} \text{erf}(x) - 2 \int_0^x e^{r^2} \text{erf}(r) \beta(r) dr = \frac{\text{Ste}}{\sqrt{\pi}}, \quad x > 0,$$

siendo  $\text{Ste} = \frac{Bc}{\ell} > 0$ .

Se estudian las condiciones necesarias y suficientes para la

función  $\beta = \beta(\eta)$  para la existencia de una única solución del problema de frontera libre correspondiente.

Se estudia el problema para  $Ste \ll 1$ , el cual está caracterizado por la solución cuasi-estacionaria cuando la función  $\beta$  es constante y verifica  $\beta(\eta) \equiv \beta(0) < 1$ .

Se dan asimismo estimaciones para la temperatura y la frontera libre.

MARANGUNIC, P.R. y STAMPELLA, M.B. (PROMAR, U.N.R.): *Aparición de zonas pastosas en un problema de Stefan con calor específico despreciable.*

Se estudia un problema de Stefan suponiendo despreciable la capacidad calorífica, para el caso tridimensional con los tres tipos usuales de simetría (plana, cilíndrica, esférica). El objetivo es analizar si una zona pastosa puede aparecer sin estar ya presente en el instante inicial.

En un trabajo reciente A. Fasano y M. Primicerio probaron para el caso unidimensional el siguiente resultado: si la temperatura en la frontera y la de fusión se suponen constantes, no puede haber nacimiento de una zona pastosa, *ni siquiera en presencia de una fuente de calor constante.*

En la presente comunicación se admite que la temperatura en el borde pueda ser una función del tiempo  $\phi(t)$ . Haciendo un tratamiento unificado de las tres simetrías, se obtiene que la proposición antedicha sigue siendo válida si  $\phi$  es constante, pero no lo es en general en el caso contrario. En tal sentido se exhibe un apropiado ejemplo y se encuentra una clase de funciones para las cuales, eligiendo adecuadamente la posición inicial de la frontera libre, aparece a posteriori una zona pastosa.

TARZIA, D.A. (PROMAR, U.N.R.) y VILLA, L.T. (INIQUI, U.N.Sa.): *Problemas de conducción de calor con una fuente con retardo en el tiempo.*

Se analizan problemas de valor inicial y de contorno con un su midero o fuente de energía para la ecuación del calor unidimensional en el intervalo  $(0,1)$  y  $(0,\infty)$ .

La fuente es uniforme en la variable espacial y depende del flujo del calor en el borde  $x=0$  del material con un retardo  $\delta > 0$  en la variable tiempo.

Se obtienen estimaciones de la distribución de temperatura en función del parámetro  $\delta$  y de su comportamiento cuando  $\delta \rightarrow 0^+$ .

#### REFERENCIAS

- [Ca] CANNON, J.R., The one-dimensional heat equations, Addison-Wesley (1984).
- [TaVi] TARZIA, D.A.-VILLA, L.T., Remarks on some nonlinear initial boundary value problems in heat conduction, Rev.Unión Mat. Arg., to appear.
- [Vi] VILLA, L.T., Problemas de control para una ecuación unidimensional no homogénea del calor, Rev.Unión Mat.Arg., 32 (1986), 163-169.

#### ECUACIONES ELIPTICAS.

GARGUICHEVICH, G.G. y TARZIA, D.A. (PROMAR, U.N.R.): *El problema estacionario de Stefan a dos fases con energía interna.*

Se considera un problema de conducción de calor estacionario en un dominio  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  con frontera regular  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$  (disjuntos) con una fuente de energía interna  $g$  y condiciones de contorno de tipo mixto:

$$-\Delta u = g \quad \text{en } \Omega, \quad u|_{\Gamma_1} = B > 0, \quad -\frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma_2} = q.$$

Completando lo comunicado en [2] se obtiene que:

- 1) El flujo de calor crítico  $q_c(B, g)$  (el material presenta una sola sola fase o la temperatura  $u = u_g$  es de signo cte. si y sólo si  $q < q_c(B, g)$ ) es una función no creciente de  $B$ ,



de  $g$  y también del dominio  $\Omega$  de acuerdo a una relación de orden entre los dominios que tienen a  $\Gamma_2$  como parte común de sus fronteras.

- 2) Se define un estimador inferior y uno superior para  $q_c(B, g)$  utilizando principios de máximo.
- 3) En cada uno de los tres problemas de optimización del flujo con restricciones sobre la temperatura:
  - a)  $\text{Máx}_{u \geq 0} \int_{\Gamma_2} q \, d\gamma$  , b)  $\text{Máx}_{u \geq 0} q$  y c)  $\text{Máx}_{u \geq 0} q$  , para  $q^*$  dado,  $q = Q \cdot q^*$

la solución existe, es única y se calcula en forma explícita. Además en el caso a) los multiplicadores de Lagrange asociados (que se obtienen empleando la técnica de optimización de funcionales convexos en espacios de Banach) resultan independientes de la fuente de energía  $g$ .

Los resultados 1) y 2) generalizan los obtenidos en [1] y 3) los de [3] para el caso  $g=0$ .

#### REFERENCIAS

- [1] BOUILLET, J.E.-SHILLOR, M.-TARZIA, D.A., Critical outflow for steady-state Stefan problem. Aparecerá en "Applicable Analysis".
- [2] GARGUICHEVICH, G.G.-TARZIA, D.A., Comunicación a la XXXVIII Reunión Anual de la UMA, San Juan, 1988.
- [3] GONZALEZ, R.L.V.-TARZIA, D.A., Optimization of heat flux in domains with temperature constraints. Aparecerá en J. Optimiz. Th. Appl.

TARZIA, D.A. (PROMAR, U.N.R.): *Un doble problema de frontera libre: el caso estacionario del problema de Stefan a dos fases con condiciones mixtas y con una pared semi-permeable.*

Se considera un problema de conducción de calor estacionario en un dominio  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  con frontera regular  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ . Se asume que la temperatura de cambio de fase es  $0^\circ\text{C}$ . Sobre la porción de frontera  $\Gamma_2$  se tiene un flujo de calor (saliente)  $q > 0$ . La porción de frontera  $\Gamma_1$  restante, que se encuentra

en contacto térmico con el exterior a una temperatura  $b > 0$ , está compuesta de dos partes  $\Gamma_1 = \Gamma_{1_t} \cup \Gamma_{1_s}$ , siendo  $\Gamma_{1_s}$  una pared *semi-permeable* (cuerpo negro), es decir una pared que deja entrar calor pero impide su salida [DuLi].

Se plantea el problema en ecuaciones a derivadas parciales de tipo elíptico con condiciones de contorno mixtas y con la posibilidad de la presencia de dos fronteras libres: la de cambio de fase (en el interior de  $\Omega$ ) y la que separa en  $\Gamma_{1_s}$  los conjuntos  $\{\theta > b\}$  y  $\{\theta = b\}$ .

Si se realiza un cambio de función incógnita se transforma al problema en una inecuación variacional elíptica. Se estudian relaciones entre los datos constantes  $q, b > 0$  para que la solución de la inecuación variacional anterior sea de signo no constante en  $\Omega$ , es decir, se tenga un caso estacionario a dos fases con una pared semi-permeable.

Para el caso particular  $\Gamma_{1_s} = \emptyset$  (vacío), el problema se reduce al estudiado en [Ta].

[DuLi] DUVAUT, G.-LIONS, J.L., *Les inéquations en mécanique et en physique*, Dunod (1972).

[Ta] TARZIA, D.A., *An inequality for the constant heat flux to obtain a steady-state two-phase Stefan problem*, Eng. Anal., 5(1988), 177-181.

SALINAS, O.M. (PEMA-INTEC, U.N.L.): *Desigualdad de Harnack y función de Green para operadores elípticos degenerados*.

Consideramos el operador

$$Lu = - \sum_{i,j=1}^n D_i (a_{ij} D_j u)$$

donde la matriz  $A = [a_{ij}]$  es simétrica y verifica

$$0 \leq v(x) \sum_{i=1}^n \lambda_i^2(x) \xi_i^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \leq w(x) \sum_{i=1}^n \lambda_i^2(x) \xi_i^2$$

en c.t.p. de un conjunto abierto y acotado  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  y para todo  $\xi \in \mathbb{R}^n$ . Las funciones  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  son tales que permiten cons-

truir un espacio de tipo homogéneo que se asocia de manera natural a  $L$ .

En este trabajo se prueba, bajo condiciones de tipo Sawyer sobre  $(v,w)$  en dicho espacio, una desigualdad de Harnack no uniforme y estimaciones interiores de la función de Green correspondiente a  $L$ .

Estos resultados generalizan, entre otros, los obtenidos por Chanillo y Wheeden.

LAMI DOZO, E.J. y MARIANI, M.C. (U.B.A., CONICET): *Problema de Neumann para H-superficies.*

Sean  $B = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2; u^2+v^2 < 1\}$  el disco unidad y  $H: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua y acotada. Consideremos el siguiente problema de contorno: Dada  $f: \partial B \rightarrow \mathbb{R}^3$ , hallar  $X: \bar{B} \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que

$$(1) \quad \Delta X = H(X) X_u \wedge X_v \quad \text{en } B$$

$$(2) \quad \frac{\partial X}{\partial n} = f \quad \text{sobre } \partial B$$

donde  $\wedge$  denota el producto vectorial en  $\mathbb{R}^3$  y  $n$  la normal exterior a  $\partial B$ .

Llamamos a (1)-(2) el problema de Neumann para el sistema de H-superficies. En el caso de que las coordenadas  $(u,v)$  sean isotermas, o sea  $|X_u| = |X_v|$  y  $X_u \cdot X_v = 0$ , cada solución define una superficie de curvatura media  $H(X(u,v))$  en el punto  $X(u,v)$ . (1) es la ecuación de Euler-Lagrange de la funcional

$$D_H(Y) = D(Y) + \frac{2}{3} \int_B Q(Y) \cdot Y_u \wedge Y_v \, du \, dv$$

donde

$$D(Y) = \frac{1}{2} \int_B |\nabla Y|^2 \quad \text{es la integral de Dirichlet,}$$

$$Q(\xi) = \left( \int_0^{\xi_1} H(s, \xi_2, \xi_3) ds, \int_0^{\xi_2} H(\xi_1, s, \xi_3) ds, \int_0^{\xi_3} H(\xi_1, \xi_2, s) ds \right)$$

Damos condiciones necesarias, demostramos que si  $f=0$  las soluciones son  $X \equiv \text{cte.}$  y definimos una solución débil que hallamos por minimización sobre un convexo de un espacio de Ba-

nach asociado al problema.

BURACHIK, R. y MAESTRIPIERI, A. (U.B.A.): *Sobre el autovalor principal del problema de Neumann con peso.*

Consideramos el problema de autovalores con peso con la condición de contorno de Neumann

$$(1) \quad \begin{cases} \mathcal{L}u = \lambda m u & \text{en } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

donde el recinto  $\Omega$  es un abierto acotado de  $\mathbb{R}^N$  con frontera  $\partial\Omega$  suave. El peso  $m \in C(\bar{\Omega})$  y  $\mathcal{L} = -a_{ij}(x) \partial_{ij} + a_j \partial_j$  es a coeficientes  $C^\theta(\bar{\Omega})$ ,  $a_{ij} = a_{ji}$  y  $(a_{ij})_{ij}$  uniformemente elíptico en  $\bar{\Omega}$ .  $u \equiv 1$  es una autofunción positiva de autovalor 0. Hess y Senn [H-S] han demostrado que existe otra autofunción positiva si y sólo si  $m$  cambia de signo y  $\int_{\Omega} m\psi \neq 0$ , y que no hay otra de signo constante linealmente independiente. Si

$\int_{\Omega} m\psi \, dx < 0$  el autovalor asociado a  $u_1$  es positivo y todo otro autovalor complejo  $\lambda$  no está en la banda  $0 < \text{Re}\lambda < \lambda_1$ . Hemos obtenido resultados más precisos inspirados en [G-L].

Una función  $w \in C^3(\bar{\Omega})$  tal que  $w > 0$  en  $\bar{\Omega}$ ,  $\frac{\partial w}{\partial n} = 0$  sobre  $\partial\Omega$ ,  $\mathcal{L}w \geq 0$  sobre  $\partial\Omega$  y  $\mathcal{L}w \geq 0$  en  $\text{int} \{m = 0\}$  es llamada *función admisible*. Notaremos

$$\rho_-(w) = \sup_{\{m < 0\}} \frac{\mathcal{L}w}{mw} \quad \rho_+(w) = \inf_{\{m > 0\}} \frac{\mathcal{L}w}{mw}$$

El resultado principal viene dado por el

TEOREMA 1. Sea  $w$  una función admisible tal que  $\rho_-(w) \leq \rho_+(w)$ . Entonces la banda  $\rho_-(w) \leq \text{Re}\lambda \leq \rho_+(w)$  no contiene autovalores, a menos que  $w$  sea un múltiplo positivo de  $u \equiv 1$  ó  $u_1$ .

Como consecuencia de este último teorema tenemos:

TEOREMA 2. Supongamos  $\int_{\Omega} m\psi \neq 0$  y  $w$  una función admisible no

constante, tal que  $\rho_-(w) \leq \lambda_1$ . Donde  $\lambda_1$  es el único autovalor no nulo con autofunción positiva  $u_1$  de (1). Entonces  $\rho_+(w) < \lambda_1$ , a menos que  $w$  sea un múltiplo positivo de  $u_1$ .

TEOREMA 3. Sea  $\int_{\Omega} m\psi \neq 0$ , entonces en la recta vertical  $\text{Re}(z) = \lambda_1$ , y en la recta  $\text{Re}(z) = 0$ , no hay otros autovalores de (1).

TEOREMA 4. Si  $\int_{\Omega} m\psi < 0$ , entonces  $\lambda_1 = \sup \{ \rho_+(w)/w \text{ admisible y } \rho_-(w) < \lambda_1 \}$ .

#### REFERENCIAS

- [G-L] GOSSEZ, J.P. & LAMI DOZO, E., On the principal Eigenvalue of a Second Order Linear Elliptic Problem. Arch. for Mech. and Anal. 89, 169-175 (1985).
- [H-S] HESS, P. & SENN, S., On positive Solutions of a Linear Elliptic Eigenvalue Problem, Math. Annalen 258, 459-470 (1982).

#### ANÁLISIS REAL, ANÁLISIS ARMÓNICO, CONVEXIDAD.

AIMAR, H. y FORZANI, L. (PEMA-INTEC, U.N.L.): *Acotación de operadores máximos inducidos por el semigrupo de Ornstein-Uhlenbeck.*

En [1] y [2] se demuestra, a partir de un lema de Natanson, que el operador máximo

$$P^*f(y) = \sup_{0 \leq r \leq 1} |P_r f(y)|$$

del semigrupo de Ornstein-Uhlenbeck

$$P_r f(y) = \frac{1}{\pi(1-r^2)} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{|z-ry|^2}{1-r^2}} f(z) dz$$

es acotado como operador en  $L^p(e^{-x^2} dx)$ .

En este trabajo investigamos las propiedades de acotación y

tipo débil con pesos de operadores maximales similares a  $P^*$  procurando una extensión de clases  $A_p$  de Muckenhoupt a este contexto.

- [1] CALDERON, C.P., Some remarks on the multiple Weierstrass transform and Abel summability of multiple Fourier-Hermite series, *Studia Math.*, Vol.32 (1969), p.119-148.
- [2] MUCKENHOUP, B., Poisson integrals for Hermite and Laguerre expansions, *Trans.Amer.Math.Soc.* 139 (1969), 231-242.

SAAL, L. y URCIUOLO, M. (U.N.C.): *Integrales singulares soportadas en la imagen de una función analítica.*

Sea  $\{d_r\}$  un grupo de dilataciones en  $R^m$ ,  $\|\cdot\|$  una norma homogénea asociada a  $d_r$  y  $B$  la correspondiente bola unitaria. Sea  $g: BCR^m \rightarrow R^n$  una función analítica cuya imagen genera  $R^n$ ,  $g(0) = 0$ , y  $k \in C^\infty(R^m - \{0\})$ , homogénea de grado crítico, tal que  $\int_{\Sigma} k(t) dt = 0$ . Entonces el operador

$Tf(x) = v.p \int_B f(x-g(t))k(t) dt$  es acotado en  $L^p(R^n)$ ,  $1 < p < \infty$ .

El resultado vale reemplazando  $k$  por núcleos más generales y  $R^n$  por un grupo de Lie nilpotente, simplemente conexo. También vale quitando la hipótesis de analiticidad de  $g$  en cero pero manteniendo la condición de que  $g$  sea "aproximadamente homogénea".

HARBOURE, E. (PEMA-INTEC, U.N.L.), TORREA, J.L. (Univ. Aut. de Madrid) y VIVIANI, B. (PEMA-INTEC, U.N.L.): *Un nuevo enfoque para el estudio de los espacios tienda.*

Estos espacios fueron introducidos por Coifman, Meyer y Stein en conexión con el estudio de diversos problemas del Análisis de Fourier. En este trabajo se demuestra que estos espacios, denotados  $T_q^p$ , pueden ser vistos como subespacios complementados de los espacios de Lebesgue a valores vectoriales,  $L_{L^q}^p$ , respecto a medidas apropiadas.

Se obtienen resultados de dualidad e interpolación y se dan condiciones suficientes para que un operador sea acotado en estos espacios.

FORTE CUNTO, A.M. y TORANZOS, F.A. (U.B.A.): *Continuidad de la función de visibilidad en  $R^n$* .

En comunicaciones anteriores a la U.M.A. (Forte Cunto, 1985 y 1986) se caracterizó la continuidad de la función de visibilidad de G. Beer en el plano. Estudiamos aquí la relación entre las nociones de "visibilidad clara" (Stavrakas, 1973) y "rayos salientes" (Toranzos, 1988). Como subproducto se analiza la generalización a  $R^n$  de los teoremas del plano que mencionamos más arriba. Hasta el momento de enviar este resumen se ha obtenido una condición suficiente para la continuidad de dicha función, más lemas previos que tienden a demostrar la caracterización completa de los puntos de continuidad.

BRESSAN, J.C. (U.B.A.): *Subespacios de convexidad*.

El concepto de subespacio de convexidad puede introducirse en forma análoga al de subespacio topológico. El objeto de la presente comunicación es definir y dar algunas propiedades de éstos que se deduzcan de las del espacio de convexidad del que forman parte. Según las condiciones que cumpla el subconjunto, se estudian las propiedades del espacio que siguen valiéndolo en el subespacio de convexidad generado y se dan contraejemplos de aquéllas que no son heredadas por el subespacio. Algunas de las propiedades estudiadas son: i)  $T_1$ , ii) dominio finito (DF), iii) Carathéodory, iv) familia cobertora de convexos maximales (MC), v) convexidad definida por segmentos (S), vi) idempotencia del mirador (I), vii) Brunn, viii) conmutatividad entre la cápsula convexa y el "join" (JHC), ix) Toranzos, x) Radon, xi) Helly, xii) Kakutani.

La presente comunicación es continuación de otras presentadas por el autor en las Reuniones Anuales de la U.M.A. de 1987 y 1988.

HANSEN, G.L. (U.B.A.): *Sobre el teorema de Minkowski (o Krein Milman en dimensión finita).*

Se aplican los conceptos de imagen esférica, rayos fronterizos y rayos extremales para obtener extensiones del teorema clásico de Minkowski de representación de conjuntos convexos compactos en  $E^n$  como cápsula convexa del conjunto de sus puntos extremales. En particular se obtiene una caracterización de los conjuntos que pueden ser representados en esta forma.

Los resultados fundamentales son:

TEOREMA. Sea  $A$  un convexo cerrado no vacío en  $E^n$ . Si

- (a) La imagen esférica de  $A$  es abierta en la esfera unitaria  
o (b)  $A$  no contiene rayos fronterizos entonces  $A = \text{conv ext } A$ .

TEOREMA. Sea  $A$  un convexo cerrado no vacío en  $E^n$ . Entonces  $A = \text{conv ext } A$  si y sólo si  $A$  no contiene rayos extremales ni rectas.

#### ANÁLISIS FUNCIONAL, TEORÍA DE OPERADORES.

\*\* BENEDEK, A. y PANZONE, R. (U.N.S.): *Espacios de funciones diferenciables.*

Sea  $\Omega$  un dominio acotado de contorno  $C^\infty$  y sean  $1 \leq p < \infty$ ,

$r < s$ , enteros positivos. El espacio  $W_{r,s}^p(\Omega) :=$

$W_0^{r,p}(\Omega) \cap W^{s,p}(\Omega)$  coincide con la clausura en  $W^{s,p}(\Omega)$  de la

familia  $D_r(\Omega) := \{\phi \in C^\infty(\bar{\Omega}); D^\alpha \phi = 0 \text{ en } \partial\Omega, |\alpha| < r\}$ ,

y es el subespacio de  $W^{s,p}(\Omega)$  formado por las funciones que

verifican  $D^\alpha f = 0$  c.d. en  $\partial\Omega$ ,  $|\alpha| < r$ .

AGUIRRE TELLEZ, M. (U.N.C.P.B.A.) y TRIONE, S.E. (U.B.A.): *The distributional Hankel transform of  $\delta^{(k)}(m^2+p)$ .*



En esta nota damos sentido a ciertas clases de transformadas de Hankel de distribuciones de la medida de Dirac  $\delta^{(k)}(m^2+P)$ , donde  $m$  es un número real positivo y  $P$  es la forma cuadrática no degenerada en  $n$  variables dada por

$$P = P(x) = x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_{p+q}^2,$$

donde  $p+q = n$  ( $n$  dimensión del espacio).

Un interesante resultado es la fórmula siguiente:

$$\delta^{(k)}(m^2+P) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(m^2)^{\nu}}{\nu!} \delta^{(k+\nu)}(P), \quad \text{si } P \geq m^2.$$

Otro teorema probado es la validez de la fórmula de intercambio de la convolución con el producto, a saber

$$\mathcal{H}\{\delta^{(k)}(m^2+P) * \delta^{(\ell)}(m^2+P)\} = \mathcal{H}\{\delta^{(k)}(m^2+P)\} \cdot \mathcal{H}\{\delta^{(\ell)}(m^2+P)\}.$$

\*\* PANZONE, P.A. (U.N.S.): *Producto de distribuciones.*

TEOREMA. Valen los siguientes productos:

$$a) \quad x_+^{-r-\frac{1}{2}} \cdot x_-^{-r-\frac{1}{2}} = \frac{(-1)^r \cdot \pi}{(2r)! \cdot 2} \cdot \delta^{(2r)} \quad \text{si } r = 1, 2, 3, \dots$$

$$b) \quad x_+^{r-p} \cdot x_-^{p-r-1} = \frac{(-1)^r \cdot \pi}{\text{sen}(\pi p) \cdot 2} \cdot \delta \quad \text{si } r \text{ es entero, } 0 \leq \text{Re } p < 1, \\ p \neq 0$$

$$c) \quad x_+^{\lambda} \cdot x_-^{\mu} = 0 \quad \text{si } \text{Re}(\lambda+\mu) > -1, \text{ con } \lambda, \mu \in \mathbb{C}$$

d) No existe el producto  $x_+^{\lambda} \cdot x_-^{\mu}$  fuera de los casos enunciados.

CERUTTI, R.A. (U.N.Nordeste): *Productos de distribuciones.*

Se extienden los productos multiplicativos de distribuciones unidimensionales debidos a B.Fisher a cierto tipo de distribuciones  $n$ -dimensionales llamadas causales (anticausales):

las distribuciones  $(m^2+P \pm i0)^{\lambda}$ ;  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,  $m \in \mathbb{R}$ , donde

$P = x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_{p+q}^2$ ;  $p+q = n$ ,  $n =$  dimensión del espacio.

Algunos resultados obtenidos son los siguientes:

$$\begin{aligned} \text{a) } & (-1)^s (m^2+P)_-^{-r+1/2} (m^2+P)^{-s} + \frac{(-1)^r}{(s-1)!} \pi (m^2+P)_+^{-r+1/2} \cdot \delta^{(s-1)}(m^2+P) = \\ & = (m^2+P)_-^{-r-s+1/2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } & (m^2+P)_+^{-r+1/2} (m^2+P)^{-s} - \frac{(-1)^{r+s}}{(s-1)!} \pi (m^2+P)_-^{-r+1/2} \cdot \delta^{(s-1)}(m^2+P) = \\ & = (m^2+P)_+^{-r-s+1/2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } & 2(m^2+P)^{-r} \cdot [(m^2+P)^{-s} \ln |m^2+P|] + \frac{(-1)^r \cdot \pi^2}{(r-1)!} \cdot [\operatorname{sgn}(m^2+P) \cdot (m^2+P)^{-s}] \cdot \\ & \cdot \delta^{(r-1)}(m^2+P) = 2(m^2+P)^{-r-s} \cdot \ln |m^2+P|. \end{aligned}$$

cuando  $m=0$ , los resultados fueron obtenidos con distintas condiciones por S.E. Trione (Distributional multiplicative products, Trabajos de Matemática N°22, IAM-CONICET).

GUICHAL, E.N. y PAOLINI, G.B. (U.N.S.): *El espacio de momentos de una sucesión de exponenciales.*

Se considera la sucesión  $\{e^{-\lambda_i t}\}_{i \in \mathbb{N}} \subset L^2(0, T)$ ,  $0 < T \leq \infty$ , donde  $\{\lambda_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  es una sucesión creciente de números reales positivos que verifica:

$$\text{i) } \lambda_i \rightarrow \infty \text{ cuando } i \rightarrow \infty; \quad \sum 1/\lambda_i < \infty$$

$$\text{ii) } \exists \alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 0 \text{ tal que } \lambda_{j+1} - \lambda_j \geq \alpha, \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Se estudia el espacio de momentos de  $\{e^{-\lambda_i t}\}_{i \in \mathbb{N}}$ , es decir, el conjunto de todas aquellas sucesiones numéricas  $\{c_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  para las cuales existe un elemento  $f(t) \in L^2(0, T)$  tal que:

$$(f(t), e^{-\lambda_j t}) = c_j, \quad j \in \mathbb{N}$$

Llamaremos a estos espacios  $M(T)$ , si  $0 < T < \infty$ , y  $M$  en el ca-

so  $T = \infty$ .

En [1], Korobeinik demuestra que se puede definir en  $M(T)$  la norma:

$$\|c\|^2 = \sup_n \sum_{k,l=1}^n c_k \bar{c}_l \sigma_{l,k}^{(n)}$$

donde  $\sigma_{l,k}^{(n)}$ ,  $1 \leq l, k \leq n$  son los elementos de la matriz inversa de la matriz de Gram de  $\{e^{-\lambda i t}\}_{1 \leq i \leq n}$ , con lo cual resulta que  $M(T)$  es un espacio de Banach.

Se demuestran los siguientes resultados:

PROPOSICION. a)  $M(T) \not\subset \ell^2$ , cualquiera sea  $T > 0$ . es decir que  $\{e^{-\lambda i t}\}_{i \in \mathbb{N}}$  constituye una sucesión de Bessel. b)  $M(T) = M$ ,  $\forall T > 0$ . c)  $M$  es denso en  $\ell^2$ , y la inclusión  $i: M \rightarrow \ell^2$  es continua.

#### REFERENCIA

- [1] KOROBAINIK, Ju. F. Mathematics of the USSR - Izvestija - Vo1.13 - N°2, 277-306 (1979).

ANDRUCHOW, E. y STOJANOFF, D. (U.B.A.): *Geometría de Órbitas Unitarias II*.

Se mostró que si un elemento  $b$  de una  $C^*$ -álgebra  $A$  con 1 verifica que  $\dim C^*(b) < \infty$ , entonces la órbita unitaria de  $b$  es una subvariedad  $C^\infty$  de  $A$  y un espacio homogéneo bajo la acción del grupo unitario. Se calculan aquí secciones locales  $C^\infty$  de este fibrado, en términos de una descomposición minimal de  $C^*(b)$ . Se introduce una conexión (llamada de traza cero) que depende sólo de  $b$  y no de la representación de  $C^*(b)$  (es decir, del sistema minimal elegido). Se exhiben las ecuaciones diferenciales de levantamiento horizontal de curvas, de transporte paralelo y geodésicas, en términos del operador "inversa relativa horizontal" de  $\delta_b = d(\pi_b)_1$  (es decir:  $S$  tal que  $S \delta_b S = S$ ,  $\delta_b S \delta_b = \delta_b$  y  $RS = H_1$ ). Dada una sección local  $w$  de  $\pi_b$ , se calcula otra sección local  $s$  con la propiedad de que

$d(s)_b = S$ . Se obtienen con ella nuevas expresiones de los invariantes mencionados, en términos de una descomposición minimal de  $C^*(b)$ .

#### REFERENCIAS

ANDRUCHOW, E., STOJANOFF, D., Geometría de Orbitas Unitarias, Journal of Operator Theory (por aparecer).

ANDRUCHOW, E. y STOJANOFF, D. (U.B.A.): *Nilpotentes en  $C^*$ -álgebras*.

Sea  $A$  una  $C^*$ -álgebra, sea  $a \in A$  un nilpotente de orden  $n$  tal que  $a^* + a^{n-1}$  es inversible. Se demuestra que entonces  $S(a) = \{uau^{-1} : u \in A^{-1}\}$  es subvariedad analítica de  $A$ . Se obtiene además,  $b \in S(a)$  tal que  $b^* + b^{n-1}$  es unitario y se construyen secciones locales de la aplicación  $\pi_b : A^{-1} \rightarrow S(a)$  dada por  $\pi_b(u) = ubu^{-1}$ . Se define la aplicación  $\varphi : S(a) \rightarrow P_n(A)$ , donde  $P_n(A)$  es el conjunto de sistemas de  $n$  proyectores de  $A$ , con la propiedad de que la representación matricial de  $c \in S(a)$  en  $\varphi(c)$  es triangular superior. Se prueba que las secciones anteriores son globales en  $\varphi^{-1}(\varphi(b))$ .

Se define una noción de isomorfismo de rangos de proyectores en  $C^*$ -álgebras, que permite caracterizar los sistemas de proyectores que se levantan a un nilpotente. Con ello se obtienen condiciones para que dos nilpotentes  $a_1, a_2$  que verifican  $a_i^* + a_i^{n-1} \in A^{-1}$ ,  $i = 1, 2$  sean similares.

#### REFERENCIAS

- ANDRUCHOW, E., STOJANOFF, D., Nilpotent Operators and Systems of Projectors, Journal of Operator Theory 20(1988), 359-374.
- ANDRUCHOW, E., STOJANOFF, D., Differentiable Structure of Similarity Orbits, Journal of Operator Theory (en prensa).
- HERRERO, D.A., Approximation of Hilbert Space Operators, vol I, Research Notes in Math. 72, Pitman, Boston, 1982.

**MATEMATICA APLICADA, APLICACIONES DE LA MATEMATICA,  
FISICA-MATEMATICA.**

PRETI, M.C., VILLA, L.T. y GROSSI, R.O. (U.N.Sa.): *Consideraciones sobre la ecuación de frecuencias de una viga en voladizo.*

En este trabajo se realizan consideraciones sobre la ecuación de frecuencias de una viga que ejecuta vibraciones transversales libres uno de cuyos extremos está rígidamente empotrado y el otro se encuentra libre.

Se realiza la determinación de intervalos que contienen raíces, la prueba de que cada intervalo contiene una única raíz y un análisis asintótico de las mismas, que permite atacar el problema numérico de determinar las raíces de la ecuación de frecuencias, con la claridad e información necesarias para el uso del método numérico más adecuado. Este análisis da la seguridad que todas las raíces han sido tenidas en cuenta. La aplicación directa de un método de resolución de ecuaciones puede conducir a "no detectar" una o varias raíces. Dado que se trata de un problema originado en la ingeniería en el cual es importante determinar los primeros autovalores, es preciso tener la seguridad que no falta ninguno de ellos. Se admite que el problema no es de gran complejidad y que la correcta determinación de las raíces no es difícil de lograr, pero este tipo de análisis resulta importante para la consideración de problemas más complicados. Tal es el caso de una viga en voladizo que soporta una masa concentrada.

REGINATO, J.C. (U.N.R.C.), TARZIA, D.A. (U.N.R.) y CANTERO, A. (U.N.R.C.): *El método del balance integral calórico aplicado al crecimiento de raíces de cultivos.*

Se estudia un modelo de crecimiento de raíces de cultivos a través de un problema de frontera libre [RTC]. Se estudian diferencias en disponibilidad y transporte de nutrientes entre la superficie de la raíz y la rizosfera mediante un mecanismo de absorción activa tipo Michaelis-Menten [Cu].

Las ecuaciones resultantes del modelo son resueltas utilizando

do el método del balance integral calórico [Go]. Se obtiene un sistema de ecuaciones diferenciales para la frontera libre (crecimiento radial de la raíz) y la concentración en la frontera (interfaz raíz-suelo). Se dan varios ejemplos, con valores experimentales tipo, en función de los parámetros relevantes del sistema.

- [Cu] CUSHNANN, J.H., Nutrient transport inside and outside the root rhizosphere: Theory, Soil Sci. Soc. Amer. J. 46(1982), 704-709.
- [Go] GOODMAN, T.R., The heat-balance integral and its applications to problems involving a change of phase, Trans. ASME, 80(1958), 335-342.
- [RTC] REGINATO, J.C.-TARZIA, D.A.-CANTERO, A., On the free boundary problem for the Michaelis-Menten absorption model for root growth.

GUSPI, F.P. (U.N.R.): *Aplicación de la matriz de Hilbert a la resolución de algunos problemas de campos potenciales.*

El cálculo del potencial newtoniano, de la atracción gravitatoria y de los efectos magnéticos causados en puntos exteriores por cuerpos de revolución en torno a un eje vertical es usualmente engorroso y requiere la integración numérica de funciones trascendentes superiores o la evaluación de transformadas de Hankel.

En el presente trabajo se desarrolla un método numérico alternativo de gran agilidad a través de la reducción del cuerpo a una fuente equivalente compuesta por puntos pesados o por segmentos ubicados en el eje de simetría.

La fuente queda determinada por un sistema lineal cuya matriz de coeficientes es la matriz de Hilbert u otra relacionada, y se deduce una propiedad que explicita la solución en términos de los coeficientes de los polinomios de Jacobi.

Los valores del campo potencial obtenidos de esta manera son prácticamente exactos si la parte superior del cuerpo es más profunda que la mitad aproximada de su radio superior, aunque también los cuerpos más superficiales y aflorantes producen

excelentes resultados si se emplea una precisión adecuada en la computadora.

NORIEGA, R.J. y SCHIFINI, C.G. (U.B.A.): *Simetrías de las ecuaciones de campo y del Lagrangiano.*

Se considera un objeto  $B_{\alpha}^i = B_{\alpha}^i(g_{ij}; g_{ij,h}; A_i^{\alpha}; A_{i,j}^{\alpha}; A_{i,jh}^{\alpha})$  de manera tal que exista  $L = (g_{ij}; A_i^{\alpha}; A_{i,j}^{\alpha})$  que verifique  $B_{\alpha}^i = E_{\alpha}^i(L)$ , siendo  $g_{ij}$  la métrica del espacio-tiempo,  $A_i^{\alpha}$  los potenciales de gauge correspondientes a una conexión arbitraria sobre un G-fibrado principal y  $E_{\alpha}^i(L) = \frac{\partial L}{\partial A_i^{\alpha}} - \frac{\partial}{\partial x^j} \left( \frac{\partial L}{\partial A_{i,j}^{\alpha}} \right)$  las expresiones de Euler-Lagrange de L. Se demuestra que si  $B_{\alpha}^i$  es un gauge tensor, o sea, si es covariante tanto por transformaciones de gauge como por cambio de coordenadas, existe entonces una densidad escalar  $\tilde{L}$  equivalente a L en el sentido de tener las mismas expresiones de Euler-Lagrange ( $E_{\alpha}^i(\tilde{L}) = E_{\alpha}^i(L)$ ). Junto con un resultado anterior (R.J.Noriega, "Gauge invariance of the field equations and the Lagrangian in gauge field theories", por aparecer), esto último implica la existencia de una densidad escalar  $\hat{L}$ , invariante por transformaciones de gauge, tal que  $B_{\alpha}^i = E_{\alpha}^i(\hat{L})$ . Esto permite mostrar la unicidad de las ecuaciones de Yang-Mills sin suponer que el sistema esté mínimamente acoplado a la gravitación vía Relatividad General.

La demostración se basa en la reducción de la situación estudiada a un teorema probado en otro trabajo anterior (M.C.López, R.J.Noriega, C.G.Schifini, "The equivariant inverse problem and the uniqueness of the Yang-Mills equations", Journal of Mathematical Physics, en prensa), a partir de lo cual se analiza la tensorialidad de la expresión obtenida.

NORIEGA, R.J. (U.B.A.) y TABOADA, H.H. (C.N.E.A.): *Enfoque variacional por conexiones de las ecuaciones de campo de Einstein-Yang-Mills.*

La interacción entre un campo gravitatorio y uno de gauge libre de fuentes está gobernada por las ecuaciones de campo de Einstein-Yang-Mills [E-Y-M]. Las mismas pueden obtenerse mediante la variación de un lagrangiano  $L$  dependiente de la métrica y de sus derivadas de hasta segundo orden, del potencial de gauge y su primera derivada, si su expresión de Euler-Lagrange [E-L] correspondiente a la métrica es degenerada, y si es lineal en la derivada de segundo orden de la misma.

En este trabajo se aplica un enfoque variacional alternativo: en una variedad espaciotiempo de dimensión 4, se plantea una densidad escalar e invariante de gauge  $L$  que depende de la métrica, de una conexión simétrica arbitraria y de su primera derivada, del potencial de gauge y de su primera derivada. Además, se pide que la expresión de E-L correspondiente a la conexión sólo dependa de la métrica y de su derivada primera y de la conexión. En tal situación  $L$  resulta mínimamente acoplado y es la suma de tres densidades escalares e invariantes de gauge. Una de tipo gravitacional:  $ag^{1/2} \cdot K$ , con  $K$  escalar curvatura definido a partir de la conexión arbitraria (que resulta ser la de Levi-Civita si se cumple que su expresión de E-L se anule). Otra de tipo gauge:  $Lo(gbc; Fbc)$ , que mediante la aplicación de recientes teoremas resulta ser la usual. Ambas originan las ecuaciones de campo E-Y-M. Las expresiones E-L de la tercera:  $L1$ , son idénticamente nulas y entonces no actúa. Este trabajo es la generalización natural de uno de McKellar, caso particular del presente, cuando el grupo de Lie es  $G = U(1)$ .

ZANDRON, O. (U.N.R.): *Formalismo Hamiltoniano covariante sobre variedades con estructura de supergrupo.*

Sobre una supervariiedad  $G$  con estructura de supergrupo, la cual tiene un subgrupo bosónico  $H \subset G$  y considerado este subgrupo como un grupo de simetría de gauge exacto, es posible construir el formalismo canónico covariante para la gravedad, las diferentes supergravidades y para el acoplamiento de las



supergravidades con diferentes multipletes supersimétricos.

Se construye el espacio fibrado principal  $G(M,H,P)$  cuya fibra es difeomórfica al grupo bosónico de Lie  $H$ . La variedad cociente  $M = G/H$  es el superespacio físico y la proyección  $P$  está dada por el mapeo  $P: G \rightarrow H$ .

Se define una 1-superforma pseudo-conexión  $\mu$  en toda la supervariedad  $G$ , mediante el mapeo  $\mu: T(G) \rightarrow \varphi$  (donde  $\varphi$  es el álgebra de Lie graduada, asociada al supergrupo  $G$ ) la cual permite definir una derivada covariante. Dicha pseudo-conexión representa el potencial generalizado de Yang-Mills de la teoría supersimétrica.

En esta estructura geométrica la D-forma densidad Lagrangiana  $\mathcal{L}$  queda dada por un polinomio de la 2-superforma curvatura generalizada  $R(\mu)$  definida en la supervariedad  $G$ . El impulso  $\pi$ , canónico conjugado de la variable dinámica  $\mu$ , queda definido como la D-2-superforma que se obtiene por variación funcional de la densidad Lagrangiana con respecto de la 2-superforma velocidad generalizada  $d\mu$ . La densidad Hamiltoniana covariante (D-forma bosónica) resulta así dada por  $\mathcal{H} = d\mu \wedge \pi - \mathcal{L}$ .

Utilizando el concepto de corchetes graduados entre formas es posible dar una ecuación entre formas del tipo  $dA = (A, H_T) + \partial A$ , la cual permite obtener las ecuaciones Hamiltonianas covariantes para las diferentes supergravidades.

El Hamiltoniano  $H_T$  es una variable dinámica de primera clase, función de  $\mathcal{H}$  y de los vínculos primarios del sistema.

OVEJERO, R.G. (U.N.Sa.): *La estructura simpléctica del espacio de fase sobre el modelo de Klein y sus consecuencias físicas.*

El modelo de Klein del plano proyectivo utiliza para su representación los puntos interiores a una cónica en un plano euclídeo. Este mismo modelo es susceptible de representarse en forma dual mediante las rectas exteriores a dicha cónica, en forma tal que dos planos proyectivos pueden ubicarse simultáneamente sobre un mismo plano euclídeo. La elección de un trián-

gulo autopolar a la cónica y una parametrización sobre sus lados (dualmente, sus vértices) los transforma en sendos espacios vectoriales, duales entre sí, que sirven para soporte de un espacio de fase cuya estructura simpléctica se sigue naturalmente de esa dualidad. Eligiendo esa cónica como la sección a tiempo constante del cono de luz se generaliza la vinculación natural entre las mecánicas relativista y cuántica mostradas anteriormente (\*), proporcionando así nueva interpretación para esta última.

(\*) OVEJERO, R., Sobre la necesidad lógica de la cuantización de la energía en los procesos periódicos de la mecánica clásica relativista. Comunicación presentada a la XXXVIII Reunión de la UMA.